UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA
PROGRAMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

PLANO DA TERCEIRA AULA

Nº da aula	**Título da aula**	**Metas**	**Objetivos**
3	Funções contínuas.	Introduzir o conceito de função contínua e estabelecer propriedades.	Após a aula, o aluno deverá ser capaz de identificar se uma função de uma variável real é contínua ou não, usando o conceito de limite e usar o Teorema do Valor Intermediário para determinar propriedades de funções contínuas.

TERCEIRA AULA

Curso: LICENCIATURA EM BIOLOGIA **Professor-autor:** FÁBIO DOS SANTOS

Disciplina: MATEMÁTICA BÁSICA

Número da unidade: 01 **Número da aula:** 03

Título da aula: Funções contínuas.

Meta: Introduzir o conceito de função contínua e estabelecer propriedades.

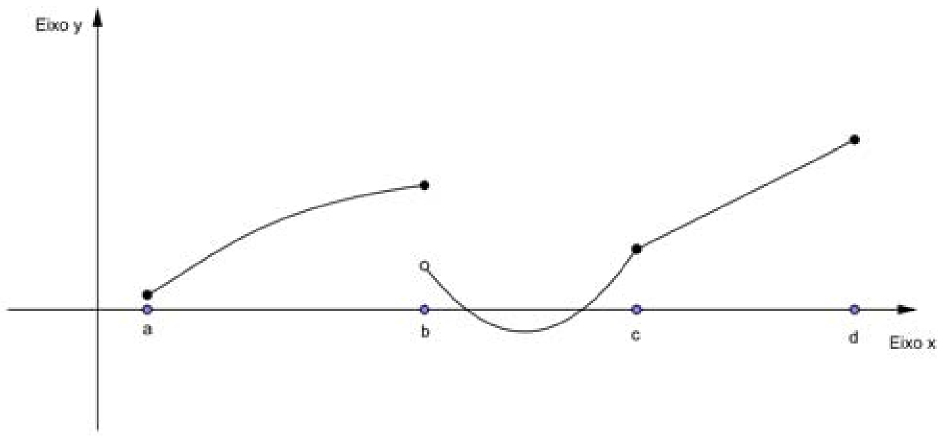
Objetivos: Após a aula, o aluno deverá ser capaz de identificar se uma função de uma variável real é contínua ou não, usando o conceito de limite e usar o Teorema do Valor Intermediário para determinar propriedades de funções contínuas.

Pré-requisito: Vestibular e aulas 01-02.

3.1 Introdução

As funções contínuas desempenham um importante papel no cálculo diferencial e integral. Antes de estudarmos a noção precisa, veremos noções intuitivas sobre continuidade.

De modo informal, uma função é contínua em um ponto se seu gráfico não apresentar buracos, saltos ou quebras naquele ponto. Considere, por exemplo, a função representada abaixo.



Esta função está definida no intervalo $[a, d]$ e, neste intervalo ela é descontínua apenas para $x = b$.

A grosso modo dizemos que uma função é contínua em um intervalo se seu gráfico pode ser desenhado sem tirar a caneta do papel. A função acima não é contínua em seu domínio, pois não é possível desenhar seu gráfico sem tirar a caneta do papel.

Em seguida, apresentaremos a definição precisa.

Definição: Uma função f é contínua em $x = a$ se:
(a) $f(a)$; está definido;
(b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe;
(c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Se f não é contínua em a dizemos que f é descontínua em a. Dizemos que f é contínua em um intervalo se f é contínua em todos os pontos deste intervalo.

Exemplo 3.1.1. A função $f(x) = x^2$ é contínua para todos os $x \in \mathbb{R}$, pois $D(f) = \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. De fato, note que seu gráfico não apresenta quebras.

Exemplo 3.1.2. Seja

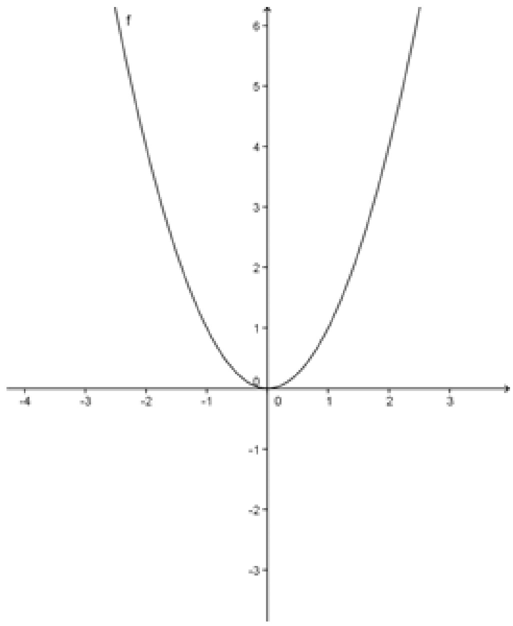


Figura 1: Gráfico de $f(x) = x^2$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

Note que $f(3)$ não está definida, mas para $a \neq 3$, $f(a)$ está definido e

$$f(a) = \frac{a^2 - 9}{a - 3} = a + 3.$$

Logo f é descontínua apenas em $a = 3$.

Exemplo 3.1.3. A função g definida por $g(x) = x - 1$ se $x \neq 1$ e $g(1) = 2$ é descontínua em $x = 1$, pois

$$0 = \lim_{x \to 1} g(x) \neq 2 = f(1).$$

A função é contínua nos demais valores de x.

Exemplo 3.1.4. Por argumento análogo ao da questão anterior, a função $f(x) = -2$ se $x < 0$ e $f(x) = 2$ se $x \geqslant 2$ é descontínua em $x = 0$.

3.2 Propriedades das Funções Contínuas

Para facilitar a identificação das funções contínuas, apresentaremos algumas propriedades importantes.

Propriedades. (1) Se f e g são contínuas em $x = a$, então $f + g, f - gef.g$ são contínuas em $x = a$. A função f/g é contínua em $x = a$ se $g(a) \neq 0$;

(2) Toda função polinomial é contínua;

(3) Uma função racional

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

é contínua em todos os pontos x para os quais $q(x) \neq 0$;

(4) Composição de funções contínuas é contínua, ou seja, se a função g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$ então $g \circ f$ é contínua em a.

Veremos agora alguns exemplos que fazem uso das propriedades acima.

Exemplo 3.2.1. A função

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 3$$

é polinomial e, de acordo com propriedade (2), é contínua para todos os valores de x. Veja abaixo que seu gráfico não apresenta quebras.

Exemplo 3.2.2. A função

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

é racional. Como seu denominador se anula em $x = \pm 1$ temos , pela propriedade (3),que f é descontínua nesses pontos e contínua nos demais pontos. Veja como seu gráfico apresenta quebras nesse pontos. **Exemplo 3.2.3.** A função

$$g(x) = \frac{9x^5 + 20x^4 - 3x^2}{x^2 - 4}$$

é racional. Observe que o denominador de g se anula em $x = \pm 2$; assim, pela propriedade (3), g é descontínua em $x = \pm 2$ e contínua nos demais pontos.

Exemplo 3.2.4. A função

$$h(x) = 2x^2 + 3x - 4 + \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

pode ser escrita na forma

$$h(x) = \frac{(2x^2 + 3x - 4).(x^2 - 3x + 2) + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

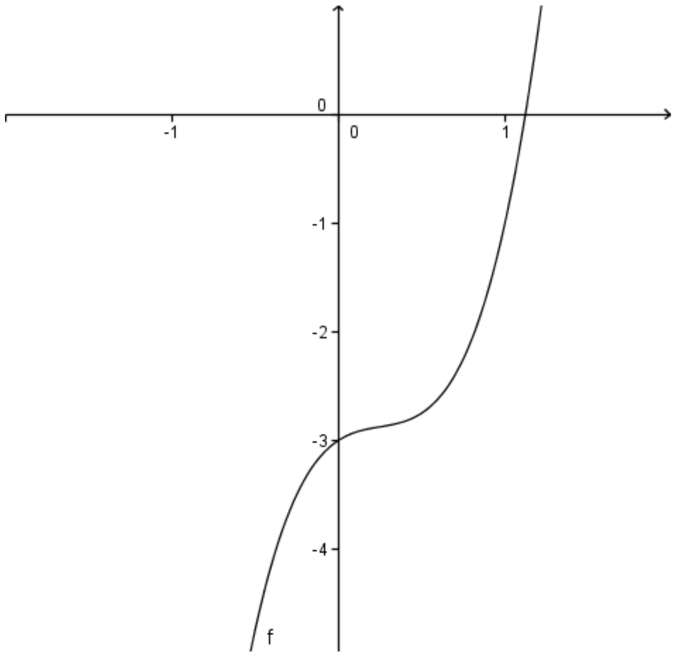


Figura 2: Gráfico de $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 3$.

que é racional com denominador $x^2 - 3x + 2$. Como

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

se, e somente se $x = 2$ ou $x = 1$ temos que h é descontínua em $x = 1$ e $x = 2$ e contínua nos demais pontos.

Exemplo 3.2.5. Descreveremos a curva de aprendizado de um certo indivíduo não tendo conhecimento algum do assunto ensinado, o indivíduo progride constantemente em direção à compreensão desse assunto num intervalo de tempo $0 \leq t < t_1$. Nesse intervalo, o progresso do indivíduo diminui à medida que se aproxima do instante t_1, pois ele não consegue compreender um conceito particularmente difícil. De repente, a compreensão ocorre no instante t_1, elevando seu conhecimento do assunto. A curva é descontínua em t_1.

3.3 O Teorema do Valor Intermediário (TVI)

Veremos nesta seção o teorema do valor intermediário e algumas aplicações.

Teorema do Valor Intermediário: Se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e M é um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um número c em (a, b) tal que $f(c) = M$.

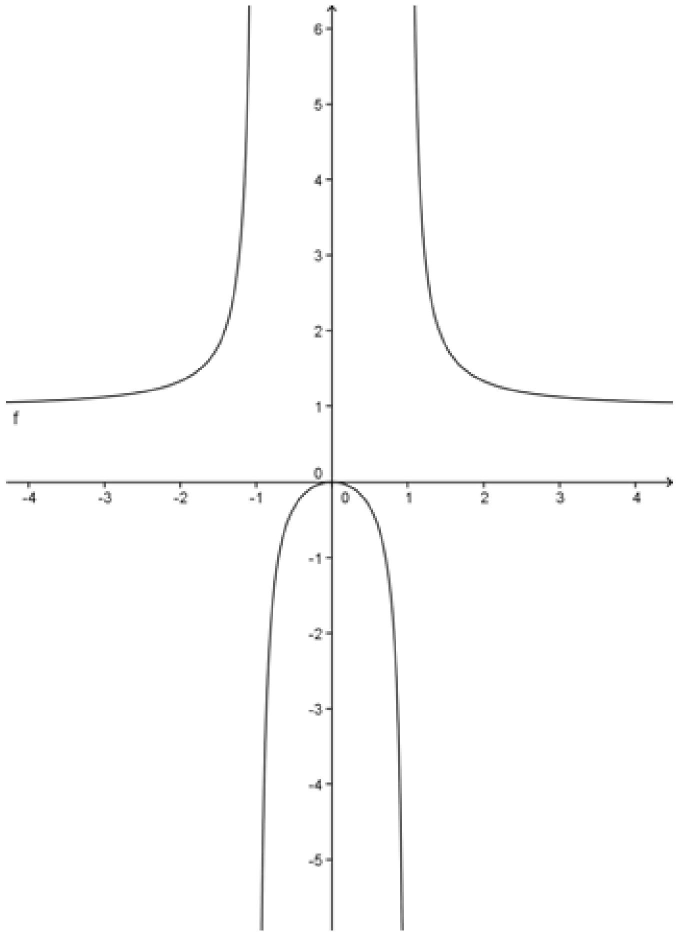


Figura 3: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

O teorema acima é importante na determinação dos zeros de uma função contínua, pois se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos então, pelo TVI, podemos garantir a existência de um zero de f no intervalo (a, b).

Exemplo 3.3.1. Seja $f(x) = x^5 + x^3 + 1$. Mostre que existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

Solução: A função f é polinomial e portanto, é continua. Como

$$f(-1) = (-1)^5 + (-1)^3 + 1 = -1$$

e

$$f(1) = (1)^5 + (1)^3 + 1 = 3$$

têm sinais opostos, pelo TVI, existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$, como queríamos.

Exemplo 3.3.2. O teorema do valor intermediário fornece a base teórica de um método numérico para o cálculo de raízes de funções, conhecido como método da bisseção . Veremos por um exemplo como é este método. Vamos calcular uma raiz de $f(x) = x^3 + x - 1$

em $(0,1)$. Como f é polinomial, ela é continua e, do fato de

$$f(0) = 0^3 + 0 - 1 = -1$$

e

$$f(1) = (1)^3 + 1 - 1 = 1$$

terem sinais opostos, pelo TVI, f possui um zero entre 0 e 1. Para localizar o zero com maior precisão, note que

$$f(0,5) = -0,375$$

tem sinal oposto a $f(1) = 3$. Pelo TVI f possui um zero entre $0,5$ e 1. Calculando $f(0,75)$ temos que $f(0,75) > 0$; assim, pelo TVI f possui um zero entre $0,5$ e $0,75$. Repetindo o processo montamos a tabela abaixo:

Passo	Raízes de f(x)=0 está em
1	(0,1)
2	(0,5;1)
3	(0.5) 0.75
4	(0,625 , 0,75)
5	(0,625 , 0,6875)
6	(0,65625 , 0,6875)
7	(0,671875 , 0,6875)
8	(0,679687 , 0,6875)
9	(0,6796875 , 0,6835937)

Pela tabela, temos que um zero de $f(x)$ entre 0 e 1 é aproximadamente $0,68$.

Exemplo 3.3.3. Seja

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

(a) Mostre que f é contínua para todos valores de x;

(b) Mostre que $f(x) \geq 0$ para todo x;

(c) Mostre que f possui um zero em $x = 0$.

Esse exemplo contradiz o TVI?

Solução: (a) Como f é uma função racional cuja função do denominador é não-nulo para todo x, temos que f é continuo.

(b) Com efeito, $x^2 \geq 0 e x^2 + 1 > 0$ para todo x e, portanto, $f(x) \geq 0$.

(c) É notável que

$$f(0) = \frac{0^2}{0^2+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

O gráfico da função do exemplo 3.3.3 é dado por (você entende porque?):

O exemplo 3 não contradiz o TVI, na verdade isso valida o TVI, já que 0 está na imagem de f.

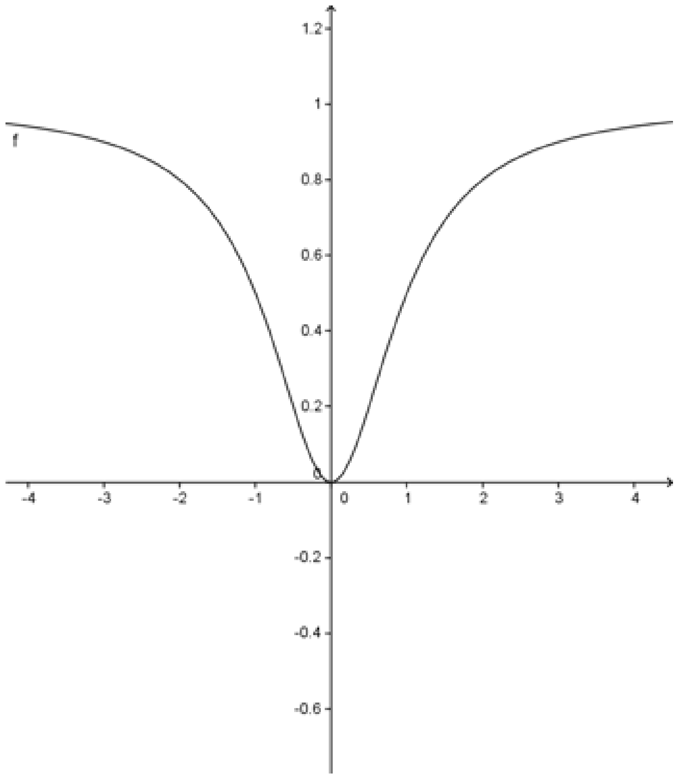


Figura 4: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$..

3.4 Conclusão

Dessa aula, concluímos que a noção de limite é importante para formalizar a definição de função contínua, uma das noções mais importantes do cálculo, e estabelecermos propriedades.

3.5 Resumo

Nessa aula vimos que, por definição, uma função f é contínua em $x = a$ se:

(a) $f(a)$ está definido;

(b) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

(c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Vimos também que as funções contínuas gozam das seguinte propriedades:

1. Se f e g são contínuos em $x = a$, então $f + g, f - gef.g$ são contínuos em $x = a$. A função f/g é contínua em $x = a$ se $g(a) \neq 0$.

2. Toda função polinomial é contínua.

3. Uma função racional

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

é contínua em todos os pontos x para os quais $q(x) \neq 0$.

4. Composição de funções contínuas é contínua, ou seja, se a função g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$ então $g \circ f$ é contínua em a.

Vimos também o Teorema do Valor Intermediário, o qual diz que se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e M é um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um número c em (a, b) tal que $f(c) = M$.

3.6 Atividades

Atividade 3.6.1. Mostre que a função $f(x) = x^3$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

Atividade 3.6.2. Para quais valores de x a função

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

é contínua?

Atividade 3.6.3. Para quais valores de x a função

$$g(x) = x^2 + \frac{x}{x^2 - x + 2}$$

é contínua?

Atividade 3.6.4. Mostre que a conclusão do TVI é falso se f é descontínua em $[a, b]$.

Atividade 3.6.5. Seja $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$. Mostre que f tem pelo menos um zero em $[-1, 1]$.

Atividade 3.6.6. Use o método da bisseção para encontrar uma raiz da equação

$$x^3 - x + 1 = 0$$

com precisão de duas casas decimais.

Comentário: Entenda bem o exemplo 3.3.2, o qual faz-se uso do método da bisseção, antes de tentar resolver a atividade 3.6.6.

3.7 Próxima aula

Na próxima aula, aprenderemos a calcular a equação da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto dado, usando a noção de limites e veremos a definição de derivada.

3.8 Referências Bibliográficas

- STEWART, James. Cálculo. Editora Pioneira, 5º edição, volume 1;

- IEZZI, Gerson; MURAKAM, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos de Matemática Elementar 8. Editora Atual, 3º edição, 1985.

- TAN, S. T. Matemática Aplicada a Administração e Economia. Editora Thomson Learning, segunda edição, São Paulo, 2007.