UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA
PROGRAMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

PLANO DA QUARTA AULA

Nº da aula	Título da aula	Metas	Objetivos
4	O problema da reta tangente e a definição de derivada	Obter a reta tangente ao gráfico de uma função usando o conceito de limite e usá-la para definir a derivada.	Ao final da aula, o aluno deverá ser capaz de obter a equação da reta tangente ao gráfico de uma função e calcular derivadas de algumas funções elementares, usando a definição

QUARTA AULA

Curso:LICENCIATURA EM BIOLOGIA **Professor-autor**: FÁBIO DOS SANTOS

Disciplina: MATEMÁTICA BÁSICA

Número da unidade: 01 **Número da aula:** 04

Título da aula: O problema da reta tangente e a definição de derivada.

Meta: Obter a reta tangente ao gráfico de uma função usando o conceito de limite e usá-la para definir a derivada.

Objetivos: Ao final da aula, o aluno deverá ser capaz de obter a equação da reta tangente ao gráfico de uma função e calcular derivadas de algumas funções elementares, usando a definição

Pré-requisito: Vestibular, aulas 01-03.

4.1 Introdução

As três primeiras aulas deste curso, onde introduzimos as noções de limites e continuidade, serão usadas como linguagem de base para o estudo do cálculo diferencial e integral.

Historicamente, a noção de derivada surgiu antes da noção de limite, mas numa abordagem moderna, usamos limites para definir a derivada pois ganhamos tempo e precisão. Nesta aula, forneceremos um método, usando limites, de determinar a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função, quando essa reta estiver bem definida. Usaremos este método para definir a de derivada de uma função e calculá-la.

Sendo a inclinação da reta tangente ao gráfico, a derivada traz, como veremos nas próximas aulas, informações úteis sobre a função. Por exemplo, os intervalos onde a função cresce ou decresce ou os máximos e mínimos da função pode ser determinado conhecendo propriedades da derivada da função. A derivada têm grande importância no esboço de gráficos e em problemas de otimização.

A área da matemática que estuda a derivada e suas aplicações é conhecida como Cálculo Diferencial e, desde sua descoberta no século XVII, é uma das áreas mais importantes de toda a matemática e, mais ainda, das ciências exatas, pois serve como linguagem da base para estas ciências.

4.2 A Reta Tangente ao gráfico de uma função

Para definirmos a reta tangente a uma curva C do plano cartesiano em um ponto P de C, fixemos P e consideremos um ponto Q qualquer de C distinto de P. A reta que passa por P e Q é chamada reta secante. Quando Q se aproxima de P ao longo da curva C, se as retas secantes se aproximarem de uma reta, essa reta será dita a reta tangente a curva C no ponto P. Quando a curva C é o gráfico de uma função $f(x)$, se $P = (x_0, f(x_0))$, a reta tangente à curva C em P é dita a reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ ou a reta tangente ao gráfico de f quando $x = x_0$.

Uma questão natural que surge neste momento é: dada uma função $f(x)$ e $P(x_0, f(x_0))$ um ponto do gráfico de f, como saber se existe a reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$? Caso exista, como determinar sua equação?

A resposta da questão acima é um dos temas principais desta aula.

Em geral, para determinar a equação de uma reta é necessário a inclinação (ou coeficiente angular) e um ponto desta reta. No caso da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$, já sabemos que P pertence a esta reta, assim, é suficiente obter a inclinação. Para obter, note que $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ são pontos do gráfico de f.

Em seguida, usando a fórmula da declividade de uma reta, podemos escrever a declividade da reta secante passando por $(x_{0,}f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$ como

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Como observado anteriormente, $(x_0+h, f(x_0+h))$ se aproxima de $(x_{0,}f(x_0))$ quando h se aproxima de zero e, portanto, a reta secante se aproxima da reta tangente ao gráfico de f quando h se aproxima de zero. Isso nos leva à seguinte conclusão, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_{0,}f(x_0))$ é dado por:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

se o limite existir. Quando esse limite não existe, a reta tangente não está bem definida. Denotando por:

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

quando tal limite existe, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_{0,}f(x_0))$ é dado por $y=mx+b$ onde $b=y_0-mx_{0.}$

Com o que vimos até agora podemos formar o seguinte algoritmo para obter a reta tangente ao gráfico de uma função f em um ponto $P(x_{0,}f(x_0))$ do se gráfico.

Passo 1: Determine

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Caso tal limite não exista, a reta tangente não está bem definida. Caso exista, prossiga para o próximo passo.

Passo 2: Calcule o coeficiente linear da reta tangente pela fórmula

$$b=y_0-mx_0.$$

Passo 3: Monte a equação pela fórmula

$$y=mx+b.$$

Veremos agora alguns exemplos concretos.

Exemplo 4.2.1. Seja $f(x)=x^2$. Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(1,1)$.

Solução: Nesse caso $x_0=1$ e $y_0=f(x_0)=1$. Note que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^{2}{}^{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h}=2;$$

assim, m=2 e, portanto, a reta tangente está bem definida. Nesse caso

$$b=y_0-mx_0=1-2.1=-1.$$

Logo, a equação procurada é

$$y = 2x - 1.$$

Veja o gráfico de f e a reta tangente no ponto $P(1, 1)$.

Exemplo 4.2.2. Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de

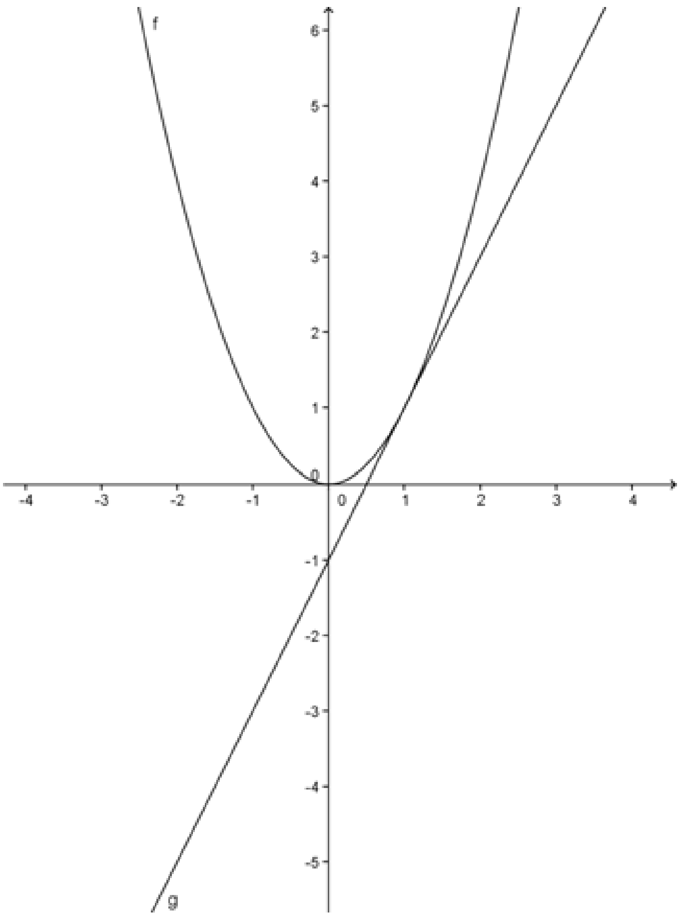

Figura 1: Gráfico de $f(x) = x^2$ e sua reta tangente em $P(1, 1)$.

$$f(x) = 3x + 1$$

no ponto correspondente a $x_0 = 1$.

Solução: Neste caso

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3.(1 + h) + 1 - 3.1 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} 3 = 3.$$

Como para $x_0 = 1$, $f(x_0) = 3.1 + 1 = 4$ temos que o coeficiente linear é dado por

$$b = f(x_0) - mx_0 = 4 - 3.1 = 1,$$

assim, a equação da reta tangente é

$$y = 3x + 1.$$

Observação: Note que a reta tangente coincide com o gráfico da função. Será que isso

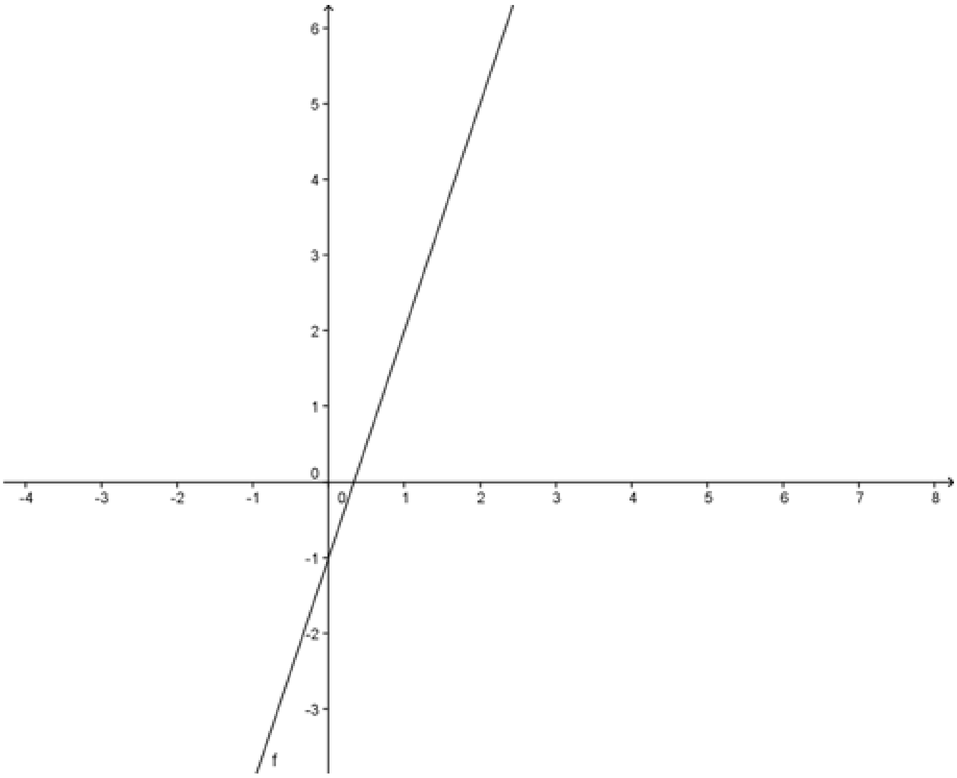

Figura 2: Gráfico de $f(x) = 3x + 1$ que coincide com sua reta tangente.

sempre acontece com função afim? A segunda atividade desta aula é para você, caro aluno, se convencer que sim.

Exemplo 4.2.3. Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = |x|$ em $P(0, 0)$.

Solução: Calculemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Como $\dfrac{|h|}{h} = 1$ se $h > 0$ e -1 se $h < 0$, temos que quando h se aproxima de zero por valores maiores positivos $\dfrac{|h|}{h}$ se aproxima de 1 e que $\dfrac{|h|}{h}$ se aproxima de -1 quando h se aproxima de zero por valores negativos; assim, tal limite não existe. Logo a reta tangente ao gráfico de $f(x) = |x|$ no ponto $P(0, 0)$ não está bem definido.

Observe no gráfico abaixo, da função módulo, que na origem do sistema de coordenadas o gráfico apresente um "bico". Em geral, se o gráfico de uma função têm "bicos" a função não possui reta tangente bem definida naquele ponto.

Não prolongaremos em tal estudo, pois a partir da próxima aula veremos métodos mais eficazes para o cálculo de

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

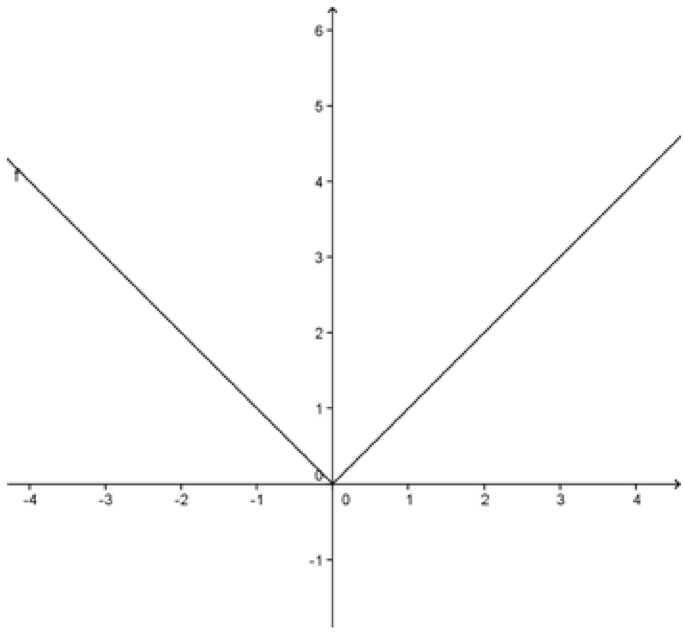

Figura 3: Gráfico de $f(x) = |x|$.

Esse limite será chamada a derivada de f em x_0 e é, sem dúvidas um dos limites mais importante do cálculo diferencial e integral.

4.3 Definição de Derivada

Vimos na seção anterior que a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $x = x_0$, se estiver bem definida, tem inclinação dada por

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Esse limite, quando existe, é chamado a derivada de f em x_0 e é denotado por $f'(x_0)$; assim,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ou seja, a derivada de f em x_0 quando existe, fornece a inclinação ou o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em x_0.

Exemplo 4.3.1. Usando a definição, obtenha a derivada de $f(x) = x^2 + 2$ em $x_0 = 1$.

Solução: Calculemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 + 2 - (1^2 + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2+h}{h} = 2;$$

assim, $f'(1) = 2$.

Exemplo 4.3.2. Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 + 2$ em $x_0 = 1$.

Solução: Pela questão anterior, a reta tangente tem inclinação $m = f'(1) = 2$; assim, a equação tem a forma

$$y = mx + b = 2x + b.$$

Como $(x_0, f(x_0)) = (1, 3)$ pertence a essa reta, $3 = 2.1 + b$, donde $b = 1$; assim a equação é $y = 2x + 1$.

Exemplo 4.3.3. Calcule $f'(0)$ para $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

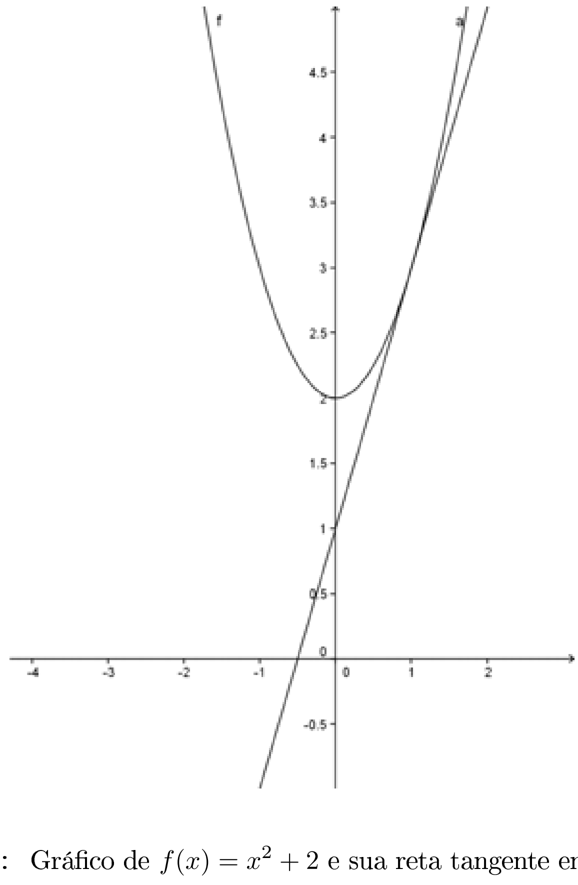

Figura 4: Gráfico de $f(x) = x^2 + 2$ e sua reta tangente em $P(1, 3)$.

Solução: Temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{\frac{1}{3}-1} = \lim_{h\to 0} h^{\frac{-2}{3}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

e, portanto, $f'(0)$ não existe.

Veja no gráfico que se a derivada da função na origem existisse, a reta tangente seria vertical. Sempre que a reta tangente é vertical a função não é derivável no ponto correspondente.

Exemplo 4.3.4. Obtenha $f'(1)$ para $f(x) = \sqrt{x}$.

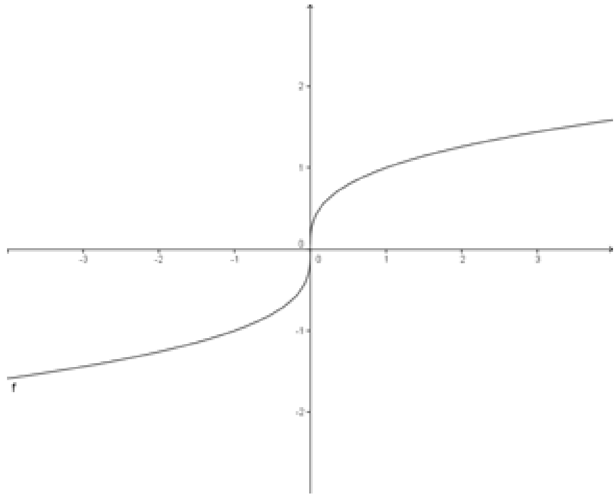

Figura 5: Gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$. não possui reta tangente na origem.

Solução: Como

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h}.\frac{\sqrt{1+h}+\sqrt{1}}{\sqrt{1+h}+\sqrt{1}} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{2};$$

temos que, $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

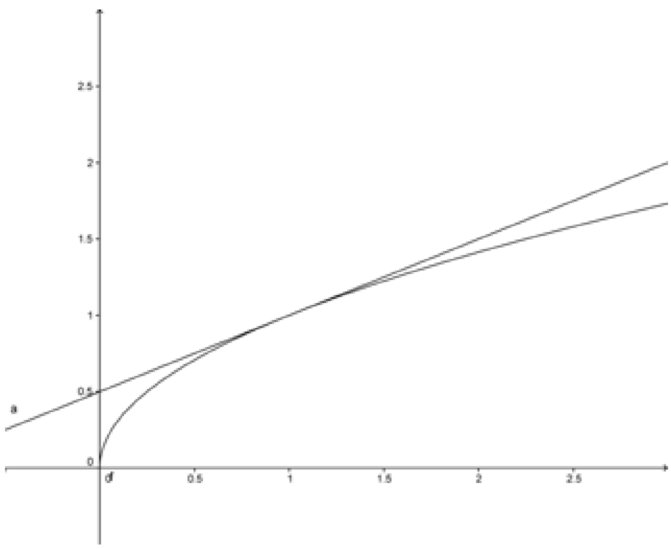

Figura 6: Gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e sua reta tangente na origem.

4.4 Conclusão

Desta aula concluímos que o conceito de limite de uma função é crucial na determinação da inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função, o qual, quando está bem definido é a derivada da função no ponto; assim, a noção de derivada, noção fundamental do Cálculo Diferencial, envolve o conceito de limite.

4.5 Resumo

Vimos nesta aula que para obter a equação da reta tangente ao gráfico de uma função f em um ponto $P(x_0, f(x_0))$ do gráfico de f, devemos determinar o limite

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Caso tal limite não exista, a reta tangente não está bem definida. Caso exista, calculamos o coeficiente linear da reta tangente pela fórmula

$$b = y_0 - mx_0.$$

A equação da reta tangente é dada por $y = mx + b$.

Vimos também que, quando a reta tangente está bem definida, seu coeficiente angular, que é dado pelo limite acima, é chamado a derivada de f em x_0 e é denotado por $f'(x_0)$.

4.6 Atividades

Atividade 4.6.1. Mostre que dada uma função do segundo grau

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

e um ponto $P(x_0, f(x_0))$ do gráfico de f, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P é dada por

$$y = mx + b,$$

onde

$$m = 2ax_0$$

e

$$b = f(x_0) - 2ax_0^2.$$

Atividade 4.6.2. Mostre que a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = ax + b$ num ponto arbitrário do gráfico de f é dado por $y = ax + b$.

Atividade 4.6.3. Usando a definição, obtenha a derivada de $f(x) = x^3$ em $x = 1$.

Atividade 4.6.4. Obtenha $f'(3)$ para $f(x) = \sqrt{x}$.

4.7 Próxima aula

Na próxima aula, forneceremos propriedades importantes da derivada. Tais propriedades facilitarão bastante seu cálculo.

4.8 Referências Bibliográficas

– STEWART, James. Cálculo. Editora Pioneira, 5º edição, volume 1;

– IEZZI, Gerson; MURAKAM, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos de Matemática Elementar 8. Editora Atual, 3º edição, 1985.

– TAN, S. T. Matemática Aplicada a Administração e Economia. Editora Thomson Learning, segunda edição, São Paulo, 2007.