UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA
PROGRAMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

PLANO DA QUINTA AULA

Nº da aula	Título da aula	Metas	Objetivos
5	Regras de derivação	Obter derivadas de funções que envolvem soma, produto e quociente e composição de funções elementares.	Após a leitura desta aula, o aluno deverá ser capaz de calcular derivadas de funções que envolvem somas, produtos , quocientes e composições de funções elementares

QUINTA AULA

Curso:LICENCIATURA EM BIOLOGIA **Professor-autor**: FÁBIO DOS SANTOS

Disciplina: MATEMÁTICA BÁSICA

Número da unidade: 01 **Número da aula:** 05

Título da aula: Regras de derivação.

Meta: Obter derivadas de funções que envolvem soma, produto e quociente e composição de funções elementares.

Objetivos: Após a leitura desta aula, o aluno deverá ser capaz de calcular derivadas de funções que envolvem somas, produtos , quocientes e composições de funções elementares

Pré-requisito: Vestibular e aulas 01-04

5.1 Introdução

Vimos na aula anterior que a derivada é interpretada como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função e pode ser calculada por meio de um limite. Na maioria das vezes o cálculo da derivada de uma função usando a definição é impraticável. Por exemplo, tente calcular a derivada de $f(x) = \cos(x^3+4x^2+5)$ usando a definição. Nesta aula, aprenderemos algumas regras para obtenção da derivada que facilitarão bastante e na maioria dos casos são mais aplicáveis que a definição. Após esta aula, seremos capazes de calcular derivadas de funções polinomiais, racionais, trigonométricas, logarítmicas, exponenciais e composições destas.

Prezado aluno, entenda bem esta aula pois ela é fundamental para o entendimento das próximas. Nas maioria das aplicações de derivadas, um das passos mais úteis diz respeito a obtenção da derivada, assunto abordado nessa aula. O cálculo da derivada, normalmente, é o primeiro passo em aplicações e será usada bastante no esboço de gráficos de funções.

5.2 Derivadas de funções elementares

Nesta seção, forneceremos as regras para derivação de funções elementares. Não faremos suas provas, apenas aprenderemos a utilizá-las.

Valem as seguintes regras de derivação:

R1: Se $f(x) = c$, onde c é uma constante; então $f'(x) = 0$. Em palavras, a derivada de uma função constante é igual a zero;

R2: dada a função $f(x) = x^n$, onde $n \in R$ temos que $f'(x) = nx^{n-1}$;

R3: a derivada de $f(x) = senx$ é dada por $f'(x) = cosx$;

Abaixo segue os gráficos de $f(x) = senx$ e sua derivada $f'(x) = cosx$ (pontilhado). Você consegue perceber algum fato curioso? Vou adiantar um fato que será visto na próxima aula: os máximos e mínimo da função correspondem aos zeros da derivada, a função $f(x)$ é crescente nos intervalos onde sua derivada é positiva e decrescente quando $f'(x) < 0$.

R4: a derivada de $f(x) = cosx$ é dada por $f'(x) = -senx$;
Analise a observação da propriedade R3 para este caso nos gráficos abaixo: R5: dada

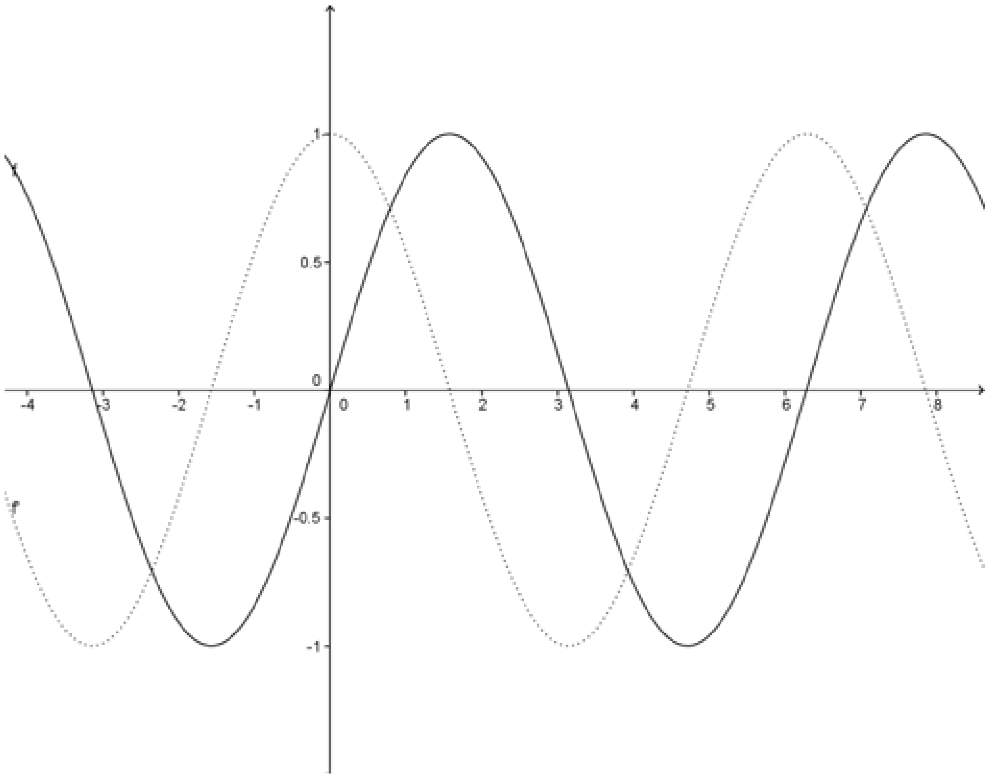

Figura 1: Gráfico de $f(x) = sen(x)$ e sua derivada $f'(x) = cos(x)$.

a função $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a > 0$, sua deriva é $f'(x) = a^x lna$. Em particular, a derivada de $f(x) = e^x$ é $f'(x) = e^x lne = e^x$;

R6: dada $f(x) = \log_a x$, têm-se que $f'(x) = \dfrac{1}{xlna}$. Em particular, se $f(x) = lna$ segue que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Vamos agora, usar estas regras para obter as derivadas de algumas funções.

Exemplo 5.2.1. Obtenha a derivada das funções $f(x) = 3, g(x) = x^9, h(x) = 9^x$.

Solução: Pela regra R1 temos que $f'(x) = 0$, já que f é constante. Por R2 $g'(x) = 9x^{9-1} = 9x^8$ e por R5 $h'(x) = 9^{x.ln9}$.

Exemplo 5.2.2. Calcule a derivada de $f(x) = cosx$ em $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

Solução: Por R4 $f'(x) = -senx$; em particular,

$$f'(\frac{\pi}{3}) = -sen(\frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo 5.2.3. Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

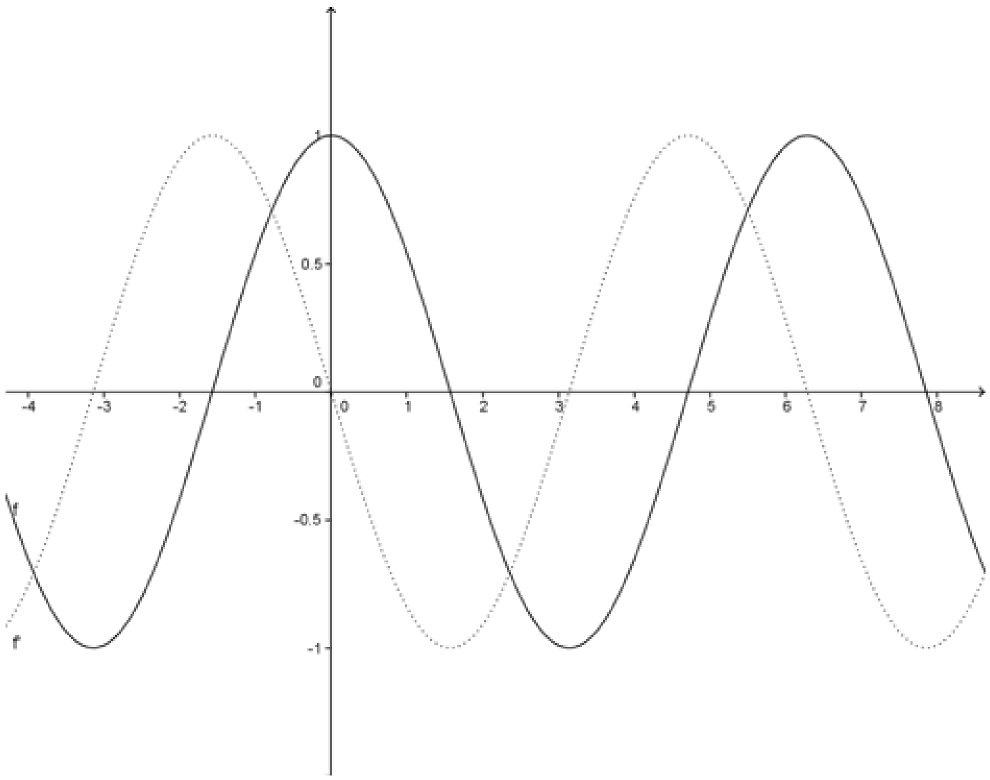

Figura 2: Grafico de $f(x) = cos(x)$ e sua derivada $f'(x) = -sen(x)$.

Solução: Note que $f(x)$ pode ser escrito na forma $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$; assim, por R2

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Veremos, na seção seguinte, como calcular derivadas de funções que são dadas por composição de funções elementares.

5.3 Regras Básicas de Derivações

Nessa seção, forneceremos algumas regras básicas de derivações que, usadas com os conhecimentos da seção anterior, permitirão o cálculo de funções que são dadas por somas, diferenças, produto ou produtos de funções elementares. São elas:

R7: A derivada da soma é a soma das derivadas, isto é,

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x);$$

R8: a derivada da diferença é a diferença das derivadas, isto é,

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x);$$

R9: a derivada do produto de duas funções é igual a derivada da primeira vezes a segunda mais a primeira vezes a derivada da segunda, isto é,

$$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x);$$

R10: a derivada do quociente de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é dada por

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x).g(x) + f(x).g'(x)}{g(x)^2}.$$

Vamos, agora, aprender a usar estas regras para calcular derivadas de algumas funções.

Exemplo 5.3.1. Calcule a derivada de $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5$.

Solução: Pela regra R7 temos que

$$f'(x) = (x^3)' + (4x^2 + 5)' = (x^3)' + (4x^2)' + (5)'.$$

Por R1 $(5)' = 0$, e, por R2 $(x^3)' = 3x^2$. Para obter $(4x^2)'$ usamos a regra do produto, R1 e R2 e obtemos $(4x^2)' = (4)'x^2 + 4(x^2)' = 0.x^2 + 4.2x = 8x$. Logo $f'(x) = 3x^2 + 8x$.

Analise os gráficos de $f(x)$ e $f'(x)$. Você consegue interpretá-los?

Abaixo o gráfico em destaque é o da função $f(x)$ e o pontilhado é o de $f'(x)$.

R11: Em geral, dada uma função polinomial

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, a_n \neq 0$$

é dada por

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1}.$$

Isto pode ser obtido de forma análoga a resolução do exemplo anterior.

Atividade 5.3.1. Obtenha $f'(x)$ para $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$.

Outra propriedade que pode ser provada facilmente usando as regras R1, R2 e R9 é:

R12: $(c.f(x))' = c.f'(x)$, onde c é uma constante real.

Exemplo 5.3.2. Obtenha a derivada de $f(x) = 3cosx + x^3$.
Solução: Por R7

$$f'(x) = (3cosx)' + (x^3)'$$

por R12

$$f'(x) = 3(cosx)' + (x^3)'$$

Por R2 e R4 temos que

$$f'(x) = -3senx + 3x^2.$$

Atividade 5.3.2. Obtenha a derivada da função $f(x) = 2senx + \sqrt{x}$.

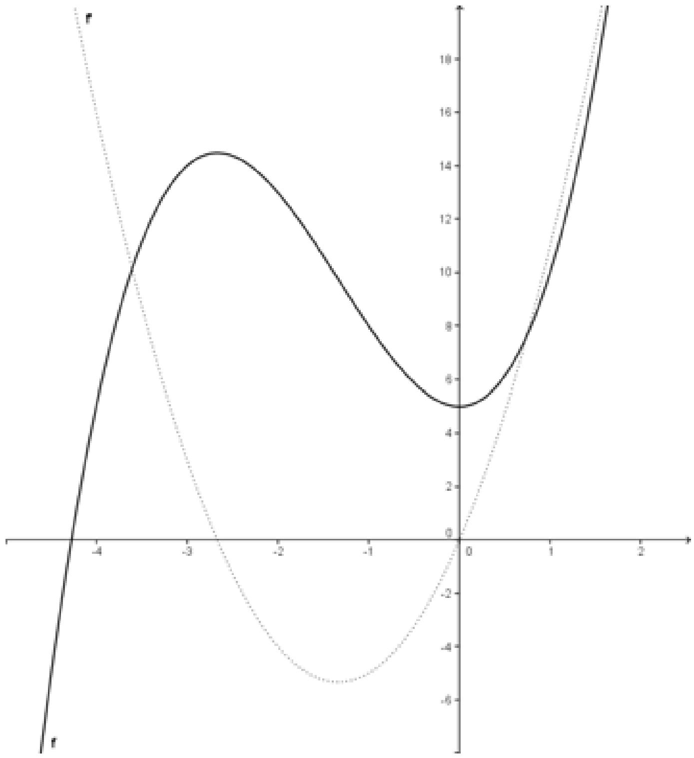

Figura 3: Gráfico de $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5$ e sua derivada $f'(x) = 3x^2 + 8x$.

Exemplo 5.3.3. Calcule a derivada de

$$f(x) = \frac{x^2.cosx}{1 + senx}.$$

Solução: Por R10

$$f'(x) = \frac{(x^2.cosx)'(1 + senx) + x^2.cosx(1 + senx)'}{(1 + senx)^2}.$$

Usando R8, R7, R1 e R2 obtemos:

$$f'(x) = \frac{(2x.cosx - x^2.senx).(1 + senx) + x^2.\cos^2 x}{(1 + senx)^2}.$$

5.4 A Regra da Cadeia

Considere o problema de calcular a derivada de:

$$F(x) = (x^3 + 1)^{100}.$$

Pelos métodos estudados até o momento, uma solução para tal problema seria expandir $(x^3+1)^{100}$ e obter a derivada do polinômio correspondente ou usar repetidamente a regra do produto, já que $(x^3+1)^{100}$ é o produto de x^3+1 por ele mesmo cem vezes. Esses métodos são inviáveis na prática. Na continuação forneceremos a regra da cadeia, um método para derivar funções compostas que simplificará o cálculo de muitas derivadas.

Regra da cadeia: se f e g são funções diferenciáveis e $F = f \circ g$ for a função composta definida por

$$F(x) = f(g(x)),$$

então F é diferenciável e

$$F'(x) = f'(g(x)).g'(x).$$

Exemplo 5.4.1. Encontre $F'(x)$ se $F(x) = (x^3+1)^{100}$.

Solução: Note que $F(x) = f(g(x))$, onde $g(x) = x^3+1$ e $f(u) = u^{100}$; assim, pela Regra da Cadeia

$$F'(x) = f'(g(x)).g'(x) = 100.g(x)^{99}.3x^2 = 300x^2(x^3+1)^{99},$$

já que

$$f'(u) = 100u^{99} \quad \text{e} \quad g'(x) = 3x^2.$$

Exemplo 5.4.2. Calcule as derivadas de $F(x) = sen(x^2)$ e $G(x) = (senx)^2$.

Solução: Faça $g(x) = x^2$ e $f(u) = senu$ e temos que

$$F(x) = f(g(x)).$$

Pela regra da cadeia

$$F'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

Como $g'(x) = 2x$ e $f'(u) = \cos u$, temos que

$$F'(x) = \cos(x^2).2x = 2xcos(x^2).$$

Para o cálculo de $G'(x)$, basta notar que

$$G(x) = g(f(x))$$

e, pela Regra da Cadeia

$$G'(x) = g'(f(x)).f'(x) = 2f'(x).cosx = 2senx\,cosx.$$

Exemplo 5.4.3. Calcule a derivada de $F(x) = e^{senx}$.

Solução: Fazendo $f(x) = senx$ e $g(u) = e^u$ temos que

$$F(x) = g(f(x))$$

donde, pela Regra da Cadeia,

$$F'(x) = g'(f(x)).f'(x).$$

Como $f'(x) = \cos x$ e $g'(u) = e^u$ temos que

$$F'(x) = e^{senx}.cosx.$$

5.5 Conclusão

Pelo exposto nesta aula concluímos que no cálculo efetivo das derivadas é muito importante conhecer suas propriedades, já que a definição envolve um limite que na maioria das vezes não é simples de calcular.

5.6 Resumo

Vimos nesta aula que a derivada goza das doze propriedades:

R1: A derivada de uma função constante é igual a zero;

R2: dada a função $f(x) = x^n$, onde $n \in R$ temos que $f'(x) = nx^{n-1}$;

R3: a derivada de $f(x) = senx$ é dada por $f'(x) = cosx$;

R4: a derivada de $f(x) = cosx$ é dada por $f'(x) = -senx$;

R5: dada a função $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a > 0$, sua deriva é $f'(x) = a^x lna$. Em particular, a derivada de $f(x) = e^x$ é $f'(x) = e^x lne = e^x$;

R6: dada $f(x) = \log_a x$, têm-se que $f'(x) = \dfrac{1}{xlna}$. Em particular, se $f(x) = lna$ segue que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

R7: A derivada da soma é a soma das derivadas;

R8: a derivada da diferença é a diferença das derivadas;

R9: a derivada do produto de duas funções é igual a derivada da primeira vezes a segunda mais a primeira vezes a derivada da segunda;

R10: a derivada do quociente de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é dada por

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x).g(x) + f(x).g'(x)}{g(x)^2}.$$

R11: Em geral, a derivada de uma função polinomial

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, a_n \neq 0$$

é dada por

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1}.$$

R12: $(c.f(x))' = c.f'(x)$, onde c é uma constante real.

Além destas propriedades, vimos uma regra útil para derivar funções compostas, denominado Regra da Cadeia, a qual afirma que se f e g são funções diferenciáveis e $F = f \circ g$ for a função composta definida por $F(x) = f(g(x))$, então F é diferenciável e, além disso,

$$F'(x) = f'(g(x)).g'(x).$$

5.7 Atividades

Atividade 5.7.1. Obtenha as derivadas das funções $f(x) = x^3; g(x) = \pi^x$ e $h(x) = \sqrt{x}$.

Atividade 5.7.2. Calcule a derivada de $f(x) = senx$ em $x_0 = \pi$.

Atividade 5.7.3. Calcule a derivada de $F(x) = \cos(e^x)$.

Atividade 5.7.4. Calcule $F'(x)$ para $F(x) = \cos(10 + x^3)$.

5.8 Próxima aula

Após ter aprendido a calcular derivadas de um grande classe de funções, na próxima aula daremos algumas aplicações. Mostraremos que o estudo de máximos e mínimos está bem relacionado com as derivadas.

5.9 Referências Bibliográficas

– STEWART, James. Cálculo. Editora Pioneira, 5º edição, volume 1;

- IEZZI, Gerson; MURAKAM, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos de Matemática Elementar 8. Editora Atual, 3º edição, 1985.

- TAN, S. T. Matemática Aplicada a Administração e Economia. Editora Thomson Learning, segunda edição, São Paulo, 2007.