UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA
PROGRAMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

PLANO DA SEXTA AULA

Nº da aula	Título da aula	Metas	Objetivos
6	Máximos e mínimos.	Apresentar os métodos da derivada primeira e da segunda para determinação dos extremos de uma função.	Ao final da aula, o aluno deverá ser capaz de determinar os extremos de uma função, usando os métodos da derivada primeira ou derivada segunda.

SEXTA AULA

Curso:LICENCIATURA EM BIOLOGIA **Professor-autor**: FÁBIO DOS SANTOS

Disciplina: MATEMÁTICA BÁSICA

Número da unidade: 02 **Número da aula:** 06

Título da aula: Máximos e mínimos.

Meta: Apresentar os métodos da derivada primeira e da segunda para determinação dos extremos de uma função.

Objetivos: Ao final da aula, o aluno deverá ser capaz de determinar os extremos de uma função, usando os métodos da derivada primeira ou derivada segunda.

Pré-requisito: Vestibular e aulas 01-05.

6.1 Introdução

Este capítulo explora o poder da derivada, que usamos para a análise das propriedades das funções. Veremos também como usar a derivada para resolver amplas classes de problemas de otimização. Muitas propriedades práticas requerem minimizar um custo ou maximizar um lucro, ou de alguma forma encontrar a melhor saída de uma situação. Em muitos desses problemas usaremos a teoria do máximo e mínimos para resolver. Nesses capítulo, aprenderemos que o sinal da derivada em um intervalo esta relacionado com com os intervalos de crescimento e decaimento da função. Usando esse fato, forneceremos um método, chamado Teste da Derivada Primeira, para determinar extremos (máximo e mínimos) relativos de funções. Veremos, também, a definição da derivada segunda e um método envolvendo ela para decidir se um ponto crítico é máximo ou mínimo relativo chamado Método da Derivada Segunda.

O assunto abordado nesse seção útil na sétima aula, para o esboço de gráficos de funções.

6.2 Funções crescentes e decrescentes

Uma função f é crescente em um intervalo (a, b) se para quaisquer x_1, x_2 em (a, b) com $x_1 < x_2$ temos que $f(x_1) < f(x_2)$. Por exemplo, a função da figura 1 é crescente no intervalo (a, b).

Analogamente, f é decrescente se para quaisquer $x_1, x_2 \in (a, b)$ com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) > f(x_2)$. Por exemplo, a função cujo gráfico está esboçado na figura 2 é decrescente.

Apesar das definições de funções crescente e decrescentes apontarem não ter relação com a derivada, temos o seguinte teorema que mostra o contrário.

Teorema.(a) Se $f'(x) > 0$ para cada $x \in (a, b)$ então f é crescente em (a, b);

(b) se $f'(x) < 0$ para cada $x \in (a, b)$ então f é decrescente em (a, b);

(c) se $f'(x) = 0$ para cada $x \in (a, b)$ então f é constante em (a, b).

Vejamos agora algumas aplicações desses teorema.

Exemplo 6.2.1. Prove que $f(x) = e^x$ é uma função crescente.

Solução: Sabemos que $f'(x) = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ como $e^x > 0$ para todo x, segue que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; assim, pelo teorema anterior, f é crescente.

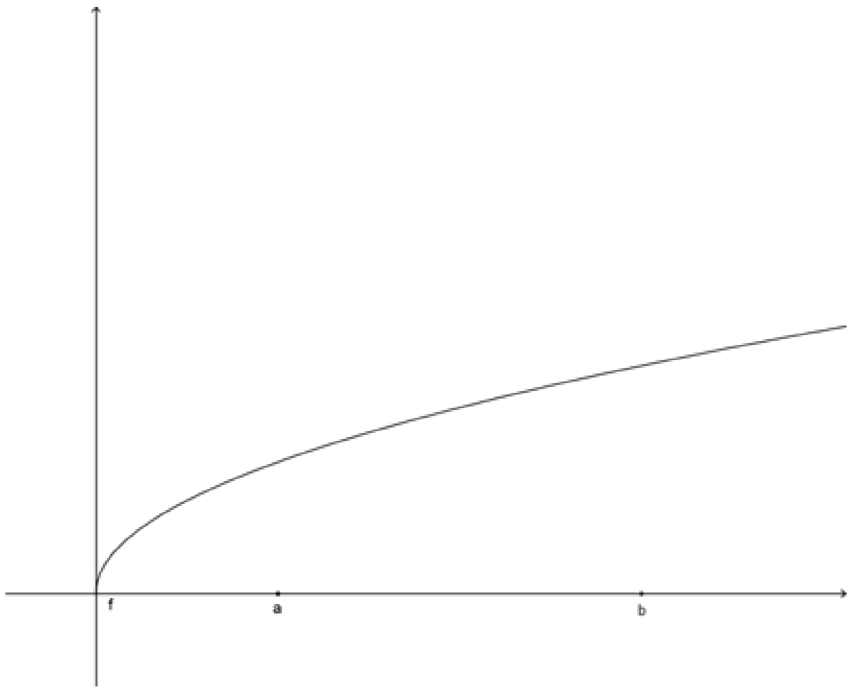

Figura 1: Função crescente no intervalo (a, b).

Exemplo 6.2.2. Determine o intervalo em que a função $f(x) = x^2$ é crescente e o intervalo em que é decrescente.

Solução: Sabemos que a derivada de $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$; assim,

$$f'(x) = 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \quad \text{e} \quad f'(x) = 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Pelo teorema anterior, segue que f é crescente no intervalo $(0, \infty)$ e decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$.

Exemplo 6.2.3. Determine os intervalos em que a função $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$ é crescente e em que é decrescente.

Solução: A derivada de $f'(x)$ é $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x^2 - 2x - 8)$ que é uma função do segundo grau. Usando a fórmula de Baskara obtemos $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$ como raízes de $f'(x)$; assim, $f'(x) = 3(x + 2).(x - 4)$. Como o coeficiente de x^2 é $3 > 0$, a concavidade do gráfico de $f'(x)$ é para cima; assim,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$$

e

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 4).$$

Pelo teorema anterior, f é crescente nos intervalo $(-\infty, -2)$ e $(4, \infty)$, e decrescente em $(-2, 4)$.

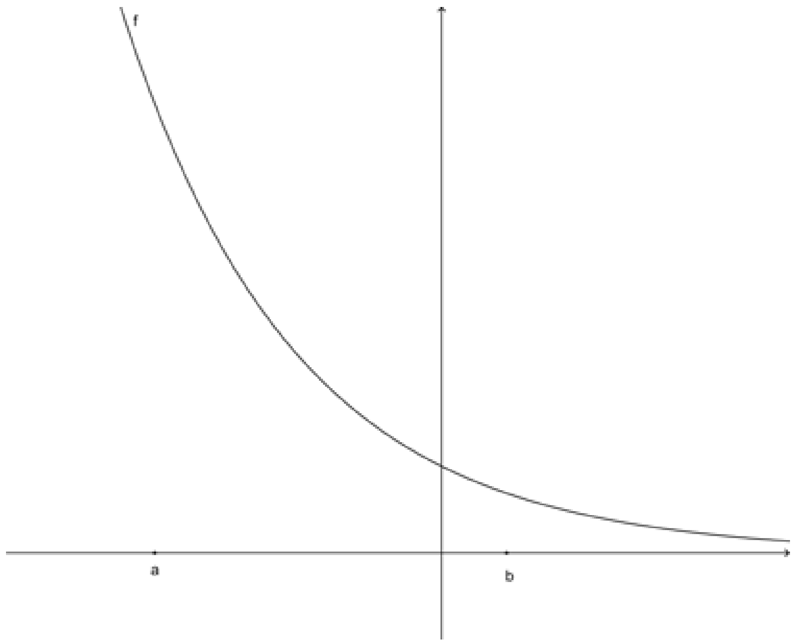

Figura 2: Função decrescente no intervalo (a, b).

6.3 O Teste da Derivada Primeira

Além de nos auxiliar na determinação dos intervalos onde o gráfico de uma função é crescente e decrescente, a derivada pode ser usada localizar certos "pontos mais altos" e "pontos mais baixo" no gráfico de f. Escolher esses pontos é útil no esboço de gráfico e em problemas de otimização.

Dizemos que uma função f tem um máximo relativo em $x = c$ se existe um intervalo aberto (a, b) contendo c tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in (a, b)$. De modo análogo, f tem um mínimo relativo em $x = c$ se existe um intervalo aberto contendo c tal que $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in (a, b)$.

A função cuja gráfico esta esboçado na figura 4 possui um máximo relativo em x_1 e um mínimo relativo em x_2.

Vamos agora ver um teorema que diz como a derivação pode ajudar a determinar os máximo e mínimos relativos.

Teorema: Seja $x = c$ um máximo ou um mínimo relativo da função f. Se f é diferenciável em $x = c$ então $f'(c) = 0$.

Em geral, um zero da derivada de f é dito um ponto crítico de f; assim, se $f'(c) = 0$ então $x = c$ é um ponto crítico de f. O teorema acima não diz que os possíveis máximo e mínimo relativo de uma função diferencial são seus pontos críticos.

Observe que a função $f(x) = |x|$ é tal que $x = 0$ é um mínimo relativo e no entanto, $f'(0)$ não existe.

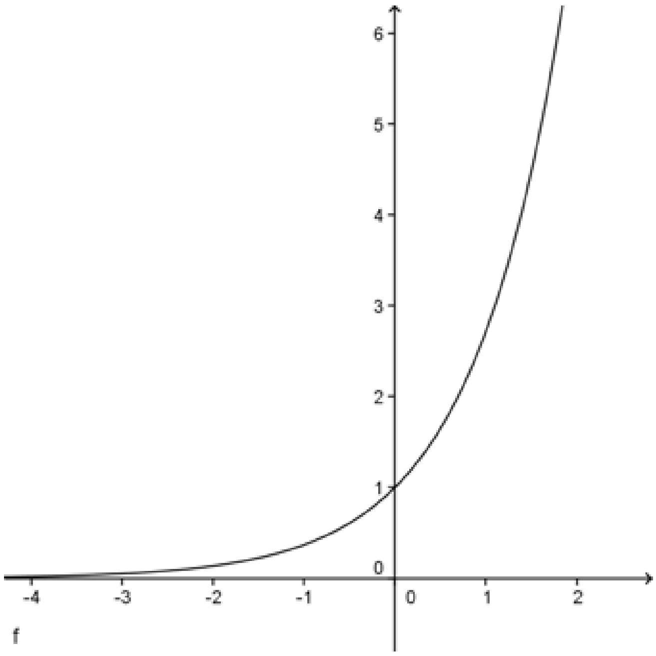

Figura 3: Gráfico $f(x) = e^x$.

Exemplo 6.3.1. Prove que $x = 3$ não é um extremo (máximo ou mínimo) relativo de

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x.$$

Solução: Note que $f'(x) = x^2 - 4$; assim, $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = \pm 2$ pelo teorema anterior, os possíveis extremos relativos de f são ± 2 e, portanto, $x = 3$ não é extremo relativo.

Exemplo 6.3.2. Prove que $f(x) = e^x$ não possui extremos relativos.

Solução: Basta notar que $f'(x) = e^x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e, do teorema anterior, segue que f não possui extremos relativos.

Vejamos agora um critério para determina dentre os pontos crítico de uma função diferenciável, quais são máximo relativos, mínimo relativo e quais não são extremos relativos.

Teste da derivação primeira. Seja $x = c$ um ponto crítico de f. Então:

(a) se $f'(x)$ muda o sinal de positivo para negativo quando nos movemos pelo ponto crítico $x = c$, então $x = c$ é um máximo relativo;

(b) se $f'(x)$ mudar de sinal de negativo para positivo quando nos movemos pelo ponto

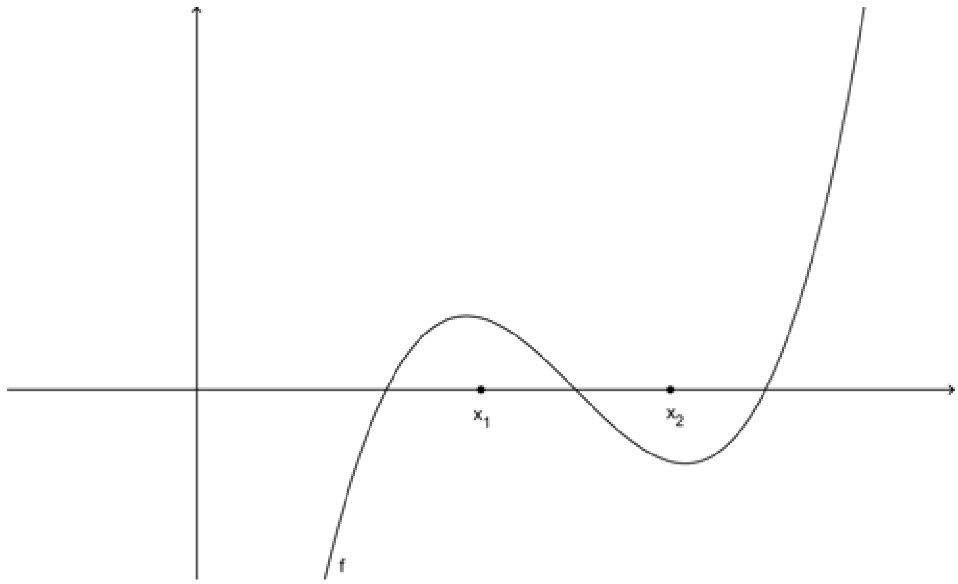

Figura 4: Gráfico

crítico $x = c$ então $x = c$ é um ponto de mínimo relativo;

(c) se $f'(x)$ não muda de sinal quando não movemos pelo ponto crítico $x = c$ então $x = c$ então é um extremo relativo.

Vejamos algumas aplicações deste teorema.

Exemplo 6.3.3. Encontre os máximos e mínimos da função $f(x) = x^2 - 4x$.

Solução: Note que $f'(x) = 2x - 4$; assim $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 2$. Logo $x = 2$ é o único ponto crítico de f. Como $f'(x) < 0$ para $x < 2$ e $f'(x) > 0$ para $x > 2$, pelo Teste da Derivada Primeira, segue que $x = 2$ é um mínimo relativo.

Exemplo 6.3.4. Encontre os máximos e mínimos relativos da função $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Solução: Note que

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}^2 = \frac{x^2 - 1}{x}^2 = \frac{(x+1).(x-1)}{x}^2;$$

assim, $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = \pm 2$. Vamos analisar o sinal de $f'(x)$. Como o sinal do denominador é sempre positivo em seu domínio, o sinal de $f'(x)$ é o sinal do numerador $(x+1).(x-1)$ que é positivo para $x \in (-\infty, -1)$ ou $x \in (1, \infty)$, e negativo para x em $(-1, 0)$ e $x \in (0, 1)$. Note que $x = 0$ não esta no domínio de f. Pelo Teste da Derivada Primeira, $x = 1$ é mínimo relativo e $x = -1$ é um máximo relativo.

Exemplo 6.3.5. Determine os extremo relativo de $f(x) = xe^x$.

Solução: Note que $f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$ e, como $e^x > 0$ para todo x em $\mathbb{R}$,

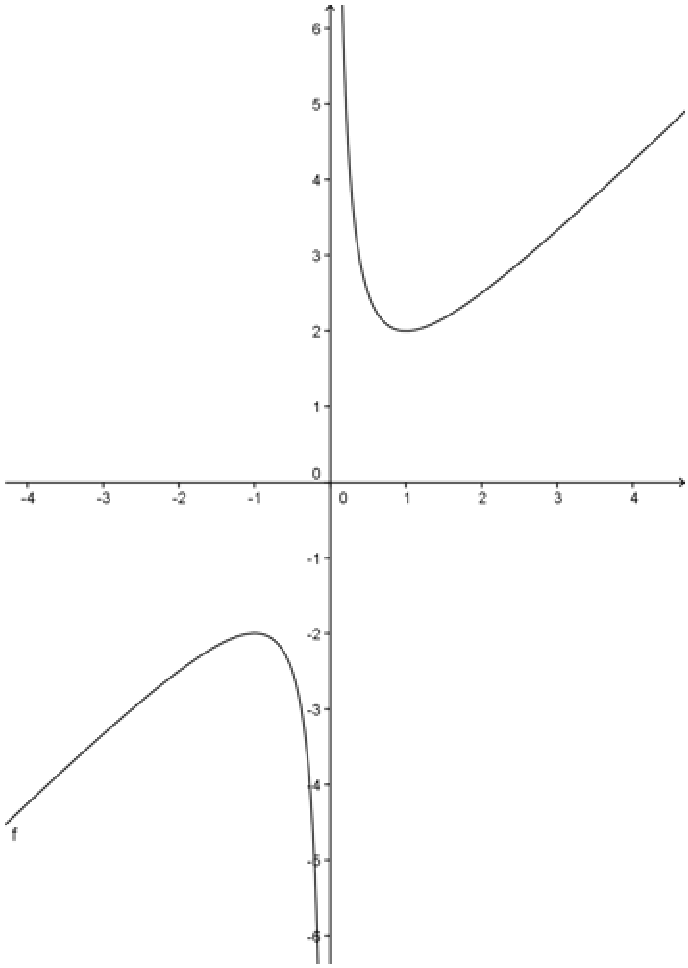

Figura 5: Gráfico de $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

temos que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1;$$

assim, $x = -1$ é o único ponto crítico de f, que, pelo Teste da Derivada Primeira, é um máximo relativo.

6.4 O Método da Derivada Segunda

Se f for uma função diferenciável, então sua derivada f' é, também, uma função. Logo, f' poderia ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$. Essa nova função f'' é chamada de derivada segunda de f, pois é a derivada da derivada de f.

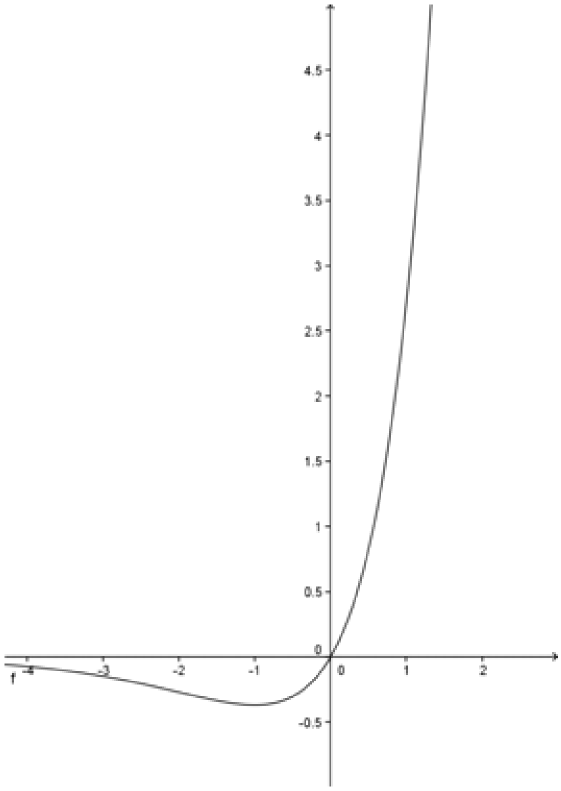

Figura 6: Gráfico de $f(x) = xe^x$.

Exemplo 6.4.1. Obtenha a derivada segunda de $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5$.

Solução: Pela regra de derivação de funções polinomiais

$$f'(x) = 6x^2 + 8x.$$

Note que f' também é uma função polinomial; donde,

$$f''(x) = (f'(x))' = 12x + 8.$$

Exemplo 6.4.2. Se $f(x) = xsenx$, calcule $f'(x)$ e $f''(x)$.

Solução: Aplicando a regra do produto

$$f'(x) = (x)'senx + x.(senx)' = 1.senx + x.(\cos x) = senx + x\cos x.$$

Para obter $f''(x)$, derivamos $f'(x)$ usando a regra da soma e do produto e obtemos

$$f''(x) = (senx + x.cosx)' = (senx)' + (x.cosx)' =$$

$$\cos x + (x)'\cos x + x.(\cos x)' = \cos x + '.\cos x + x.(-senx) = 2\cos x - xsenx.$$

Método da Derivada Segunda. Seja $x = c$ um ponto crítico de f e assuma que $f''(c)$ existe. Então:

(a) se $f''(c) < 0$ então $x = c$ é um máximo relativo;

(b) se $f''(c) > 0$ então $x = c$ é um ponto de mínimo relativo.

No caso em que $f''(c) = 0$ não podemos concluir que o ponto crítico $x = c$ seja um extremo relativo. Com efeito, a função $f(x) = x^3$ é tal que $f''(0) = 0$ e, no entanto, $x = 0$ não é um extremo relativo.

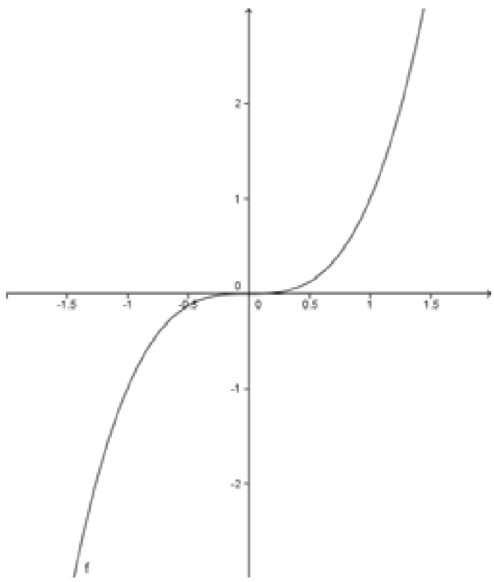

Figura 7: Gráfico de $f(x) = x^3$.

Por outro lado, a função $g(x) = x^4$ é tal que $g''(0) = 0$ e, neste caso, $x = 0$ é um mínimo relativo.

Exemplo 6.4.3. Usando o método da derivada segunda obtenha os extremos relativos de $f(x) = x^2 - 4x$.

Solução: No exemplo 6.3.3 vimos que $f'(x) = 2x - 4$ e que $x = 2$ é o único ponto crítico desta função. Como $f''(2) = 2 > 0$, pelo Método da Derivada Segunda, $x = 2$ é mínimo local.

Exemplo 6.4.4. Obtenha os extremos relativos de $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5$.

Solução: Vimos no exemplo 6.4.1 que $f'(x) = 6x^2 + 8x$ e $f''(x) = 12x + 8$; donde concluímos que os pontos críticos da função são os zeros de $6x^2 + 8x$, que são $x_1 = 0$ e $x_2 = \dfrac{-4}{3}$. como $f''(0) = 8 > 0$, temos, pelo Método da Derivada Segunda, que $x_1 = 0$

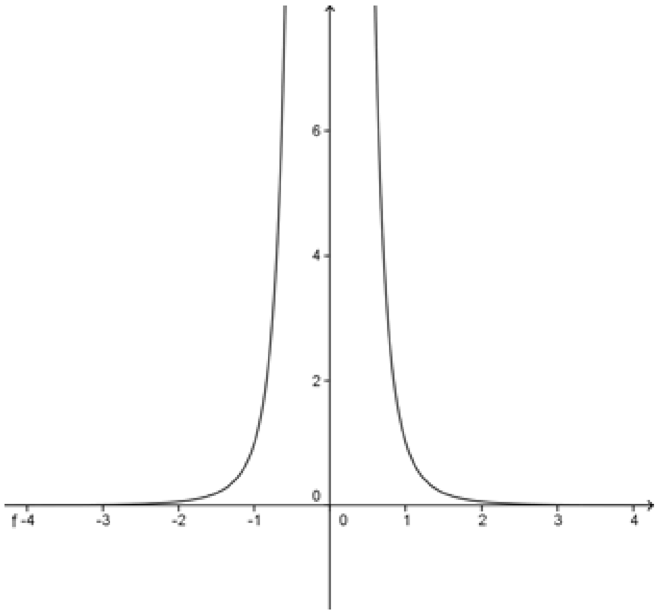

Figura 8: Gráfico de $f(x) = x^4$.

é mínimo relativo e, do fato de $f''(\frac{-4}{3}) = -8 < 0$, concluímos que $x_2 = \frac{-4}{3}$ é máximo relativo.

6.5 Conclusão

Concluímos desta aula que as derivadas primeira e segunda são cruciais na determinação dos pontos de máximos e mínimos relativos de uma função. Concluímos também que os intervalos de crescimento e decaimento de uma função estão relacionados com o sinal da derivada primeira.

6.6 Resumo

Vimos nessa aula que dada uma função diferenciável, os intervalos, os quais a função é crescente coincide com os intervalos onde a função tem derivada positiva e que a função é decrescente quando a derivada é negativa. Usando esse resultado formulamos o Teste da Derivada Primeira, o qual diz:

-se $f'(x)$ muda o sinal de positivo para negativo quando nos movemos por um ponto crítico $x = c$, então $x = c$ é um máximo relativo;

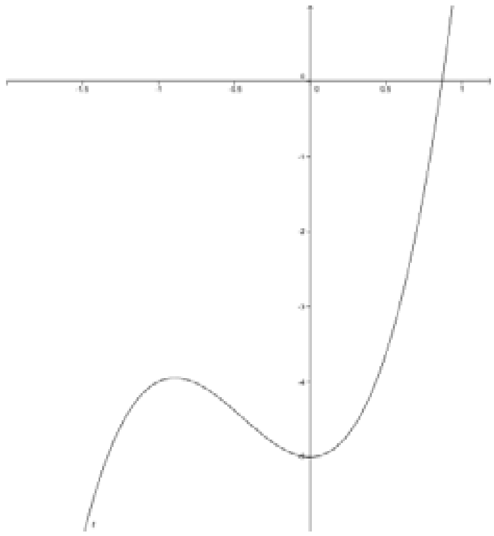

Figura 9: Gráfico de $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5$.

-se $f'(x)$ mudar de sinal de negativo para positivo quando nos movemos pelo ponto crítico $x = c$, então $x = c$ é um ponto de mínimo relativo;

-se $f'(x)$ não muda de sinal quando não movemos pelo ponto crítico $x = c$ então $x = c$ então é um extremo relativo.

Baseado na derivada segunda, vimos o Método da Derivadas Segunda, um método útil na determinação dos extremos relativos de uma função, o qual diz:

-se $f''(c) < 0$ então o ponto crítico $x = c$ é um máximo relativo;

-se $f''(c) > 0$ então o ponto crítico $x = c$ é um ponto de mínimo relativo.

6.7 Atividades

Atividade 6.7.1. Encontre os intervalos em que a função

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x$$

é crescente e os intervalos em que ela é decrescente. Determine seus extremos relativos.

Atividade 6.7.2. Obtenha as máximas e mínimo relativos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Atividade 6.7.3. Obtenha os as máximo e mínimo relativo de $f(x) = xe^{-x}$.

Atividade 6.7.4. Mostre que $x = 0$ é um ponto crítico de $f(x) = x^3$ que não é extremo relativo.

Atividade 6.7.5. Obtenha a derivada segunda de $f(x) = xcosx$.

6.8 Próxima aula

Na próxima aula, daremos um critério envolvendo o sinal da derivada segunda para determinar a concavidade e os pontos de inflexão do gráfico de uma dada função. Baseado nos assuntos dessa aula e neste critério, forneceremos um roteiro para esboço de gráficos.

6.9 Referências Bibliográficas

- STEWART, James. Cálculo. Editora Pioneira, 5º edição, volume 1;

- IEZZI, Gerson; MURAKAM, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos de Matemática Elementar 8. Editora Atual, 3º edição, 1985.

- TAN, S. T. Matemática Aplicada a Administração e Economia. Editora Thomson Learning, segunda edição, São Paulo, 2007.