UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA
PROGRAMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

PLANO DA SÉTIMA AULA

Nº da aula	**Título da aula**	**Metas**	**Objetivos**
7	O estudo da concavidade e esboço de gráficos.	Usando a derivada segunda, determinar a concavidade e os pontos de inflexão do gráfico da função. Esboçar gráficos.	O aluno deverá ser capaz, após esta aula, de determinar os intervalos nos quais a concavidade do gráfico da função está para baixo, para cima, e os pontos de inflexão; além de esboçar seus gráficos.

SÉTIMA AULA

Curso:LICENCIATURA EM BIOLOGIA

Professor-autor: FÁBIO DOS SANTOS

Disciplina: MATEMÁTICA BÁSICA

Número da unidade: 02

Número da aula: 07

Título da aula: O estudo da concavidade e esboço de gráficos.

Meta: Usando a derivada segunda, determinar a concavidade e os pontos de inflexão do gráfico da função. Esboçar gráficos.

Objetivos: O aluno deverá ser capaz, após esta aula, de determinar os intervalos nos quais a concavidade do gráfico da função está para baixo, para cima, e os pontos de inflexão; além de esboçar seus gráficos

Pré-requisito: Vestibular e aulas 01- 06.

7.1 Introdução

Embora, conforme vimos na aula anterior, o sinal da derivada de uma função f revele onde seu gráfico é crescente ou decrescente, ele não revela a direção da curvatura. Por exemplo, considere as funções

$$f(x) = x^3 \quad \text{e} \quad g(x) = x^{\frac{1}{3}}.$$

Note que o sinal da derivada de f, $f'(x) = 3x^2$, e o da derivada de g,

$$g'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

coincidem. Isto mostra que, apenas estudando o sinal da primeira derivada não é possível esboçar gráficos com precisão.

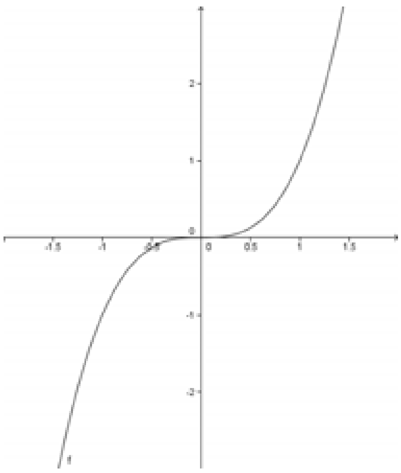

Figura 1: Gráfico de $f(x) = x^3$.

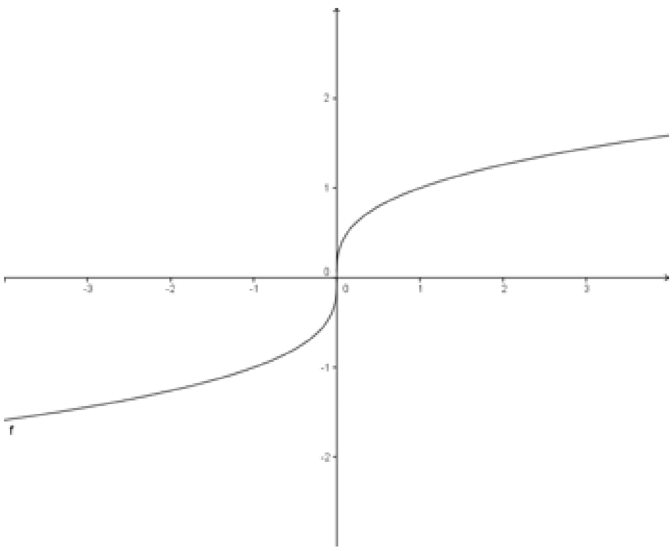

Figura 2: Gráfico de $f(x) = x^{1/3}$.

O que diferenciam os gráficos de f e g é a concavidade, que será fornecido em termos do sinal da derivada segunda, a qual definiremos nessa aula. O assunto das seções 7.2 e 7.3 será útil na seção seguinte, onde forneceremos um algorítimo para esboçar gráfico de funções que possuem derivadas de segunda ordem.

Em numerosas ocasiões, o gráfico de uma função é de grande auxílio para visualização de suas propriedades, pois fornece num relance, um resumo de todas as informações captadas pela função.

O gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ é, por definição, o conjunto de pontos (x, y) do plano cartesiano tais que $x \in D$ e $y = f(x)$. Note que, usando apenas a definição seria basicamente impossível fazer com precisão, esboço de gráficos de funções não-triviais. Nessa aula, usando as ferramentas estudadas nas aulas 01-06 e mais o estudo da concavidade, apresentaremos um roteiro para esboçar de gráficos. Tal roteiro, faz uso da noção de limites e do cálculo diferencial.

7.2 O estudo da concavidade

Se f for diferenciável em um intervalo aberto I, então f é dita ser côncava para cima em I se f' for crescente em I, e côncava para baixo se f' for decrescente em I. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ é côncava para cima em $(0, +\infty)$ e para baixo em $(-\infty, 0)$, já que $f'(x) = 3x^2$ é crescente em $(0, +\infty)$ e decrescente em $(-\infty, 0)$. Já a função $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ é côncava para cima em $(-\infty, 0)$ e côncava para baixo em $(0, +\infty)$ pois $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{x^2}}$ é crescente em $(-\infty, 0)$ e decrescente em $(0, +\infty)$. Note que a concavidade de f e g diferencia seus gráficos.

Para efeito de aplicações, vamos determinar uma forma de obter os intervalos onde f' é crescente e decrescente. Esse método é sintetizado no seguinte teorema:

Teorema. Seja f duas vezes diferenciável em um intervalo aberto I. Então:

(a) se $f''(x) > 0$ em I, então f tem concavidade para cima em I;

(b) se $f''(x) < 0$ em I, então f tem concavidade para baixo em I.

Vamos agora, ver algumas aplicações desse teorema:

Exemplo 7.2.1. Prove que dada uma função polinomial do segundo grau

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

temos que f é côncava para cima se $a > 0$ e côncava para baixo se $a < 0$.

Solução: Note que $f'(x) = 2ax + b$ e $f''(x) = 2a$; assim, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow a > 0$ e $f''(x) < 0 \Leftrightarrow a < 0$ e, pelo teorema anterior, concluímos que f é côncava para cima se $a > 0$ e côncava para baixo se $a < 0$.

O exemplo acima mostra que $f(x) = x^2$ é côncava para cima e $g(x) = -x^2$ é côncava para baixo.

Exemplo 7.2.2. Estude a concavidade da função $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$.

Solução: Pela regra de derivação de funções polinomiais temos que

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$$

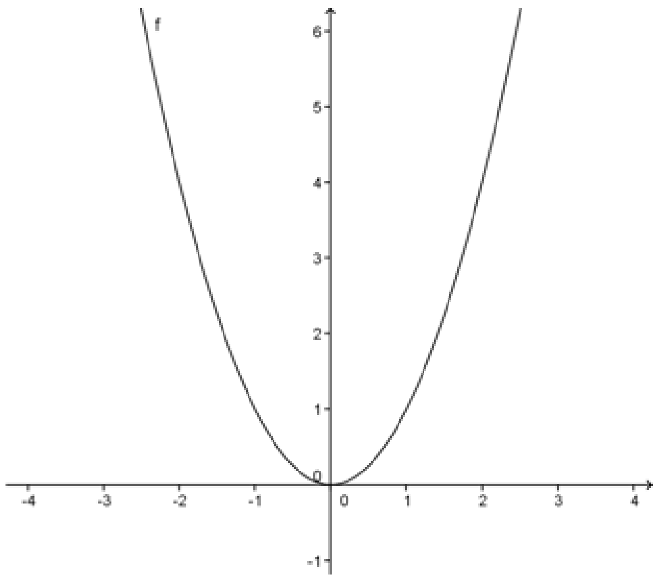

Figura 3: Gráfico de $f(x) = x^2$.

e

$$f''(x) = 6x - 6;$$

assim,

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

e

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Logo, a função tem concavidade para cima em $(1, +\infty)$ e para baixo em $(-\infty, 1)$.

Exemplo 7.2.3. Estude a concavidade de $f(x) = x.e^{-x}$.

Solução: Usando a regra do produto e da cadeia obtemos

$$f'(x) = (x)'.e^{-x} + x.(e^{-x})' = 1.e^{-x} + x.e^{-x}.(-x)' = e^{-x} - x.e^{-x} = (1 - x).e^{-x}$$

e

$$f''(x) = (1 - x)'e^{-x} + (1 - x).(e^{-x})' = -1.e^{-x} + (1 - x).e^{-x}.(-x)' =$$

$$-e^{-x} - (1 - x).e^{-x} = (-2 + x).e^{-x}.$$

Desde que $e^{-x} > 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -2 + x > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

e

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow -2 + x < 0 \Leftrightarrow x < 2.$$

Pelo teorema anterior, a concavidade de f é para cima em $(2, +\infty)$ e para baixo em $(-\infty, 2)$.

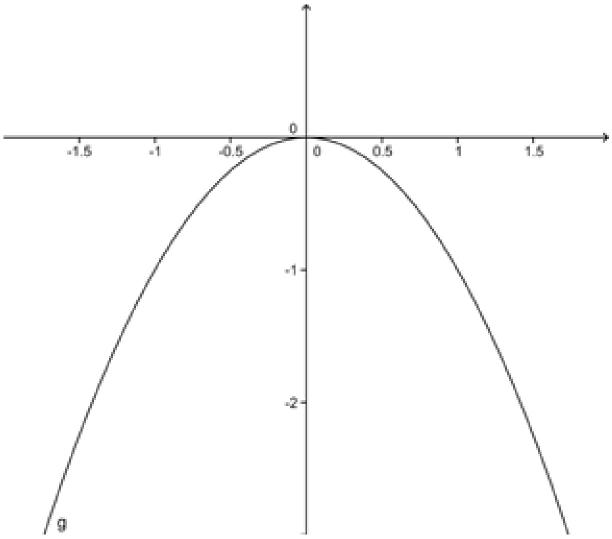

Figura 4: Gráfico de $g(x) = -x^2$.

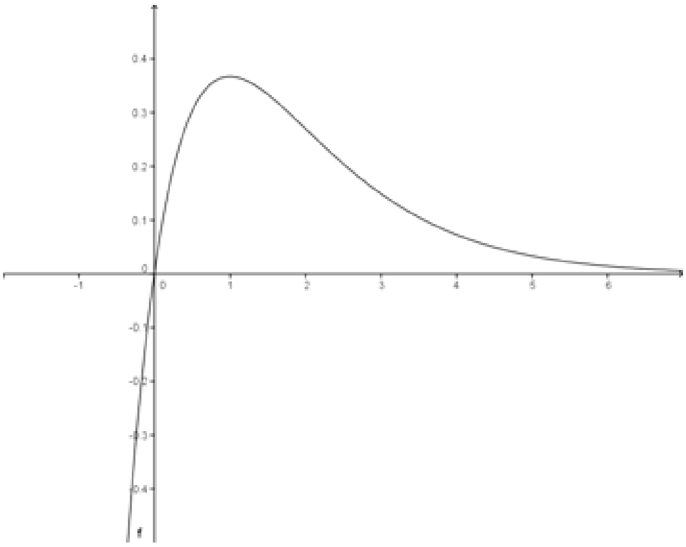

Figura 5: Gráfico de $f(x) = x.e^{-x}$.

7.3 Pontos de inflexão

Um ponto de inflexão é um ponto no qual o gráfico da função muda de concavidade. Por exemplo, considere a função $f(x) = x^3$ e note que f muda de concavidade na origem, assim é um ponto de inflexão.

Os procedimentos a seguir, podem ser usados para encontrar pontos de inflexão de funções diferenciáveis.

Passo 1: Calcule $f''(x)$;

Passo 2: Determine os pontos do domínio de f para os quais $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ não existe;

Passo 3: Determine o sinal de $f''(x)$ à esquerda e à direita de cada ponto $x = c$ encontrado no passo 2. Se houver uma mudança de sinal de $f''(x)$ quando passamos por $x = c$, então $(c, f(c))$ é um

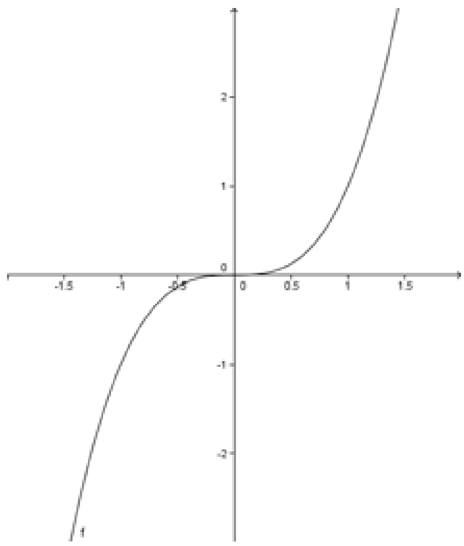

Figura 6: Gráfico de $f(x) = x^3$: a origem é um ponto de inflexão.

ponto de inflexão de f.

Exemplo 7.3.1. Obtenha, se existir, os pontos de inflexão de $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ e $g(x) = x^4$.

Solução: De acordo com a regra de derivação de potências, temos que

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad g'(x) = 4x^3$$

e que

$$f''(x) = \frac{1}{3}.(\frac{-2}{3})x^{\frac{-2}{3}-1} = \frac{-2}{9}x^{\frac{-5}{3}} = \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x^2}}, \quad g''(x) = 12x^2.$$

O passo 1 está feito, vamos ao passo 2. Note que $f''(x)$ não existe para $x = 0$ e, para os demais valores de x existe e é não nulo; assim, o único possível ponto de inflexão de f é $x = 0$. Como $f''(x) > 0$ para $x > 0$ e $f''(x) < 0$ para $x < 0$, segue que realmente $x = 0$ é um ponto de inflexão de f.

Já para $g(x)$, $g''(x)$ sempre existe e $g''(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$; assim, o único possível ponto de inflexão de g é $x = 0$. Neste caso, $x = 0$ não é um ponto de inflexão, pois $g''(x) = 12x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$.

Atividade 7.3.1. Obtenha os pontos de inflexão de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 6$.

Exemplo 7.3.2. Prove que toda função polinomial de grau 3 tem exatamente um ponto de inflexão.

Solução: Seja

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$$

uma função polinomial de grau 3. Note que

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

e

$$f''(x) = 6ax + 2b.$$

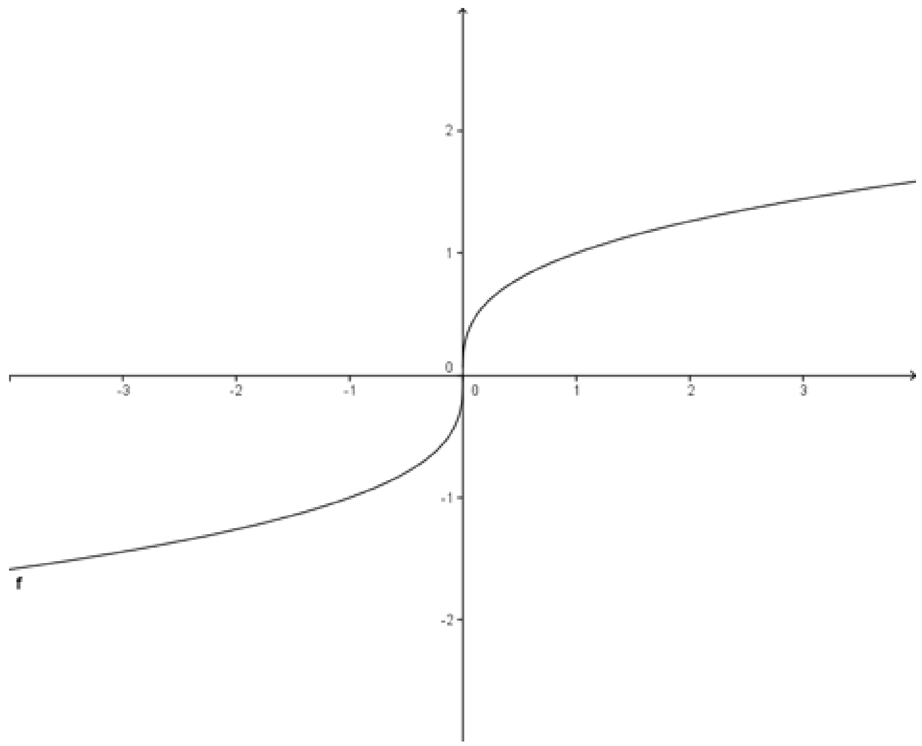

Figura 7: Gráfico de $f(x) = x^{1/3}$: a origem não é um ponto de inflexão.

e portanto,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2b}{6a}.$$

Mas,

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{-2b}{6a}$$

e

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{-2b}{6a};$$

assim, $x = \dfrac{-2b}{6a}$ corresponde a um ponto de inflexão de f.

Exemplo 7.3.3. Dada

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

(a) calcule $f''(x)$;

(b) estude a concavidade de f;

(c) determine os pontos de inflexão de f.

Solução: (a) A derivada primeira de f édada por

$$f'(x) = [(x^2 + 1)^{-1}] = -1(x^2 + 1)^{-1-1}.(x^2 + 1)' = -2x.(x^2 + 1)^{-2}.$$

A seguir, usando a regra do quociente, obtemos:

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^4}.$$

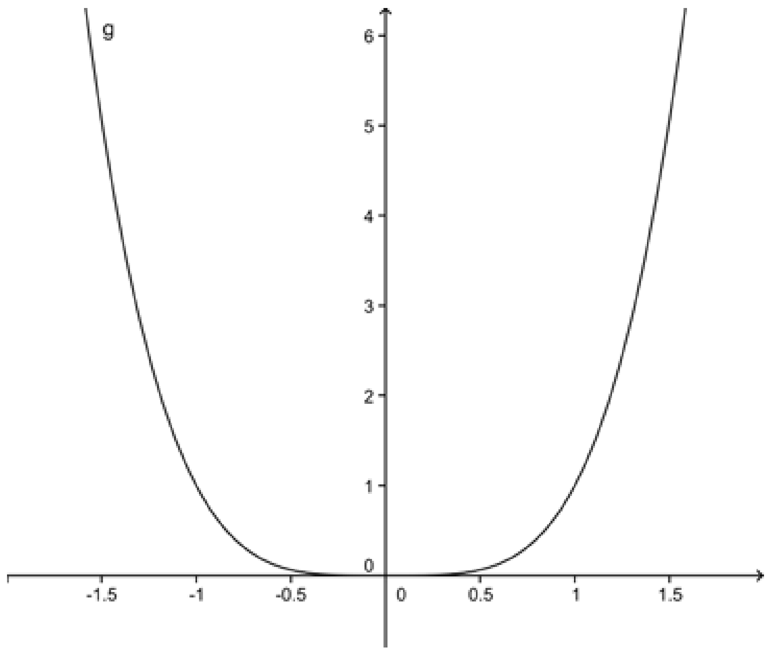

Figura 8: Gráfico de $f(x) = x^4$: a origem não é um ponto de inflexão.

(verifique isso!)

(b) Note que o denominador de $f''(x)$ é sempre positivo; assim,

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2(3x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x < \frac{-\sqrt{3}}{3} ou x > \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2(3x^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2(3x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Logo, f tem concavidade para cima em $(-\infty, \frac{-\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, para baixo em $(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ e $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ são os pontos de inflexão de f.

7.4 Esboço de Gráficos

Caro aluno, é muito importante que usando o roteiro fornecido nesta seção, você resolva bastante exercícios envolvendo esboço de gráfico de funções, já que, faz-se para tal, uso de assuntos de várias aulas vistas previamente.

O roteiro que segue, pretende servir como um guia para esboçar o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$. Nem todos os itens são relevantes para cada função, mas o roteiro fornece todos as informações necessárias para fazer um esboço que mostre os aspectos mais importantes da função.

Passo 1: Determine o domínio de f.

É frequentemente proveitoso começar determinando o domínio de f, isto é, o conjunto de valores de x para as quais $f(x)$ está definida.

Passo 2: Encontre os valores onde f intercepta os eixos x e y.

A equação $f(x) = 0$ pode ser de difícil resolução; assim, pode se omitir esta etapa se necessário.

Passo 3: Determine as assíntotas horizontais e verticais.

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ então a reta $y = L$ é dita uma assíntota horizontal do gráfico de f. Se resultar $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ então não há horizontais. Estas informações são úteis no esboço dos gráficos.

A reta $x = a$ é uma assíntota vertical se quando aproximamos de $x = a$ por valores maiores ou menores que a, a função cresce ou decresce ilimitadamente.

Passo 4: Determine os intervalos de crescimento e decrescimento.

Pelo que vimos na sexta aula, é necessário e suficiente estudar o sinal de $f'(x)$, pois

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f \text{é crescente em } I$$

e

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow f \text{é decrescente em } I.$$

Passo 5: Encontre os máximos e mínimos locais.

Para esse passo, usando as informações do passo 4, use o Teste da Derivada Primeira para determinar tais extremos. Se a análise do sinal da derivada da função for complicado, use o Método da Derivada Segunda.

Passo 6: Estude a concavidade de f.

Para este passo, calcule $f''(x)$ e estude seu sinal, já que, pelo que vimos na seção 7.2,

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow f \text{ tem concavidade para cima}$$

e

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow f \text{ tem concavidade para baixo.}$$

Passo 7: Encontre os pontos de inflexão de f.

Para obter os pontos de inflexão ,use o estudo do sinal da derivada segunda obtido no passo 6, já que os pontos de inflexão ocorrem quando a concavidade muda a direção, conforme seção 7.3.

Passo 8: Faça o esboço do gráfico.

Use os passos 01-07. Coloque as assíntotas como linhas tracejadas. Marque os interceptos, pontos de máximo, mínimo e de inflexão. Então faça a curva passar por esses pontos, subindo ou descendo de acordo com o passo 04. Com a concavidade de acordo com o passo 06 e tendendo às assíntotas.

Vamos agora fazer alguns esboços de gráficos de funções passo-a-passo, de acordo com o roteiro fornecido anteriormente.

Exemplo 7.4.1. Esboce o gráfico da função $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

Solução: Seguiremos o roteiro anterior.

Passo 1: Desde que f é uma função polinomial, temos que seu domínio é o conjunto dos números reais.

Passo 2: Fazendo $x = 0$, deduziremos que a intersecção com o eixo y é $f(0) = 2.0^3 - 3.0^2 = 0$. Por outro lado,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 ou 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 ou x = \frac{3}{2};$$

assim, o gráfico de f intercepta o eixo x quando $x = 0$ e quando $x = \frac{3}{2}$.

Passo 3: Como

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

temos que f não possui assíntotas horizontais. Desde que f é polinomial, é contínua e, portanto,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(x),$$

donde segue que f não possui assíntotas verticais.

Passo 4: Como

$$f'(x) = 2.3x^2 - 3.2x = 6x^2 - 6x,$$

temos que

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x > 0 \Rightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) ou x \in (1, +\infty)$$

e

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1);$$

assim, f é crescente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(1, +\infty)$ e decrescente em $(0, 1)$.

Passo 5: Note que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 ou x = 1$. Usando as informações do passo 4 e o teste da derivada primeira vemos que $x = 0$ é máximo local e $x = 1$ é mínimo local.

Passo 6: Usando a derivada primeira calculada no passo 4, temos que

$$f''(x) = 6.2x - 6 = 12x - 6;$$

assim,

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

e

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 12x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}.$$

Portanto, f tem concavidade para cima no intervalo $(\frac{1}{2}, +\infty)$ e para baixo em $(-\infty, \frac{1}{2})$.

Passo 7: Note que $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ e, pelo passo anterior, f'' muda de sinal em $x = \frac{1}{2}$. Logo $x = \frac{1}{2}$ é ponto de inflexão.

Passo 8: Com base nas informações obtidas nos passos 1-7 podemos concluir que o gráfico de f tem a forma dada na figura 9.

Exemplo 7.4.2. Faça um esboço do gráfico de

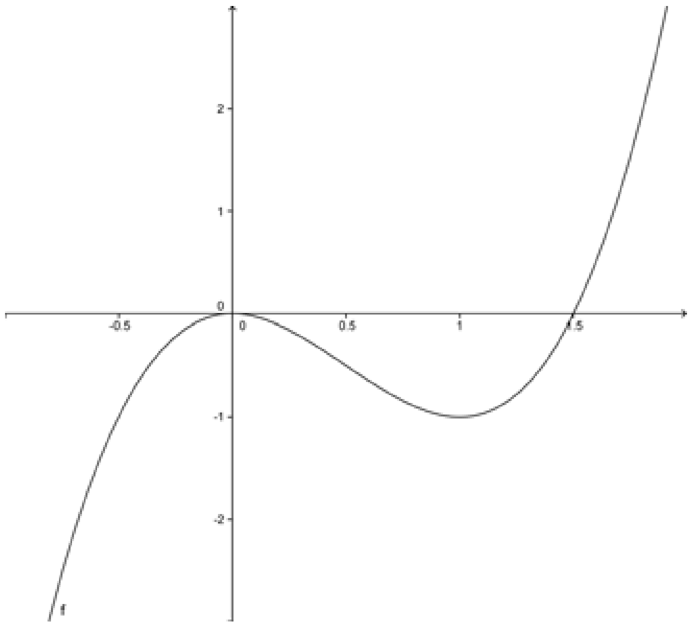

Figura 9: Gráfico de $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

Solução: Faremos os passos sugeridos nesta seção.

Passo 1: O domínio de f é $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}/x \neq \pm 1\} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

Passo 2: Desde que

$$f(0) = 0\frac{2}{0^2 + 1} = 0,$$

temos que o gráfico de f intercepta o eixo y na origem e, como

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x\frac{2}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

temos que a intersecção com o eixo x ocorre na origem também.

Passo 3: Como

$$\lim_{x\to\infty} x\frac{2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\frac{2}{x}^{2}}{\frac{x^2-1}{x}^{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}^{2}} = 1$$

e que

$$\lim_{x\to-\infty} x\frac{2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}^{2}} = 1,$$

temos que $y = 1$ é uma assíntotas horizontal de f. Para $x \neq \pm 1$ temos que f é contínua e, portanto,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Para $x = \pm 1$ temos que:

1. quando x se aproxima de 1 por valores maiores que 1, a função cresce ilimitadamente;
2. quando x se aproxima de 1 por valores menores que 1, a função decresce ilimitadamente;
3. quando x se aproxima de -1 por valores maiores que -1, a função decresce ilimitadamente;
4. quando x se aproxima de -1 por valores maiores que -1, a função cresce ilimitadamente;

Logo as retas $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais.

Passo 4: Como

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x^2-1) - x^2(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^2-1) - x^2(2x)}{(x^2-1)^2} = -2\frac{x}{(x^2-1)^2}$$

temos que

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 (x \neq -1)$$

e

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0 (x \neq 1).$$

Portanto, f é crescente em $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0)$ e decrescente em $(0, 1)$ e $(1, \infty)$.

Passo 5: Note, do cálculo de f' feito no passo anterior, que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e, como $f'(x) > 0$ em $(-1, 0)$ e $f'(x) < 0$ em $(0, 1)$ temos, do Teste da Derivada Primeira, que $x = 0$ é máximo local.

Passo 6: Desde que, do passo 04,

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

temos que

$$f''(x) = \frac{(-2)'(x^2-1)^2 - (-2x)[(x^2-1)^2]'}{(x^2-1)^4} = \frac{-2(x^2-1)^2 + 2x.2(x^2-1).2x}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{(x^2-1)[-2(x^2-1) + 8x^2]}{(x^2-1)^4} = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}.$$

Desde que $6x^2 + 2 > 0$ temos que

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 e \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) ou x \in (1, \infty)$$

e

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1).$$

Portanto, o gráfico de f tem concavidade para cima em $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$ e concavidade para baixo no intervalo $(-1, 1)$.

Passo 7: Desde que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in D(f)$, temos que f não possui pontos de inflexão.

Passo 8: Pela informação obtidas nos passos 01-07 temos que o gráfico de f tem a forma dada na figura 10.

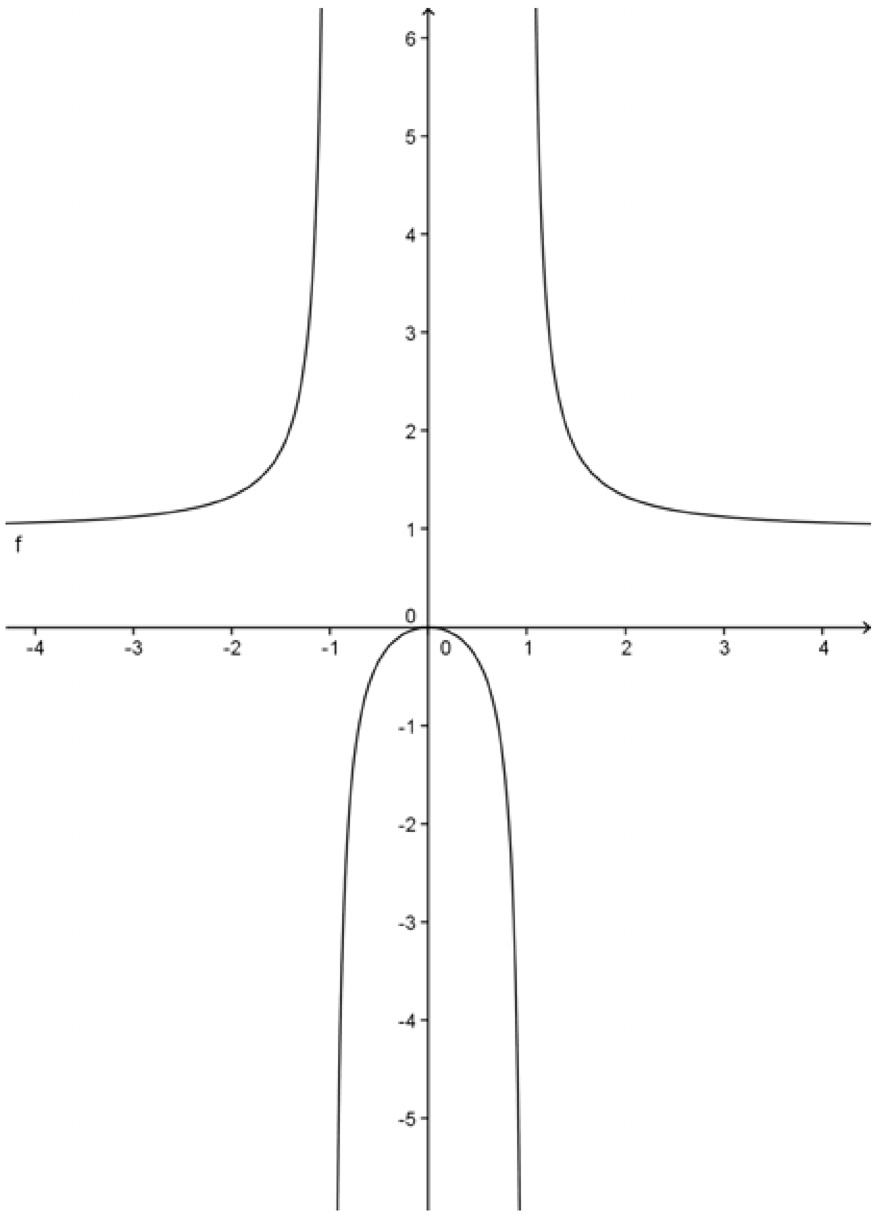

Figura 10: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

7.5 Conclusão

Desta aula, concluímos que para esboçar gráficos de funções com precisão é necessário conhecimentos do cálculo diferencial, em particular, conhecermos as derivadas primeira e segunda. O sinal da primeira está relacionada com os intervalos de crescimento e decaimento da função, enquanto a segunda passa as informações sobre a concavidade.

7.6 Resumo

Vimos nessa aula que o sinal da derivada segunda está estritamente relacionado com a concavidade do gráfico da função. Mais precisamente, se f for uma função duas vezes diferenciável em um intervalo aberto I, então f tem concavidade para cima em I, se e somente se $f''(x) > 0$ em I. A concavidade está para baixo se, e somente se, $f''(x) < 0$.

Vimos também que os pontos onde o gráfico da função muda de concavidade são os pontos de inflexão e podem ser determinados estudando o sinal da derivada segunda próximo dos pontos onde a derivada segunda se anula.

Na seção 7.4 vimos um roteiro que serve como guia no esboço de gráficos de funções. Tal roteiro tem os passos:

Passo 1: Determine o domínio de f.

Passo 2: Encontre os valores onde f intercepta os eixos x e y.

Passo 3: Determine as assíntotas horizontais e verticais.

Passo 4: Determine os intervalos de crescimento e decrescimento.

Passo 5: Encontre os máximos e mínimos locais.

Passo 6: Estude a concavidade de f.

Passo 7: Encontre os pontos de inflexão de f.

Passo 8: Faça o esboço do gráfico.

Usando esses passos fizemos esboço de vários gráficos.

7.7 Atividades

Atividade 7.7.1. Faça um Esboço do gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 + x$.

Atividade 7.7.2. Faça um esboço do gráfico da função

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

Atividade 7.7.3. Faça um esboço do gráfico de $f(x) = xe^x$.

Solução da atividade 7.7.3: Resolveremos usando os passos sugeridos nesta aula.

Passo 1 : $D(f) = R$.

Passo 2: Como $f(0) = 0$ e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, temos que a interseção com os eixos ocorre apenas na origem;

Passo 3: Desde que $\lim\limits_{x\to\infty} xe^x = \infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, temos que o eixo x é uma assíntota horizontal. Uma vez f é contínua, ela não possui assíntota vertical;

Passo 4: Como $f'(x) = (x)'e^x + d(x)(e^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$ e $e^x > 0$ para todo $x \in R$, temos que

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1 \quad \text{e} \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

Portanto, f é crescente em $(-1, \infty)$ e decrescente em $(-\infty, 1)$;

Passo 5: Pelos cálculos do passo 4 e pelo teste da derivada primeira temos que $x = 0$ é mínimo local;

Passo 6: Como $f'(x) = (x+1)e^x$, temos que

$$f''(x) = (x+1)'e^x + (x+1)(e^x)' = 1e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$$

e assim,

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > -2 \quad \text{e} \quad f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2.$$

Logo, f tem concavidade para cima no intervalo $(-2, \infty)$ e para baixo em $(-\infty, -2)$;

Passo 7: Como $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ e, pelo passo 5, f'' muda de sinal em $x = -2$, temos que $x = -2$ e ponto de inflexão;

Passo 8: Veja o gráfico de f na figura 11.

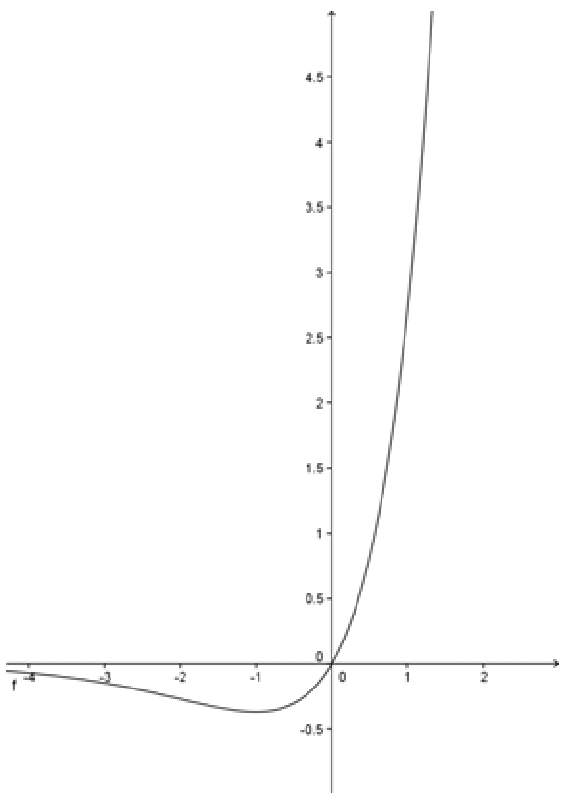

Figura 11: Gráfico de $f(x) = xe^x$.

7.8 Próxima aula

Na próxima aula passaremos ao estudo do Cálculo Integral. No entanto, não podemos esquecer o Cálculo Diferencial, já que há um elo de ligação entre as duas teorias dado pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

7.9 Referências Bibliográficas

- STEWART, James. Cálculo. Editora Pioneira, 5º edição, volume 1;

- IEZZI, Gerson; MURAKAM, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos de Matemática Elementar 8. Editora Atual, 3º edição, 1985.

- TAN, S. T. Matemática Aplicada a Administração e Economia. Editora Thomson Learning, segunda edição, São Paulo, 2007.