UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA
PROGRAMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

PLANO DA OITAVA AULA

Nº da aula	**Título da aula**	**Metas**	**Objetivos**
08	A integral de Riemann.	Definir a integral de Riemann, interpreta-la geometricamente e estabelecer propriedades.	Ao final da aula, o aluno deverá ser capaz de calcular a área de regiões delimitadas por algumas funções usando a definição e interpretação da integral ou propriedades.

OITAVA AULA

Curso:LICENCIATURA EM BIOLOGIA

Professor-autor: FÁBIO DOS SANTOS

Disciplina:

Número da unidade: 02

Número da aula: 08

Título da aula:A integral de Riemann.

Meta: Definir a integral de Riemann, interpreta-la geometricamente e estabelecer propriedades.

Objetivos: Ao final da aula, o aluno deverá ser capaz de calcular a área de regiões delimitadas por algumas funções usando a definição e interpretação da integral ou propriedades.

Pré-requisito: Vestibular e aulas 01- 07.

8.1 Introdução

A integral de Riemann, criada por Bernhad Rienann, foi a primeira definição rigorosa de integral de uma função real definida num intervalo. Apesar de historicamente, ter surgido da necessidade de calcula área de figuras planas, ela está envolvida em diversos situações tais como:

-usando a taxa segundo o geral o óleo vazo de tangue encontramos a quantidade que vazam durante certo período;

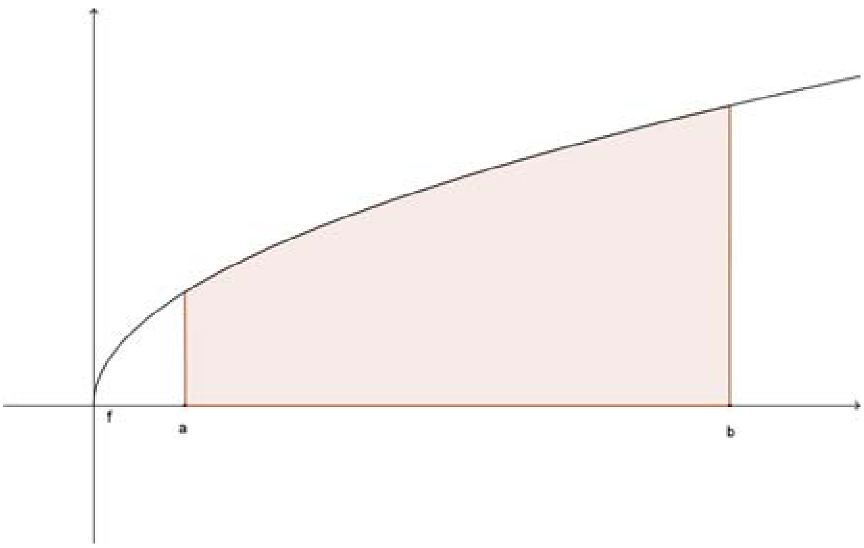
-usado a leitura do velocímetro do ônibus espacial Endeavour podemos calcular a altura atingida por ele em um dado instante;

-usando o conhecimento da potência consumida encontramos a energia usada durante um dado dia em São Francisco.

Nas aulas 03-07, aprendemos noções de calculo diferencial que lidam com o problema de se definimos a taxa de relação de uma quantidade em relação a outra, podemos definimos a relação entre as duas quantidade? A ferramenta principal utilizada no estudo do calculo integral é a antiderivada de uma função, a qual faz-se sentido do fato de existir um elo entre o cálculo deferencial e o cálculo integral dado pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

8.2 O Problema da Área

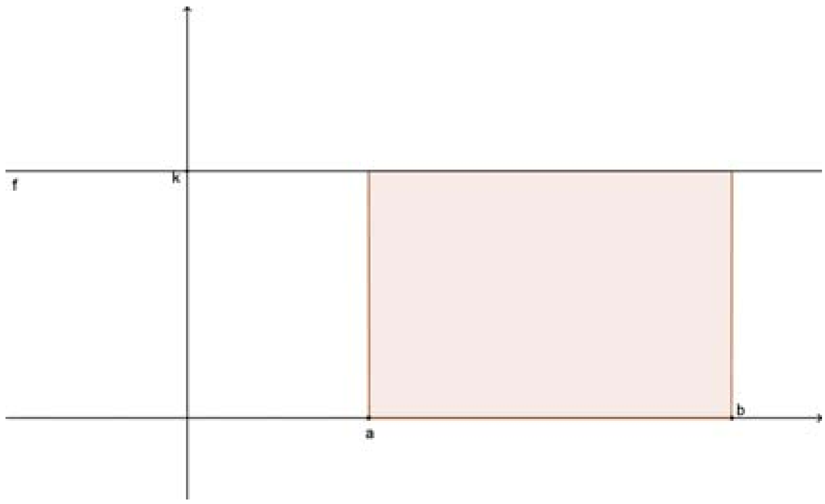
Consideremos o problema de calculo a área da região delimitada pelo gráfico de uma função não-negativa f, o eixo x e as linhas verticais $x = a$ e $x = b$.



Essa área A é chamada área sobre o gráfico de f no intervalo $[a, b]$.

Admitido conhecida a noção da intuitiva de área de uma figura plana e ainda, que a área de um retângulo de base b e altura h é $b.h$, vamos descrever um processo para determina A.

Se $f(a)$ fosse constante e igual a k em $[a, b]$, a área procurada será a área de um retângulo de altura k e base $b - a$; assim, $A = k.(b - a)$.



Se $f(a)$ não é constante, dividimos o intervalo $[a, b]$ em sub-intervalos suficientemente pequeno para que neles $f(a)$ passa ser considerado constante, com uma boa aproximação. Em cada sub-intervalo podemos calcular, aproximadamente, a área sob o gráfico, calculando a área do pequeno retângulo que fica determinado quando supomos $f(x)$ constante, a área A procurada será, aproximadamente, a soma das área destes retângulo. Quanto maior o número de sub-intervalos, melhor será a aproximação para a área. Com isso, usando a notação de limites, visto na segunda aula, temos que

$$A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)]\Delta x,$$

onde $x_1, x_2, ..., x_n$ são pontos arbitrários pertencentes aos n sub-intervalos de $[a, b]$ de comprimento $\Delta x = \dfrac{(b - a)}{n}$.

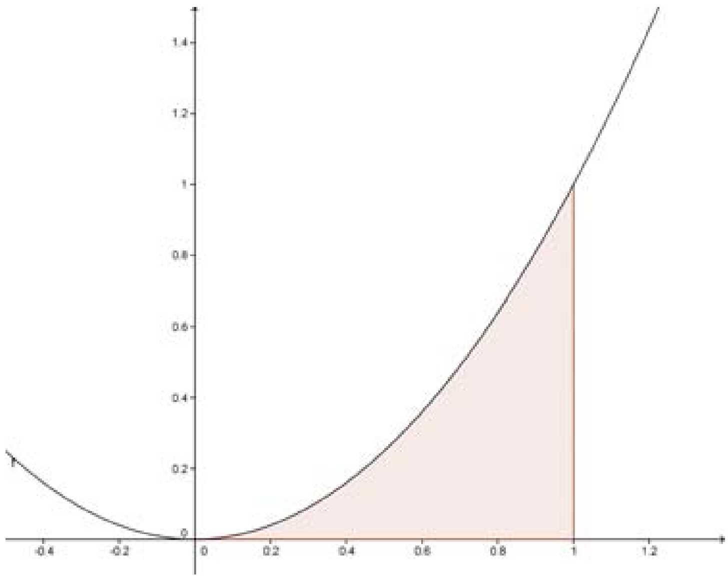
Exemplo 8.2.1. Seja $f(x) = x^2$ e considere a região R sob o gráfico de f no intervalo $[0, 1]$.

Para obtermos uma boa aproximação da área A de R, construímos quatro retângulo não justapostos, dividindo o intervalo $[0, 1]$ em quatro subintervalos

$$[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], [\frac{3}{4}, 1]$$

de mesmo comprimento $\dfrac{1}{4}$. Em seguida, construímos quatro retângulos com esses subintervalos como base e com altura dadas pelos valores da função nos pontos médio

$$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$$



de cada intervalo. Então cada um desses retângulo tem largura $\frac{1}{4}$ e altura

$$f(\frac{1}{8}), f(\frac{3}{8}), f(\frac{5}{8}), f(\frac{7}{8})$$

respectivamente. Pelo que foi visto anteriormente

$$A \approx \frac{1}{4}f(\frac{1}{8}) + \frac{1}{4}f(\frac{3}{8}) + \frac{1}{4}f(\frac{5}{8}) + \frac{1}{4}f(\frac{7}{8})$$

$$A \approx \frac{1}{4}[(\frac{1}{8})^2 + (\frac{3}{8})^2 + (\frac{5}{8})^2 + (\frac{7}{8})^2]$$

$$A \approx \frac{21}{64} = 0,328125$$

Futuramente, veremos que a área procurada é exatamente $\frac{1}{3}$.

8.3 A Integral Definida

Seja f uma função definida em $[a, b]$. Se

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x]$$

existe para todos as escolhas de pontos $x_1, x_2, ..., x_n$ nos n sub intervalo de $[a, b]$ de igual comprimento $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, então esse limite é chamado integral definida de f de a até b e é denotado por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Assim,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x].$$

No caso em que f não é negativa, pelo que vimos na seção anterior, a integral definida fornece a área sob o gráfico de f em $[a, b]$. Este fato fornece uma interpretação geométrica da integral definida.

Quando definimos a integral

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

implicitamente assumimos que $a < b$. Mas a definição com soma de Riemann faz sentido, mesmo que $b < a$. Neste caso temos

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_{af}^b (x)\,dx.$$

Mesmo no caso $a = b$ a definição faz sentido e, neste caso,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Exemplo 8.3.1. Pelo exemplo 8.2.1 temos que

$$\int_1^0 x^2\,dx \approx -0,328125.$$

A soma

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x$$

é chamada de soma de Riemann, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann (1826-1866).

Um questão natural que surge é: dada uma função f definida num intervalo $[a, b]$, f é integrável? Um critério que é útil é o seguinte:

Teorema: Se f é contínua em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

8.4 Propriedades da Integral Definida

Vamos, na continuação, citar algumas propriedade importantes da integral definida.

P1: $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, onde c é uma constante;

P2: soma de funções integráveis é integrável, além disso,

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

Figura 1: Foto de Riemann .

P3: produto de constante por função integrável é integrável, além disso,

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx;$$

P4: diferença de funções integráveis é integrável, além disso,

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx;$$

P5: $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, onde $a \leq c \leq b$;

P6: se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$ então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

P7: se $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx;$$

P8: se $m \leq f(x) \leq M$ para todo x em $[a, b]$, então

$$m.(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b-a).$$

Vejamos agora algumas aplicações dadas propriedades.

Exemplo 8.4.1. Usando propriedades da integral, estime

$$I = \int_0^1 (5+2x^2)dx.$$

Solução: Pela propriedade P2

$$I = \int_0^1 5dx + \int_0^1 2x^2 dx.$$

Por P1

$$\int_0^1 5dx = 5.(1-0) = 5;$$

assim,

$$I = 5 + \int_0^1 2x^2 dx.$$

Usando a propriedade P3

$$I = 5 + 2.\int_0^1 x^2 dx.$$

Pelo exemplo 8.3.1 temos que

$$\int_0^1 x^2 dx \approx 0,328125;$$

assim,

$$I \approx 5 + 2.0,328125 = 5,65625.$$

Exemplo 8.4.2. Sabendo que

$$\int_1^2 (5+2x^2)dx \approx 9,67,$$

estime

$$\int_0^2 (5+2x^2)dx.$$

Solução: Vimos no exemplo 8.4.1 que

$$\int_0^1 (5+2x^2)dx \approx 5,65625.$$

Usando a propriedade P5

$$\int_0^2 (5 + 2x^2)\,dx = \int_0^1 (5 + 2x^2)\,dx + \int_1^2 (5 + 2x^2)\,dx \approx 5,65625 + 9,67 = 15,3229.$$

Exemplo 8.4.3. Sabemos que

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \qquad \text{e que} \qquad \int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3},$$

forneça uma fórmula para o calculo de integrais definida de funções do segundo grau.
Solução: Dada uma função do segundo grau

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

usando P2, P1 e P3 temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b a_0\,dx + \int_a^b a_1 x\,dx + \int_a^b a_2 x^2\,dx = a_0(b - a) + a_1 \int_a^b x\,dx + a_2 \int_a^b x^2\,dx.$$

Usando as fórmula do problema,

$$\int_a^b f(x)\,dx = a_0(b - a) + a_1 \frac{(b^2 - a^2)}{2} + a_2 \frac{(b^3 - a^3)}{3}.$$

8.5 Conclusão

Desta aula, concluímos que a busca da determinação da área da região sob o gráfico de uma determinada função nos leva a formalização do conceito de Integral de Riemann, um dos conceitos mais importantes da matemática. Tal conceito tem várias propriedades importantes. No entanto, pelo que vimos até o momento, seu cálculo envolve um limite e, na maioria dos casos, não é simples.

8.6 Resumo

Vimos nesta aula a área da região delimitada pelo gráfico de uma função não-negativa f, o eixo x e as linhas verticais $x = a$ e $x = b$ é dada pelo limite

$$A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)]\Delta x,$$

onde $x_1, x_2, ..., x_n$ são pontos arbitrários pertencentes aos n sub-intervalos de $[a, b]$ de comprimento $\Delta x = \dfrac{(b - a)}{n}$.

Vimos também que se f uma função definida em $[a, b]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x]$$

existe para todos as escolhas de pontos $x_1, x_2, ..., x_n$ nos n sub intervalo de $[a, b]$ de igual comprimento $\Delta x = \dfrac{(b-a)}{n}$, então a função f é dita integrável, o limite acima é chamado integral de f de a até b e é denotado por

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

tal conceito goza das seguintes propriedades:

P1: $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, onde c é uma constante;

P2: soma de funções integráveis é integrável, além disso,

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

P3: produto de constante por função integrável é integrável, além disso,

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx;$$

P4: diferença de funções integráveis é integrável, além disso,

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx;$$

P5: $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, onde $a \le c \le b$;

P6: se $f(x) \ge 0$ em $[a, b]$ então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

P7: se $f(x) \ge g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx;$$

P8: se $m \le f(x) \le M$ para todo x em $[a, b]$, então

$$m.(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M.(b-a).$$

8.7 Atividades

Atividade 8.7.1. Estime

$$\int_0^1 (4+3x^2)\,dx.$$

Atividade 8.7.2. Calcule

$$\int_0^2 (3 + x + \frac{x^2}{2})dx.$$

Sugestão: Use a fórmula fornecida pelo exemplo 8.4.2.

Atividade 8.7.3. Mostre que

$$\int_0^c x\,dx = \frac{c^2}{2},$$

onde $c \geq 0$. Conclua que

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

para quais quer sejam $a < b$ reais.

8.8 Próxima aula

Na próxima aula, forneceremos o Teorema Fundamental do Cálculo, o qual relacionará os conceito de integral com a derivada. Essa relação reduzirá o cálculo da integral a busca de uma determinada função denominada primitiva.

8.9 Referências Bibliográficas

- STEWART, James. Cálculo. Editora Pioneira, 5º edição, volume 1;

- IEZZI, Gerson; MURAKAM, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos de Matemática Elementar 8. Editora Atual, 3º edição, 1985.

- TAN, S. T. Matemática Aplicada a Administração e Economia. Editora Thomson Learning, segunda edição, São Paulo, 2007.