UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA
PROGRAMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

PLANO DA NONA AULA

Nº da aula	Título da aula	Metas	Objetivos
09	Antiderivadas e o teorema fundamental do cálculo	Obter antiderivadas de funções elementares e relacionar os conceito de antiderivada e integral de Riemann.	Ao final o da aula, o aluno deverá ser capaz de obter algumas antiderivadas de funções elementares e, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, avaliar integrais de Riemann de algumas funções que possuem primitivas conhecidas.

NONA AULA

Curso:LICENCIATURA EM BIOLOGIA **Professor-autor**: FÁBIO DOS SANTOS

Disciplina: MATEMÁTICA BÁSICA

Número da unidade: 02 **Número da aula:** 09

Título da aula: Antiderivadas e o teorema fundamental do cálculo

Meta: Obter antiderivadas de funções elementares e relacionar os conceito de antiderivada e integral de Riemann.

Objetivos: Ao final o da aula, o aluno deverá ser capaz de obter algumas antiderivadas de funções elementares e, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, avaliar integrais de Riemann de algumas funções que possuem primitivas conhecidas.

Pré-requisito: Vestibular e aulas aula 01-08.

9.1 Introdução

Na aula passada, introduzimos a integral de Riemann, cuja definição envolve a noção de limites e é inviável na maioria dos casos. Nesta aula, vamos aprender um processo para calcular a integral de f em $[a, b]$ sem termos que recorrer a definição. Em tal processo, faz-se útil a noção de antiderivada de uma função. Apresentaremos o Teorema Fundamental do Cálculo [box O Teorema Fundamental do Cálculo foi demonstrado pela primeira vez por Isaac Newton (1643-1727) e é talvez o principal teorema do Cálculo Diferencial e Integral]. o qual fornece um elo entre o cálculo diferencial e o cálculo integral. Esta relação facilitará

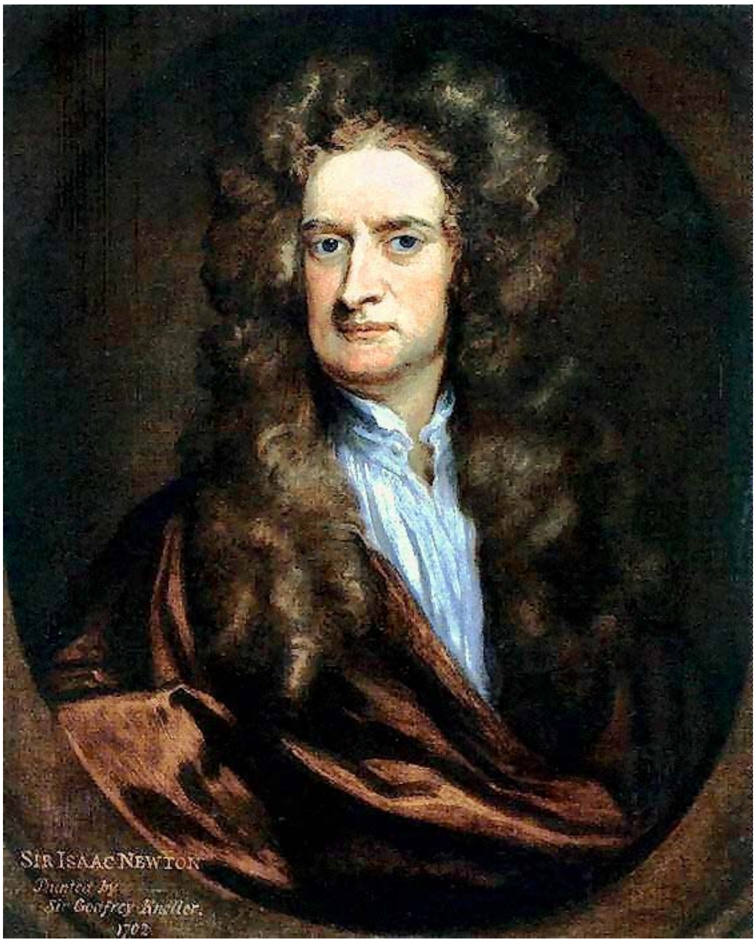

Figura 1: Foto de Isaac Newton.

bastante o cálculo da integral de Riemann. Por exemplo, com a definição e propriedades vistas na aula passada tente obter

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sinx\, dx.$$

Veremos no exemplo 9.3.2 que, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, isso é bem simples.

O Teorema Fundamental do Cálculo tornará necessária uma nova definição de integral, a integral indefinida, a qual denotará todas as antiderivadas da função e será assunto abordado na próxima aula.

9.2 Antiderivadas

Uma função F é uma antiderivada ou primitiva de f em um intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Exemplo 9.2.1. A função $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ é uma antiderivada de $f(x) = x^2$, já que $F'(x) = f(x)$.

Exemplo 9.2.2. Mostre que $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 10$ é uma antiderivada de $f(x) = x^2$.
Solução: Com efeito,

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 10\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + (10)' = x^2 = f(x).$$

Comparando os exemplos 9.2.1 e 9.1.2 percebemos que a antiderivada de uma função f não é unicamente determinada. Em geral, se F é uma antiderivada de f então $G(x) = F(x) + C$, onde C é uma constante, também é, já que

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = F'(x) = f(x).$$

O teorema que segue afirma que nenhuma outra função, além das funções que têm a forma de G é antiderivada de f (omitiremos a prova).

Teorema. Se G é uma antideriva de uma função f então qualquer outra antiderivada de f tem a forma

$$F(x) = G(x) + C,$$

onde C é uma constante.

Exemplo 9.2.3. Prove que $G(x) = x^4$ é uma antiderivada para $f(x) = 4x^3$. Escreva uma expressão geral para as antiderivadas de f.
Solução: Como $G'(x) = 4x^3 = f(x)$, temos que G é uma antiderivada de f. Pelo teorema anterior, qualquer antiderivada de $f(x) = 4x^3$ tem a forma

$$F(x) = G(x) + C = x^4 + C,$$

onde C é uma constante.

9.3 O Teorema Fundamental do Cálculo

Nesta seção apresentaremos o Teorema Fundamental do Cálculo e aplicações, o qual mostrará uma grande relação entre a integral de Riemann e antiderivadas.

Teorema Fundamental do Cálculo. Se f é contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde F é qualquer antiderivada de f em $[a, b]$. Em outros termos, se F é uma função diferenciável em $[a, b]$ então

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, para calcularmos $\int_a^b f(x)dx$ é necessário apenas conhecermos uma antiderivada F de f. É muito surpreendente que

$$\int_a^b f(x)dx$$

definida por um processo complicado envolvendo todos os valores de $f(x)$ em $[a, b]$, pode ser encontrado sabendo-se os valores de $F(x)$ em dois pontos a e b.

Exemplo 9.3.1. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtenha

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

Solução: Note que $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ é uma antiderivada de $f(x) = x^2$, já que $F'(x) = x^2$; assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{1^3}{3} + \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} = 0,333...$$

Compare esse valor com o valor aproximado obtido no exemplo 8.3.1 da aula anterior. Um comentário importante é que o cálculo acima é bem complexo se usarmos apenas a definição de integral de Riemann. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, o resultado fica trivial, já que é muito simples obter uma antiderivada de $f(x) = x^2$.

Exemplo 9.3.2. Obtenha a área sob a curva do seno da origem até $\dfrac{\pi}{4}$.
Solução: Pelo que vimos na aula anterior, a área é dada por

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sinx\, dx.$$

Como $F(x) = -cosx$ é uma antiderivada de $\sin x$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$A = F(\frac{\pi}{4}) - F(0) = -\cos(\frac{\pi}{4}) - (-cos0) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 0,7.$$

Exemplo 9.3.3. Calcule

$$\int_0^{27} \sqrt[3]{x}\,dx.$$

Solução: Note que

$$F(x) = 3\frac{x^{\frac{4}{3}}}{4}$$

é uma antiderivada de $\sqrt[3]{x}$, já que

$$F'(x) = \frac{3}{4}.\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x};$$

assim,

$$\int_0^{27} \sqrt[3]{x}\,dx = F(27) - F(0) = \frac{3}{4}.27^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}.0^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}(\sqrt[3]{27})^4 = \frac{3}{4}.3^4 = \frac{3^5}{4} = \frac{243}{4}.$$

Exemplo 9.3.4. Calcule

$$\int_2^4 \frac{1}{x}\,dx.$$

Solução: Desde que $F(x) = \ln|x|$ é uma antiderivada de $\frac{1}{x}$, segue, do Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$\int_2^4 \frac{1}{x}\,dx = \ln 4 - \ln 2 = \ln(\frac{4}{2}) = \ln 2.$$

Exemplo 9.3.5. Calcule

$$\int_0^2 2x\,dx, \quad \int_0^2 2\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^2 x\,dx.$$

Conclua daí que

$$\int_a^b f(x).g(x)\,dx,$$

em geral, não é igual a

$$\int_a^b f(x)\,dx. \int_a^b g(x)\,dx,$$

ou seja, em geral a integral do produto de duas funções não é igual ao produto das integrais dessas funções.

Solução: Note que

$$x^2, \quad 2x \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{2}$$

são primitivas de $2x$, 2 e x, respectivamente. Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_0^2 2x\,dx = 2^2 - 0^2 = 4$$

$$\int_0^2 2\,dx = 2.2 - 2.0 = 4$$

e

$$\int_0^2 x\,dx = 2\frac{2}{2} - 0\frac{2}{2} = 2.$$

Desde que

$$\int_0^2 2x\,dx = 4 \neq 8 = \int_0^2 2\,dx . \int_0^2 x\,dx,$$

segue que, em geral, a integral do produto não é o produto das integrais.

9.4 Conclusão

Do exposto nesta aula, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, concluímos que no cálculo efetivo da integral de Riemann é curcial conhecermos algumas funções especiais que depende do integrando, chamadas de antiderivadas ou primitivas, as quais, por definição, tem derivada igual ao integrando.

9.5 Resumo

Nesta aula, aprendemos a obter antiderivadas de funções f, isto é, obter funções F tais que $F'(x) = f(x)$. Vimos também o grande teorema do Cálculo, denominado Teorema Fundamental do Cálculo, que afirma que se f é contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

onde F é qualquer antiderivada de f em $[a, b]$.

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo aprendemos a calcular integrais de Riemann de várias funções.

9.6 Atividades

Atividade 9.6.1. Obtenha uma antiderivada de $f(x) = x$.

Atividade 9.6.2. Obtenha todos as antiderivadas de $f(x) = 2x^2 + x$.

Atividade 9.6.3. Obtenha

$$\int_1^5 2x^2 + x\,dx.$$

Atividade 9.6.4. Calcule a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma antiderivada de $f(x) = e^x$ na origem. O que acontece com a inclinação se escolhemos outra antiderivada?

Atividade 9.6.5. Calcule

$$\int_0^1 \left(x^5 + \frac{1}{x}\right) dx.$$

9.7 Próxima aula

Na próxima aula, veremos a definição da integral indefinida, a qual fornecerá métodos para o cálculo de integrais de funções que são composições de funções elementares.

9.8 Referências Bibliográficas

- STEWART, James. Cálculo. Editora Pioneira, 5º edição, volume 1;

- IEZZI, Gerson; MURAKAM, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos de Matemática Elementar 8. Editora Atual, 3º edição, 1985.

- TAN, S. T. Matemática Aplicada a Administração e Economia. Editora Thomson Learning, segunda edição, São Paulo, 2007.