UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA
PROGRAMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

PLANO DA DÉCIMA AULA

Nº da aula	**Título da aula**	**Metas**	**Objetivos**
10	A integral indefinida e regras de derivação.	Definir a integral indefinida e calcular algumas integrais usando regras de derivação.	Após a leitura desta aula, o aluno deverá ser capaz de calcular algumas integrais usando regras de derivação.

DÉCIMA AULA

Curso:LICENCIATURA EM BIOLOGIA

Professor-autor: FÁBIO DOS SANTOS

Disciplina: MATEMÁTICA BÁSICA

Número da unidade: 02

Número da aula: 10

Título da aula: A integral indefinida e regras de derivação.

Meta: Definir a integral indefinida e calcular algumas integrais usando regras de derivação.

Objetivos: Após a leitura desta aula, o aluno deverá ser capaz de calcular algumas integrais usando regras de derivação.

Pré-requisito:Vestibular e aulas 01- 09.

10.1 Introdução

Na aula anterior, vimos que o Teorema Fundamental do Cálculo fornece um método eficiente para calcular a integral de Riemann de uma função, desde que conheçamos uma antiderivada da função. Nessa aula, introduziremos a notação de integral indefinida para denotar todas as antiderivadas de uma função e obtermos regras para obtê-las. Essas regras serão úteis, já que, o conhecimento da integral indefinida é suficiente para calcularmos a integral de Riemann.

Nesta aula, não nos aprofundaremos nos métodos para obtenção da integral indefinida; assim, caro aluno, sempre que em sua profissão você precisar calculá-las, se o assunto dessa aula não for suficiente, é necessário efetuar a busca em tabelas de integrais ou usar Softwares Matemáticos, por exemplo, Geogebra, Maple, Mathematica, etc. Apesar dos softwares ajudarem na resolução dos problemas do cálculo, é útil entender bem os conceitos envolvidos. Não há bom entendimento de nada do cálculo diferencial e integral sem a prática.

10.2 A Integral Indefinida

Devido à relação dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo entre as antiderivadas e as integrais de Riemann, usamos a notação

$$\int f(x)\,dx$$

para denotar a família das primitivas ou antiderivadas de f; assim, se F é uma primitiva de f temos que

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

onde c é uma constante.

Exemplo 10.2.1. Podemos escrever

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c,$$

desde que

$$\left(\frac{x^3}{3} + c\right)' = x^2.$$

Uma observação importante é que não podemos confundir, em hipótese alguma, a integral definida (ou integral de Riemann) com a integral indefinida, já que

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é um número, enquanto

$$\int f(x)\,dx$$

representa uma família de funções. A conexão entre elas é dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\int f(x)\,dx]_a^b.$$

Na continuação, listaremos uma tabela de integrais indefinidas e propriedades que podem ser testados facilmente derivando o que está no lado direito da igualdade.

P1: $\displaystyle\int c.f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx;$

P2: $\displaystyle\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx;$

P3: $\displaystyle\int K\,dx = Kx + c;$

P4: $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1);$

P5: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c;$

P6: $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c;$

P7: $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c;$

P8: $\displaystyle\int senx\,dx = -\cos x + c;$

P9: $\displaystyle\int \cos x\,dx = senx + c.$

Usaremos agora as propriedades acima para calcular algumas integrais indefinidas.

Exemplo 10.2.2. Encontre

$$\int \sqrt{x^3}\,dx.$$

Solução: Note que $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$; assim, usando P4 temos que

$$\int \sqrt{x^3}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + c.$$

Exemplo 10.2.3. Obtenha

$$I = \int 3x^{-2}\,dx.$$

*Solução:*Por P3

$$I = 3\int x^{-2}\,dx.$$

Usando P4

$$I = 3.(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c') = \frac{-3}{x} + c.$$

Exemplo 10.2.4. Usando as propriedades da integral indefinida listados anteriormente, obtenha

$$I = \int (3x^4 + 5x^{\frac{3}{5}} - 2x^{\frac{-3}{2}})\, dx.$$

Solução: Usando duas vezes P2, obtemos

$$I = \int 3x^4\, dx + \int 5x^{\frac{3}{5}}\, dx + \int -2x^{\frac{-3}{2}}\, dx.$$

Por P3

$$I = 3\int x^4\, dx + 5\int x^{\frac{3}{5}}\, dx - 2\int x^{\frac{-3}{2}}\, dx.$$

Usando P4

$$I = 3.\frac{x^5}{5} + 5.\frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} - 2\frac{x^{\frac{-3}{2}+1}}{\frac{-3}{2}+1} + c = \frac{3}{5}x^5 + \frac{25}{8}x^{\frac{8}{5}} + 4x^{\frac{-1}{2}} + c.$$

Apesar que, usando as propriedades listadas anteriormente já conseguimos calcular muitas integrais, precisamos ainda de algumas técnicas de integração. Note que com o que temos até o momento não conseguimos calcular

$$\int x.cos(x^2)\, dx.$$

Na próxima seção, forneceremos um método que ajudará no cálculo da integral anterior. Trata-se do método da substituição.

10.3 O Método da Integração por Substituição

Nesta seção, introduziremos um método de integração chamado método da substituição. Quando usado com as regras de integração fornecidas fornecidas na seção anterior, o método é uma ferramenta poderosa para a integração de ampla classe de funções. Vejamos como funciona esse método.

Considere a integral indefinida:

$$I = \int (2x+3)^{10}\, dx.$$

Com o que vimos na seção anterior, seríamos levados a expandir $(2x+3)^{10}$ e, em seguida, integrar o integrando resultante termo a termo. Isso é inviável, já que teríamos muita conta. Vejamos como o cálculo fica simples usando o método da substituição. Inicialmente fazemos a mudança de variável $u = 2x+3$ com diferencial $du = d(2x+3) = 2dx$. Se substituirmos na integral I obtemos

$$I = \int u^{10}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{10}\, du = \frac{1}{2}\frac{u^{10+1}}{10+1} + c = \frac{1}{22}u^{11} + c.$$

Portanto, substituindo u por $2x+3$ resulta

$$I = \frac{1}{22}(2x+3)^{11} + c.$$

Vejamos agora ,alguns exemplos resolvidos usando o método da substituição.

Exemplo 10.3.1. Calcule

$$\int 3x(x^2-5)\,dx.$$

Solução: Façamos $u = x^2 - 5$, o que implica em $du = 2xdx$; assim,

$$I = \int 3(x^2-5)xdx = \int 3u\frac{du}{2} = \frac{3}{2}\int udu = \frac{3}{2}\frac{u^2}{2} + c = \frac{3}{4}u^2 + c.$$

Levando em conta $u = x^2 - 5$, temos que

$$I = \frac{3}{4}(x^2-5)^2 + c.$$

Exemplo 10.3.2. Obtenha

$$I = \int x.cos(x^2)\,dx.$$

Solução: Façamos $u = x^2$; donde, $du = 2xdx$. Substituindo na integral obtemos

$$I = \int \cos u\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}senu + c.$$

Substituindo u por x^2 obtemos

$$I = \frac{1}{2}sen(x^2) + c.$$

Exemplo 10.3.3. Calcule

$$I = \int x^2\sqrt{3x^3+2}dx.$$

Solução: Fazendo $u = 3x^3 + 2$, temos que

$$du = 6x^2\,dx,$$

donde

$$x^2\,dx = \frac{du}{6}.$$

Substituindo na integral acima, obtemos

$$I = \int \sqrt{u}.\frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{2}}\,du.$$

Usando P4

$$I = \frac{1}{6}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{9}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{9}\sqrt{u^3} + c$$

e substituindo u por $3x^2 + 2$, obtemos

$$I = \frac{1}{9}\sqrt{(3x^2+2)^3} + c.$$

10.4 Integração por Partes

Sabemos que para o produto $u(x).v(x)$ vale a seguinte regra de derivação:

$$(u(x).v(x))' = u'(x).v(x) + u(x).v'(x);$$

assim, segue que, a menos de constante,

$$\int (u(x).v(x))' dx = \int (u'(x).v(x) + u(x).v'(x))\, dx.$$

Desde que uma primitiva de $(u(x).v(x))'$ é $u(x).v(x)$, usando o fato de que a integral indefinida da soma é a soma das integrais, obtemos

$$u(x).v(x) = \int u'(x).v(x)\, dx + \int u(x).v'(x)\, dx$$

ou

$$\int u(x).v'(x)\, dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)\, dx.$$

Essa propriedade dá origem a uma importante ferramenta para o cálculo de integrais indefinidas. Vejamos, por exemplos, como funciona esse método, denominado Método da Integração por Partes.

Exemplo 10.4.1. Calcule

$$\int x.cosx\, dx.$$

Solução: Faça $u(x) = x$ e $v'(x) = \cos x\, dx$. Pela fórmula da integração por partes,

$$\int x.cosx\, dx = \int u(x).v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int v(x).u'(x)\, dx.$$

como $v'(x) = \cos x$ temos que, a menos de constante, $v(x) = -senx$. De $u(x) = x$ temos que $u'(x) = 1$; assim,

$$\int x.cosxdx = x.(-senx) - \int -senx\, dx = -x.senx - \cos x + c.$$

Exemplo 10.4.2. Calcule

$$\int x.e^x\, dx.$$

Solução: Fazendo $u(x) = x$ e $v'(x) = e^x$, temos que $u'(x) = 1$ e $v(x) = e^x$ a menos de constante; assim:

$$\int x.e^x\, dx = \int u(x).v'(x)\, dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)\, dx =$$

$$x.e^x - \int e^x.1\, dx = x.e^x - e^x + c = e^x(x-1) + c.$$

10.5 Conclusão

Desta aula, concluímos que no cálculo de integrais, a integral indefinida de uma função, a qual representa o conjunto de todas as antiderivadas desta função, possui propriedades que facilitarão seu cálculo. O conhecimento da integral indefinida, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, é suficiente para conhecermos suas integrais definidas.

10.6 Resumo

Vimos nesta aula que a notação

$$\int f(x)\,dx$$

é usada para denotar a família das primitivas ou antiderivadas da função f e é denominada integral indefinida de f e goza das seguintes propriedades:

P1: $\displaystyle\int c.f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$;

P2: $\displaystyle\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

P3: $\displaystyle\int K\,dx = Kx + c$;

P4: $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$;

P5: $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$;

P6: $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c$;

P7: $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$;

P8: $\displaystyle\int senx\,dx = -\cos x + c$;

P9: $\displaystyle\int \cos x\,dx = senx + c$.

Vimos também dois métodos úteis na obtenção da integral indefinida de uma função, são eles, o Método da Substituição e o Método da Integração por Partes. O primeiro consiste em obter uma função apropriada que simplifique o integrando,enquanto o segundo é baseado na fórmula

$$\int u(x).v'(x)\,dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)\,dx,$$

a qual é conseqüência da Regra de derivação do produto e do Teorema Fundamental do Cálculo.

10.7 Atividades

Atividade 10.7.1 Usando o método da substituição, obtenha

$$\int \frac{1}{x+2} dx.$$

Sugestão: Faça $u = x + 2$.

Atividade 10.7.2. Usando o método da mudança de variáveis, obtenha

$$\int \frac{x^2}{x^3+10} dx.$$

Sugestão: Faça $u = x^3 + 10$.

Atividade 10.7.3 Calcule

$$\int x.senx\, dx.$$

Sugestão: Aplique o método da integração por partes fazendo $u(x) = x$ e $v'(x) = senx$.

10.8 Referências Bibliográficas

- STEWART, James. Cálculo. Editora Pioneira, 5º edição, volume 1;

- IEZZI, Gerson; MURAKAM, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos de Matemática Elementar 8. Editora Atual, 3º edição, 1985.

- TAN, S. T. Matemática Aplicada a Administração e Economia. Editora Thomson Learning, segunda edição, São Paulo, 2007.