

Matemática Discreta

Wagner Ferreira Santos



São Cristóvão/SE
2010

Matemática Discreta

Elaboração de Conteúdo

Wagner Ferreira Santos

Copyright © 2010 , Universidade Federal de Sergipe / CESAD.
Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização por escrito da UFS.

**FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Santos. Wagner Ferreira
S237t Matemática Discreta / Wagner Ferreira Santos -- São
Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2010.

1. Matemática . I. Título.

CDU 51

Presidente da República
Luiz Inácio Lula da Silva

Chefe de Gabinete
Ednalva Freire Caetano

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Coordenador Geral da UAB/UFS
Diretor do CESAD
Antônio Ponciano Bezerra

Secretário de Educação a Distância
Carlos Eduardo Bielschowsky

Vice-coordenador da UAB/UFS
Vice-diretor do CESAD
Fábio Alves dos Santos

Reitor
Josué Modesto dos Passos Subrinho

Vice-Reitor
Angelo Roberto Antonioli

Diretoria Pedagógica
Clotildes Farias de Sousa (Diretora)

Núcleo de Serviços Gráficos e Audiovisuais
Giselda Barros

Diretoria Administrativa e Financeira
Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)
Sylvia Helena de Almeida Soares
Valter Siqueira Alves

Núcleo de Tecnologia da Informação
João Eduardo Batista de Deus Anselmo
Marcel da Conceição Souza
Raimundo Araujo de Almeida Júnior

Coordenação de Cursos
Djalma Andrade (Coordenadora)

Assessoria de Comunicação
Edvar Freire Caetano
Guilherme Borba Gouy

Núcleo de Formação Continuada
Rosemeire Marcedo Costa (Coordenadora)

Núcleo de Avaliação
Hérica dos Santos Matos (Coordenadora)
Carlos Alberto Vasconcelos

Coordenadores de Curso
Denis Menezes (Letras Português)
Eduardo Farias (Administração)
Haroldo Dorea (Química)
Hassan Sherafat (Matemática)
Hélio Mario Araújo (Geografia)
Lourival Santana (História)
Marcelo Macedo (Física)
Silmara Pantaleão (Ciências Biológicas)

Coordenadores de Tutoria
Edvan dos Santos Sousa (Física)
Geraldo Ferreira Souza Júnior (Matemática)
Janaína Couvo T. M. de Aguiar (Administração)
Priscila Viana Cardozo (História)
Rafael de Jesus Santana (Química)
Ítala Santana Souza (Geografia)
Trícia C. P. de Sant'ana (Ciências Biológicas)
Vanessa Santos Góes (Letras Português)
Lívia Carvalho Santos (Presencial)

NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO

Hermeson Menezes (Coordenador)
Arthur Pinto R. S. Almeida
Carolina Faccioli dos Santos
Cássio Pitter Silva Vasconcelos

Isabela Pinheiro Ewerton
Lucas Barros Oliveira
Neverton Correia da Silva
Nycolas Menezes Melo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

| | |
|--|-----------|
| AULA 1: Indução e Recorrência | 7 |
| 1.1 Introdução | 8 |
| 1.2 O Princípio da Indução | 8 |
| 1.2.1 Segundo Princípio da Indução | 11 |
| 1.3 Relações de Recorrência | 13 |
| 1.3.1 Lineares com Coeficientes Constantes | 14 |
| 1.4 Conclusão | 18 |
| RESUMO | 19 |
| PRÓXIMA AULA | 20 |
| ATIVIDADES | 20 |
| REFERÊNCIAS | 22 |
| | |
| AULA 2: Princípios de Contagem | 23 |
| 2.1 Introdução | 24 |
| 2.2 Contagem | 25 |
| 2.3 Princípio da Soma | 25 |
| 2.3.1 Conjuntos Disjuntos | 25 |
| 2.3.2 Conjuntos Quaisquer | 26 |
| 2.4 Princípio do Produto | 32 |
| 2.5 Princípio da Inclusão-Exclusão | 34 |
| 2.5.1 <i>Aplicação: Função de Euler</i> | 39 |

| | | |
|--|--|-----------|
| 2.6 | Princípio da Casa dos Pombos | 40 |
| 2.6.1 | Generalizações | 41 |
| 2.7 | Conclusão | 44 |
| | RESUMO | 45 |
| | PRÓXIMA AULA | 46 |
| | ATIVIDADES | 46 |
| | REFERÊNCIAS | 48 |
| AULA 3: Arranjos, Permutações e Combinações | | 49 |
| 3.1 | Introdução | 50 |
| 3.2 | Arranjos Simples | 50 |
| 3.3 | Arranjos com Repetição | 52 |
| 3.4 | Permutações Simples | 54 |
| 3.5 | Combinações Simples | 54 |
| 3.6 | Combinações Complementares | 55 |
| 3.7 | Combinações com repetição | 57 |
| 3.8 | Permutação com repetição | 58 |
| 3.9 | Permutações circulares | 59 |
| 3.10 | Conclusão | 60 |
| | RESUMO | 61 |
| | PRÓXIMA AULA | 62 |
| | ATIVIDADES | 62 |
| | REFERÊNCIAS | 64 |
| AULA 4: Expansões | | 65 |
| 4.1 | Introdução | 66 |
| 4.2 | Coeficientes Binomiais | 66 |
| 4.3 | Expansão Binomial | 68 |
| 4.3.1 | Expansão Recorrente | 68 |

| | | |
|--------------------------------------|---|----------------|
| 4.3.2 | Expansão de Newton | 70 |
| 4.4 | Expansão Multinomial | 72 |
| 4.5 | Conclusão | 75 |
| | RESUMO | 76 |
| | PRÓXIMA AULA | 77 |
| | ATIVIDADES | 77 |
| | REFERÊNCIAS | 79 |
| AULA 5: Funções Geradoras | | 81 |
| 5.1 | Introdução | 82 |
| 5.2 | Função Geradora Ordinária | 82 |
| 5.3 | Cálculo de funções geradoras | 84 |
| 5.4 | Função geradora exponencial | 86 |
| 5.5 | <i>Aplicação 1: Polinômios de Torres</i> | 89 |
| 5.6 | <i>Aplicação 2: Permutações com Posições Interditadas</i> | 92 |
| 5.7 | Conclusão | 95 |
| | RESUMO | 96 |
| | PRÓXIMA AULA | 97 |
| | ATIVIDADES | 98 |
| | REFERÊNCIAS | 100 |
| AULA 6: Algoritmos | | 101 |
| 6.1 | Introdução | 102 |
| 6.2 | Livros e Algoritmos | 102 |
| 6.3 | Fibonacci | 104 |
| 6.4 | Algoritmos Numéricos | 106 |
| 6.5 | Notação O | 109 |
| 6.6 | Conclusão | 110 |
| | RESUMO | 110 |

| | |
|--|------------|
| PRÓXIMA AULA | 111 |
| ATIVIDADES | 111 |
| REFERÊNCIAS | 113 |
| AULA 7: Grafos | 115 |
| 7.1 Introdução | 116 |
| 7.2 Noções Elementares | 116 |
| 7.3 Árvores | 121 |
| 7.4 Isomorfismo | 124 |
| 7.5 Grafos Famosos | 126 |
| 7.6 Conclusão | 129 |
| RESUMO | 130 |
| PRÓXIMA AULA | 131 |
| ATIVIDADES | 131 |
| REFERÊNCIAS | 133 |
| AULA 8: Roteamentos | 135 |
| 8.1 Introdução | 136 |
| 8.2 Circuito Euleriano | 136 |
| 8.3 Grafos Bipartidos | 140 |
| 8.4 Ciclo Hamiltoniano | 142 |
| 8.5 Problema do caminho mais curto | 145 |
| 8.6 Conclusão | 148 |
| RESUMO | 149 |
| PRÓXIMA AULA | 150 |
| ATIVIDADES | 150 |
| REFERÊNCIAS | 152 |

| | |
|--|------------|
| AULA 9: Planaridade | 153 |
| 9.1 Introdução | 154 |
| 9.2 Grafos Mergulháveis em Superfícies | 154 |
| 9.3 Grafo Dual | 156 |
| 9.4 A Fórmula de Euler | 158 |
| 9.5 Teorema de Kuratowski | 159 |
| 9.6 Planaridade e Grafos Hamiltonianos | 160 |
| 9.7 Conclusão | 162 |
| RESUMO | 163 |
| PRÓXIMA AULA | 164 |
| ATIVIDADES | 165 |
| REFERÊNCIAS | 168 |
| | |
| AULA 10: Coloração | 169 |
| 10.1 Introdução | 170 |
| 10.2 Coloração de Vértices | 170 |
| 10.2.1 Polinômios Cromáticos | 170 |
| 10.2.2 Número Cromático | 177 |
| 10.3 Coloração de Arestas | 180 |
| 10.4 Conclusão | 184 |
| RESUMO | 184 |
| ATIVIDADES | 186 |
| REFERÊNCIAS | 188 |

Indução e Recorrência

META

- Introduzir o princípio de indução e funções definidas de forma recursiva.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

- Demonstrar, pelo princípio da indução, afirmações matemáticas envolvendo os números naturais;
- Identificar funções definidas recursivamente;
- Resolver funções recursivas.



1.1 Introdução

Caro aluno, bem vindo à nossa aula inaugural do curso de matemática discreta. Inicialmente estudaremos o princípio da indução, uma ferramenta matemática eficiente quando se deseja fazer demonstrações envolvendo o conjunto dos números naturais. Uma associação que podemos fazer com este princípio é o da figura que ilustra esta aula: uma fileira de dominós. Se um dominó cair, derrubará o dominó que está à sua frente, e este o próximo, e assim sucessivamente. Então, derrubando-se o primeiro dominó, derrubaremos todos os dominós que estão enfileirados. Em seguida, passaremos ao estudo das relações de recorrência, inclusive das velhas conhecidas progressões aritmética e geométrica. Para finalizar a aula, aprenderemos a resolver relações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes.

1.2 O Princípio da Indução

Considere $X \subset \mathbb{N}$. O princípio da indução diz que se:

- (1) $1 \in X$;
- (2) $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$

Então $X = \mathbb{N}$.

Este princípio é um eficiente instrumento para demonstração de fatos referentes aos números naturais. Entendê-lo é praticamente o mesmo que entender os números naturais. Vejamos uns exemplos:

Exemplo 1.1 (Soma dos n primeiros naturais). Prove que a soma dos n primeiros naturais é $\frac{n(n+1)}{2}$.

Solução: Seja $X = \left\{ n \in \mathbb{N} / 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right\}$. Então:

(1) $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, o que implica em $1 \in X$;

(2) Supondo que $k \in X$, segue que

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + k + (k + 1) &= (1 + \cdots + k) + (k + 1) \\ &= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) \\ &= (k + 1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \end{aligned}$$

Portanto $k + 1 \in X$.

Logo, pelo princípio da indução, $X = \mathbb{N}$. ◀

Exemplo 1.2 (A soma dos n primeiros ímpares). Prove que a soma dos n primeiros ímpares é n^2 .

Solução: A soma dos n primeiros ímpares pode ser escrita como $1 + \cdots + (2n - 1)$. Desejamos mostrar então que $1 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. De fato,

(1) Para $n = 1$, $1 = 1^2$. E a fórmula é válida para $n = 1$;

(2) Suponha que $1 + \cdots + (2k - 1) = k^2$. Então

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) &= (1 + \cdots + (2k - 1)) + (2k + 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2, \end{aligned}$$

isto é, a fórmula é válida para $n = k + 1$.

Portanto, pelo princípio da indução, a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ◀

Exemplo 1.3 (Soma de frações). Mostre que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Solução: Pelo princípio da indução, desde que:

- (1) Para $n = 1$, $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, logo a fórmula é válida para $n = 1$;
- (2) Supondo válida para $n = k$ temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \left(\frac{1}{k+1}\right) \left(k + \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{k+1}\right) \left(\frac{k^2 + 2k + 1}{k+2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{k+1}\right) \left(\frac{(k+1)^2}{k+2}\right) \\ &= \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

Então vale para $n = k + 1$;

segue que a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ◀

Exemplo 1.4 (Divisibilidade por 3). Mostre que a proposição

$$P(n) : 2^{2n} - 1 \text{ é divisível por } 3$$

é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução: Com efeito,

- (1) Para $n = 1$, $P(1) : 3$ é divisível por 3 é verdade;
- (2) Suponha que a proposição $P(k)$ seja verdade, isto é, que para algum $m \in \mathbb{N}$, $2^{2k} - 1 = 3m$. Então a proposição $P(k + 1)$

é $2^{2k+2} - 1$ é divisível por 3. Mostremos que ela é verdade.

Note que podemos escrever

$$\begin{aligned}2^{2k+2} - 1 &= 2^2 \cdot 2^{2k} - 1 \\&= 4 \cdot 2^{2k} - 1 \\&= (3 \cdot 2^{2k} + 1 \cdot 2^{2k}) - 1 \\&= 3 \cdot 2^{2k} + (2^{2k} - 1) \\&= 3 \cdot 2^{2k} + 3m \\&= 3(2^{2k} + m)\end{aligned}$$

Mostrando que $2^{2k+2} - 1$ é divisível por 3.

Assim, pelo princípio da indução, segue que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ◀

1.2.1 Segundo Princípio da Indução

Em algumas situações, ao tentarmos fazer uma demonstração por indução, na passagem de n para $n + 1$, sentimos necessidade de admitir que a proposição valha não apenas para n e sim para todos os números naturais menores ou iguais a n . Com esse intuito, apresentamos o Segundo Princípio da Indução.

Teorema 1.1 (Segundo Princípio da Indução). *Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade:*

- *Dado $n \in \mathbb{N}$, se todos os naturais menores do que n pertencem a X , então $n \in X$.*

Então $X = \mathbb{N}$.

Demonstração: (Por absurdo) Com efeito, suponha por absurdo que $X \neq \mathbb{N}$, isto é, $\mathbb{N} - X \neq \emptyset$. Seja n o menor elemento do

conjunto $\mathbb{N} - X$, ou seja, o menor número natural n tal que $n \notin X$. Isto quer dizer que todos os números naturais menores do que n pertencem a X . Mas então, pela propriedade que o conjunto X possui, segue que $n \in X$, uma contradição (pois não pode ocorrer $x \in X$ e $x \notin X$). Portanto, $\mathbb{N} - X = \emptyset$ e $X = \mathbb{N}$. \square

Exemplo 1.5 (Decomposição de um polígono). Qualquer que seja a maneira de decompor um polígono P , de n lados, em triângulos justapostos por meio de diagonais internas que não se intersectam, o número de diagonais utilizadas é sempre $n - 3$.

Solução: Com efeito, dado n , suponhamos que a proposição acima seja verdadeira para todo polígono com menos de n lados. Seja então dada uma decomposição do polígono P , de n lados, em triângulos justapostos, mediante diagonais internas. Fixemos uma dessas diagonais. Ela decompõe P como reunião de dois polígonos justapostos P_1 , de n_1 lados, e P_2 , de n_2 lados, onde $n_1 < n$ e $n_2 < n$, logo a proposição vale para os polígonos P_1 e P_2 . Observe que o lado comum aos polígonos P_1 e P_2 é uma diagonal interna fixa do polígono P , então $n_1 + n_2 = n + 2$. As d diagonais que efetuam a decomposição de P se agrupam assim: $n_1 - 3$ delas decompõem P_1 , $n_2 - 3$ decompõem P_2 e uma foi usada para separar P_1 de P_2 . Portanto

$$\begin{aligned} d &= (n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 \\ &= (n_1 + n_2) - 5 \\ &= (n + 2) - 5 \\ &= n - 3 \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração. \blacktriangleleft

1.3 Relações de Recorrência

Uma função é dita recorrente se a definição da função se referir à própria função. Para que a função recorrente esteja bem definida, isto é, a fim de sua definição não ser circular, é preciso que satisfaça as seguintes propriedades:

1. Existem argumentos, ditos valores base, nos quais a função não se refere a ela mesma;
2. Cada vez que a função se referir a si própria, o argumento da função se aproxima de um valor base.

Exemplo 1.6. Defina:

$$\text{(Fatorial)} \quad n! = \begin{cases} 1 & , \text{ se } n = 0 \\ n(n-1)! & , \text{ se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{(Fibonacci)} \quad F_n = \begin{cases} n & , \text{ se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ F_{n-2} + F_{n-1} & , \text{ se } n \in \mathbb{N} - \{1\} \end{cases}$$

$$\text{(Ackermann)} \quad A(n, m) = \begin{cases} n + 1 & , \text{ se } m = 0 \\ A(m - 1, 1) & , \text{ se } m \neq 0 \text{ e } n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)) & , \text{ se } n, m \in \mathbb{N} \end{cases}$$



Será possível escrever tais funções sem ser de forma recorrente? Passaremos agora a discutir certos tipos de sequências $\{a_n\}$ recorrentes e suas soluções.

Exemplo 1.7 (Progressão Aritmética). Obter a solução geral da progressão aritmética, uma sequência recorrente definida por:

$$a_n = \begin{cases} a & , \text{ se } n = 0 \\ a_{n-1} + r & , \text{ se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Solução: Notamos que $a_0 = a, a_1 = a + r, \dots$, em geral, $a_n = a + nr$. Provando pelo princípio de indução temos:

1. Para $n = 0, a_0 = a = a + 0r$. Então é verdade para $n = 0$;
2. Supondo válido para $n = k$, como $a_{k+1} = a_k + r$ segue que $a_{k+1} = (a + kr) + r = a + (k + 1)r$. Logo é verdade para $n = k + 1$.

Portanto, pelo princípio de indução, $a_n = a + nr$ é solução da relação de recorrência. ◀

Exemplo 1.8 (Progressão Geométrica). Obter a solução geral da progressão geométrica, uma sequência recorrente definida por:

$$a_n = \begin{cases} a & , \text{ se } n = 0 \\ a_{n-1}r & , \text{ se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Solução: É fácil observar que $a_0 = a, a_1 = ar, \dots$, em geral, $a_n = ar^n$. Provemos por indução:

1. Para $n = 0, a_0 = a = ar^0$. Então é verdade para $n = 0$;
2. Supondo válido para $n = k$, como $a_{k+1} = a_k r$ segue que $a_{k+1} = (ar^k)r = ar^{k+1}$. Logo é verdade para $n = k + 1$.

Portanto, pelo princípio de indução, $a_n = ar^n$ é solução da relação de recorrência. ◀

1.3.1 Lineares com Coeficientes Constantes

Uma relação de recorrência de ordem k é uma sequência da forma

$$a_n = \phi(a_{n-1}, \dots, a_{n-k}, n),$$

isto é, o n -ésimo termo a_n da sequência é função dos k termos precedentes (e de n , possivelmente). Em particular, uma relação de recorrência de ordem k com coeficientes constantes é uma relação de recorrência da forma

$$a_n = C_1 a_{n-1} + \cdots + C_k a_{n-k} + f(n),$$

onde C_1, \dots, C_k são constantes com $C_k \neq 0$ e $f(n)$ é uma função de n . Dizemos que ela é linear porque não existem potências ou produtos dos termos a_i . E possui coeficientes constantes pois C_1, \dots, C_k são constantes, isto é, não dependem de n . Se $f(n) = 0$, a relação é dita homogênea.

Se conhecermos os valores de a_{n-1}, \dots, a_{n-k} podemos obter solução única de a_n . Consequentemente, pelo princípio da indução, existe uma única sequência satisfazendo a relação de recorrência se são dados os valores iniciais para os primeiros k elementos da sequência.

Exemplo 1.9 (Algumas Relações de Recorrência). Classifique as relações de recorrência abaixo:

(a) $a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} + n^2$;

(b) $a_n = 2a_{n-1}a_{n-2} + n^2$;

(c) $a_n = na_{n-1} + 3a_{n-2}$;

(d) $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$;

Solução: A relação de recorrência (a) é de segunda ordem com coeficientes constantes não-homogênea. Já (b) possui o produto $a_{n-1}a_{n-2}$ que a torna não-linear. Por sua vez, o coeficiente que multiplica o termo a_{n-1} em (c) não é constante. Por fim, (d) é

uma relação de recorrência linear homogênea de terceira ordem com coeficientes constantes. ◀

A partir de agora investigaremos as soluções de relações de recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes. Considere uma relação de recorrência homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes com a forma

$$a_n = sa_{n-1} + ta_{n-2},$$

com s, t constantes e $t \neq 0$. Associamos o polinômio $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ à relação de recorrência acima. O polinômio $\Delta(x)$ é dito polinômio característico da relação de recorrência e suas raízes são ditas raízes características.

Teorema 1.2. *Se o polinômio característico $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ da relação $a_n - sa_{n-1} - ta_{n-2} = 0$ tem raízes distintas r_1, r_2 , então a solução geral da relação de recorrência é*

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n,$$

onde c_1, c_2 são constantes arbitrárias que são unicamente determinados pelas condições iniciais.

Demonstração: Seja $a_n = x^n$ solução da relação de recorrência $a_n - sa_{n-1} - ta_{n-2} = 0$. então

$$x^n - sx^{n-1} - tx^{n-2} = 0$$

$$x^{n-2}(x^2 - sx - t) = 0$$

$$x^{n-2}\Delta(x) = 0$$

Sendo r_1, r_2 raízes distintas do polinômio característico $\Delta(x)$ e considerando $x^{n-2} \neq 0$ segue que $a_n = r_1^n$ e $a_n = r_2^n$ são soluções

da relação de recorrência. Na verdade, qualquer combinação linear de suas soluções é solução da relação, isto é,

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

é solução da relação de recorrência. \square

Exemplo 1.10 (Solução de uma relação de recorrência). Considere a relação de recorrência

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2},$$

com condições iniciais $a_0 = 1, a_1 = 2$. Determine sua solução.

Solução: A solução geral é obtida pela determinação das raízes do polinômio característico

$$\Delta(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

Portanto, $a_n = c_1(3)^n + c_2(-1)^n$. Pelas condições iniciais, devemos ter ainda

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$3c_1 - c_2 = 2$$

A solução do sistema é $c_1 = \frac{3}{4}$ e $c_2 = \frac{1}{4}$. Logo, a solução da relação de recorrência é

$$a_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}$$



Exemplo 1.11 (Solução de Fibonacci). Obter a solução da relação de Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com $F_0 = 0, F_1 = 1$.

Solução: O polinômio característico da relação de Fibonacci é $\Delta(x) = x^2 - x - 1$ cujas raízes são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Logo $a_n =$

$c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Pelas condições iniciais, segue que

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} &= 1 \end{aligned}$$

A solução do sistema é $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Portanto,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$



Teorema 1.3. *Se o polinômio característico $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ da relação de recorrência $a_n = sa_{n-1} + ta_{n-2}$ tem apenas uma raiz r_0 , então a solução da relação de recorrência é $a_n = c_1 r_0^n + c_2 n r_0^n$, onde c_1, c_2 são constantes arbitrárias, que são unicamente determinadas a partir das condições iniciais.*

Exemplo 1.12 (Polinômio característico com apenas uma raiz).

Encontrar a solução da relação de recorrência $a_n = 6a_{n-1} + 9a_{n-2}$ cujas condições iniciais são $a_1 = 3, a_2 = 27$.

Solução: O polinômio característico é $\Delta(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Logo, $a_n = c_1(3)^n + c_2 n(3)^n$. Pelas condições iniciais, temos as duas igualdades: $3c_1 + 3c_2 = 3$ e $9c_1 + 18c_2 = 27$. Cujas solução é $c_1 = -1, c_2 = 2$. Logo, a solução da relação de recorrência é $a_n = (-1)3^n + 2n3^n = (2n - 1)3^n$.



1.4 Conclusão

Na aula de hoje, apresentamos o princípio da indução, um instrumento eficiente para demonstrações envolvendo números naturais. Vimos ainda o que é uma relação de recorrência e como obter

a solução de relações de recorrência homogêneas com coeficientes lineares constantes.

RESUMO



O princípio da indução diz que: se uma afirmação $A(n)$ é válida para $n = 1$ e sempre que $A(k)$ for válida pudermos concluir a validade de $A(k + 1)$, então $A(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma segunda forma do princípio da indução diz que se $X \subset \mathbb{N}$ é um conjunto com a propriedade de, dado um $n \in \mathbb{N}$, possuir todos os naturais menores do que n , implicar em $n \in X$. Então $X = \mathbb{N}$.

Uma função é recorrente se a definição dela se referir a ela mesma. Para que sua definição não seja circular devemos ter: (1) valores bases nos quais a função não se refere a si mesma; (2) cada vez que a função se referir a si própria, o argumento da função se aproxima de um valor base.

Se r_1, r_2 são raízes distintas do polinômio característico $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ da relação de recorrência $a_n - sa_{n-1} - ta_{n-2} = 0$, então sua solução é $a_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$, onde c_1, c_2 são constantes unicamente determinadas pelas condições iniciais. Se $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ possui única raiz real r_0 , então $a_n = c_1r_0^n + c_2nr_0^n$ é a solução com c_1, c_2 obtidas como antes.



PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, estudaremos os princípios da contagem. Para acompanhá-la bem, é recomendado que você domine o princípio da indução. Caso ainda não se sinta seguro, volte e faça uma nova leitura da seção 1.2. Aproveite e tente resolver as atividades referentes a este princípio selecionadas a seguir.



ATIVIDADES

ATIVIDADE 1.1. Prove, por indução, que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

ATIVIDADE 1.2. Prove, por indução, a desigualdade de Bernoulli:

$$(1+a)^n > 1+na \text{ quando } 1+a > 0.$$

ATIVIDADE 1.3. Demonstre que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{200}.$$

ATIVIDADE 1.4. Determine A^n se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

ATIVIDADE 1.5. São dados três suportes A, B e C . No suporte A estão encaixados n discos cujos diâmetros, de baixo para cima,

estão em ordem estritamente decrescente. Mostre que é possível, com $2n - 1$ movimentos, transferir todos os discos para o suporte B , usando o suporte C como auxiliar, de modo que jamais, durante a operação, um disco maior fique sobre um disco menor.

ATIVIDADE 1.6. Considere n retas em um plano. Mostre que o "mapa" determinado por elas pode ser colorido com apenas duas cores sem que duas regiões vizinhas tenham a mesma cor.

ATIVIDADE 1.7. Defina, por recorrência, uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estipulando que $f(1) = 3$ e $f(n + 1) = 5f(n) + 1$. Dê uma fórmula explícita para $f(n)$.

ATIVIDADE 1.8. Demonstre o teorema (1.3).

ATIVIDADE 1.9. Ache o polinômio característico $\Delta(x)$ e a solução geral de cada relação de recorrência:

1. $a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2}$

2. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$

ATIVIDADE 1.10. Dadas as condições iniciais a seguir, ache a solução única de cada relação de recorrência da atividade anterior:

1. $a_0 = 5, a_1 = 11$

2. $a_0 = 2, a_1 = -8$

ATIVIDADE 1.11. Determine a solução única das seguintes relações de recorrência:

1. $a_0 = 5, a_1 = 11, a_2 = 25, a_n = 11a_{n-1} - 39a_{n-2} + 45a_{n-3}$

2. $a_0 = 5, a_1 = 24, a_2 = 117, a_n = 9a_{n-1} - 27a_{n-2} + 27a_{n-3}$



REFERÊNCIAS

LIMA, E.L. Curso de Análise. vol.1. IMPA: Rio de Janeiro, 2009.

LIPSCHUTZ,S., LIPSON, M. Matemática Discreta. Coleção Schaum.

Bookman: São Paulo, 2004.

SANTOS, J.P.O., et al. Introdução à Análise Combinatória. Moderna: Rio de Janeiro, 2007.