Matemática Discreta

Wagner Ferreira Santos

CESAD
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA - UFS

São Cristóvão/SE
2010

Matemática Discreta

Elaboração de Conteúdo
Wagner Ferreira Santos

FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Santos. Wagner Ferreira
S237t Matemática Discreta / Wagner Ferreira Santos -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2010.

1. Matemática . I. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

AULA 1

Indução e Recorrência

META

- Introduzir o princípio de indução e funções definidas de forma recursiva.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

- Demonstrar, pelo princípio da indução, afirmações matemáticas envolvendo os números naturais;
- Identificar funções definidas recursivamente;
- Resolver funções recursivas.

1.1 Introdução

Caro aluno, bem vindo à nossa aula inaugural do curso de matemática discreta. Inicialmente estudaremos o princípio da indução, uma ferramenta matemática eficiente quando se deseja fazer demonstrações envolvendo o conjunto dos números naturais. Uma associação que podemos fazer com este princípio é o da figura que ilustra esta aula: uma fileira de dominós. Se um dominó cair, derrubará o dominó que está à sua frente, e este o próximo, e assim sucessivamente. Então, derrubando-se o primeiro dominó, derrubaremos todos os dominós que estão enfileirados. Em seguida, passaremos ao estudo das relações de recorrência, inclusive das velhas conhecidas progressões aritmética e geométrica. Para finalizar a aula, aprenderemos a resolver relações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes.

1.2 O Princípio da Indução

Considere $X \subset \mathbb{N}$. O princípio da indução diz que se:

(1) $1 \in X$;

(2) $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$

Então $X = \mathbb{N}$.

Este princípio é um eficiente instrumento para demonstração de fatos referentes aos números naturais. Entendê-lo é praticamente o mesmo que entender os números naturais. Vejamos uns exemplos:

Exemplo 1.1 (Soma dos n primeiros naturais)**.** Prove que a soma dos n primeiros naturais é $\frac{n(n+1)}{2}$.

Solução: Seja $X = \left\{ n \in \mathbb{N}/1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right\}$. Então:

(1) $1 = \frac{1.2}{2}$, o que implica em $1 \in X$;

(2) Supondo que $k \in X$, segue que

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + k + (k+1) &= (1 + \cdots + k) + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Portanto $k + 1 \in X$.

Logo, pelo princípio da indução, $X = \mathbb{N}$. ◀

Exemplo 1.2 (A soma dos n primeiros ímpares)**.** Prove que a soma dos n primeiros ímpares é n^2.

Solução: A soma dos n primeiros ímpares pode ser escrita como $1+\cdots+(2n-1)$. Desejamos mostrar então que $1+\cdots+(2n-1) = n^2$. De fato,

(1) Para $n = 1, 1 = 1^2$. E a fórmula é válida para $n = 1$;

(2) Suponha que $1 + \cdots + (2k-1) = k^2$. Então

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) &= (1 + \cdots + (2k-1)) + (2k+1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2, \end{aligned}$$

isto é, a fórmula é válida para $n = k + 1$.

Portanto, pelo princípio da indução, a fórmula é válidade para todo $n \in \mathbb{N}$. ◀

Exemplo 1.3 (Soma de frações)**.** Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Solução: Pelo princípio da indução, desde que:

(1) Para $n = 1$, $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$, logo a fórmula é válida para $n = 1$;

(2) Supondo válida para $n = k$ temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \left(\frac{1}{k+1}\right)\left(k + \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{k^2+2k+1}{k+2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{(k+1)^2}{k+2}\right) \\
&= \frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}$$

Então vale para $n = k + 1$;

segue que a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ◀

Exemplo 1.4 (Divisibilidade por 3)**.** Mostre que a proposição

$$P(n) : 2^{2n} - 1 \text{ é divisível por } 3$$

é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução: Com efeito,

(1) Para $n = 1, P(1) : 3$ é divisível por 3 é verdade;

(2) Suponha que a proposição $P(k)$ seja verdade, isto é, que para algum $m \in \mathbb{N}, 2^{2k} - 1 = 3m$. Então a proposição $P(k + 1)$

é $2^{2k+2} - 1$ é divisível por 3. Mostremos que ela é verdade. Note que podemos escrever

$$\begin{aligned} 2^{2k+2} - 1 &= 2^2.2^{2k} - 1 \\ &= 4.2^{2k} - 1 \\ &= (3.2^{2k} + 1.2^{2k}) - 1 \\ &= 3.2^{2k} + (2^{2k} - 1) \\ &= 3.2^{2k} + 3m \\ &= 3(2^{2k} + m) \end{aligned}$$

Mostrando que $2^{2k+2} - 1$ é divisível por 3.

Assim, pelo princípio da indução, segue que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ◀

1.2.1 Segundo Princípio da Indução

Em algumas situações, ao tentarmos fazer uma demonstração por indução, na passagem de n para $n + 1$, sentimos necessidade de admitir que a proposição valha não apenas para n e sim para todos os números naturais menores ou iguais a n. Com esse intuito, apresentamos o Segundo Princípio da Indução.

Teorema 1.1 (Segundo Princípio da Indução)**.** *Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade:*

- *Dado $n \in \mathbb{N}$, se todos os naturais menores do que n pertencem a X, então $n \in X$.*

Então $X = \mathbb{N}$.

Demonstração: (Por absurdo) Com efeito, suponha por absurdo que $X \neq \mathbb{N}$, isto é, $\mathbb{N} - X \neq \emptyset$. Seja n o menor elemento do conjunto $\mathbb{N}-X$, ou seja, o menor número natural n tal que $n \notin X$. Isto quer dizer que todos os números naturais menores do que n pertencem a X. Mas então, pela propriedade que o conjunto X possui, segue que $n \in X$, uma contradição (pois não pode ocorrer $x \in X$ e $x \notin X$). Portanto, $\mathbb{N} - X = \emptyset$ e $X = \mathbb{N}$. □

Exemplo 1.5 (Decomposição de um polígono)**.** Qualquer que seja a maneira de decompor um polígono P, de n lados, em triângulos justapostos por meio de diagonais internas que não se intersectam, o número de diagonais utilizadas é sempre $n-3$.

Solução: Com efeito, dado n, suponhamos que a proposição acima seja verdadeira para todo polígono com menos de n lados. Seja então dada uma decomposição do polígono P, de n lados, em triângulos justapostos, mediante diagonais internas. Fixemos uma dessas diagonais. Ela decompõe P como reunião de dois polígonos justapostos P_1, de n_1 lados, e P_2, de n_2 lados, onde $n_1 < n$ e $n_2 < n$, logo a proposição vale para os polígonos P_1 e P_2. Observe que o lado comum aos polígonos P_1 e P_2 é uma diagonal interna fixa do polígono P, então $n_1 + n_2 = n + 2$. As d diagonais que efetuam a decomposição de P se agrupam assim: $n_1 - 3$ delas decompõem P_1, $n_2 - 3$ decompõem P_2 e uma foi usada para separar P_1 de P_2. Portanto

$$\begin{aligned} d &= (n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 \\ &= (n_1 + n_2) - 5 \\ &= (n + 2) - 5 \\ &= n - 3 \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração. ◀

1.3 Relações de Recorrência

Uma função é dita recorrente se a definição da função se referir à própria função. Para que a função recorrente esteja bem definida, isto é, a fim de sua definição não ser circular, é preciso que satisfaça as seguintes propriedades:

1. Existem argumentos, ditos valores base, nos quais a função não se refere a ela mesma;

2. Cada vez que a função se referir a si própria, o argumento da função se aproxima de um valor base.

Exemplo 1.6. Defina:

$$\text{(Fatorial)}\;\; n! = \begin{cases} 1 & \text{, se } n = 0 \\ n(n-1)! & \text{, se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{(Fibonacci)}\;\; F_n = \begin{cases} n & \text{, se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ F_{n-2} + F_{n-1} & \text{, se } n \in \mathbb{N} - \{1\} \end{cases}$$

$$\text{(Ackermann)}\;\; A(n,m) = \begin{cases} n+1 & \text{, se } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{, se } m \neq 0 \text{ e } n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{, se } n, m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

◀

Será possível escrever tais funções sem ser de forma recorrente? Passaremos agora a discutir certos tipos de sequências $\{a_n\}$ recorrentes e suas soluções.

Exemplo 1.7 (Progressão Aritmética)**.** Obter a solução geral da progressão aritmética, uma sequência recorrente definida por:

$$a_n = \begin{cases} a & \text{, se } n = 0 \\ a_{n-1} + r & \text{, se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Solução: Notamos que $a_0 = a, a_1 = a + r, \ldots$, em geral, $a_n = a + nr$. Provando pelo princípio de indução temos:

1. Para $n = 0, a_0 = a = a + 0r$. Então é verdade para $n = 0$;

2. Supondo válido para $n = k$, como $a_{k+1} = a_k + r$ segue que $a_{k+1} = (a + kr) + r = a + (k + 1)r$. Logo é verdade para $n = k + 1$.

Portanto, pelo princípio de indução, $a_n = a + nr$ é solução da relação de recorrência. ◀

Exemplo 1.8 (Progressão Geométrica)**.** Obter a solução geral da progressão geométrica, uma sequência recorrente definida por:

$$a_n = \begin{cases} a & \text{, se } n = 0 \\ a_{n-1}r & \text{, se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Solução: É fácil observar que $a_0 = a, a_1 = ar, \ldots$, em geral, $a_n = ar^n$. Provemos por indução:

1. Para $n = 0, a_0 = a = ar^0$. Então é verdade para $n = 0$;

2. Supondo válido para $n = k$, como $a_{k+1} = a_k r$ segue que $a_{k+1} = (ar^k)r = ar^{k+1}$. Logo é verdade para $n = k + 1$.

Portanto, pelo princípio de indução, $a_n = ar^n$ é solução da relação de recorrência. ◀

1.3.1 Lineares com Coeficientes Constantes

Uma relação de recorrência de ordem k é uma sequência da forma

$$a_n = \phi(a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}, n),$$

isto é, o n-ésimo termo a_n da sequência é função dos k termos precedentes (e de n, possivelmente). Em particular, uma relação de recorrência de ordem k com coeficientes constantes é uma relação de recorrência da forma

$$a_n = C_1 a_{n-1} + \cdots + C_k a_{n-k} + f(n),$$

onde $C_1, \ldots, C_k$ são constantes com $C_k \neq 0$ e $f(n)$ é uma função de n. Dizemos que ela é linear porque não existem potências ou produtos dos termos a_i E possui coeficientes constantes pois $C_1, \ldots, C_k$ são constantes, isto é, não dependem de n. Se $f(n) = 0$, a relação é dita homogênea.

Se conhecermos os valores de $a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}$ podemos obter solução única de a_n. Consequentemente, pelo princípio da indução, existe uma única sequência satisfazendo a relação de recorrência se são dados os valores iniciais para os primeiros k elementos da sequência.

Exemplo 1.9 (Algumas Relações de Recorrência)**.** Classifique as relações de recorrência abaixo:

(a) $a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} + n^2$;

(b) $a_n = 2a_{n-1}a_{n-2} + n^2$;

(c) $a_n = na_{n-1} + 3a_{n-2}$;

(d) $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$;

Solução: A relação de recorrência (a) é de segunda ordem com coeficientes constantes não-homogênea. Já (b) possui o produto $a_{n-1}a_{n-2}$ que a torna não-linear. Por sua vez, o coeficiente que multiplica o termo a_{n-1} em (c) não é constante. Por fim, (d) é uma relação de recorrência linear homogênea de terceira ordem com coeficientes constantes. ◀

A partir de agora investigaremos as soluções de relações de recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes. Considere uma relação de recorrência homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes com a forma

$$a_n = sa_{n-1} + ta_{n-2},$$

com s, t constantes e $t \neq 0$. Associamos o polinômio $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ à relacão de recorrência acima. O polinômio $\Delta(x)$ é dito polinômio característico da relação de recorrência e suas raízes são ditas raízes características.

Teorema 1.2. *Se o polinômio característico $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ da relação $a_n - sa_{n-1} - ta_{n-2} = 0$ tem raízes distintas r_1, r_2, então a solução geral da relação de recorrência é*

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n,$$

onde c_1, c_2 são constantes arbitrárias que são unicamente determinados pelas condições iniciais.

Demonstração: Seja $a_n = x^n$ solução da relação de recorrência $a_n - sa_{n-1} - ta_{n-2} = 0$. então

$$\begin{aligned} x^n - sx^{n-1} - tx^{n-2} &= 0 \\ x^{n-2}(x^2 - sx - t) &= 0 \\ x^{n-2}\Delta(x) &= 0 \end{aligned}$$

Sendo r_1, r_2 raízes distintas do polinômio característico $\Delta(x)$ e considerando $x^{n-2} \neq 0$ segue que $a_n = r_1^n$ e $a_n = r_2^n$ são soluções da relação de recorrência. Na verdade, qualquer combinação linear de suas soluções é solução da relação, isto é,

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

é solução da relação de recorrência. $\square$

Exemplo 1.10 (Solução de uma relação de recorrência)**.** Considere a relação de recorrência

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2},$$

com condições iniciais $a_0 = 1, a_1 = 2$. Determine sua solução.

Solução: A solução geral é obtida pela determinação das raízes do polinômio característico

$$\Delta(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

Portanto, $a_n = c_1(3)^n + c_2(-1)^n$. Pelas condições iniciais, devemos ter ainda

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ 3c_1 - c_2 &= 2 \end{aligned}$$

A solução do sistema é $c_1 = \frac{3}{4}$ e $c_2 = \frac{1}{4}$. Logo, a solução da relação de recorrência é

$$a_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}$$

◀

Exemplo 1.11 (Solução de Fibonacci)**.** Obter a solução da relação de Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com $F_0 = 0, F_1 = 1$.

Solução: O polinômio característico da relação de Fibonacci é $\Delta(x) = x^2 - x - 1$ cujas raízes são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Logo $a_n =$

$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Pelas condições iniciais, segue que

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} &= 1 \end{aligned}$$

A solução do sistema é $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Portanto,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

◀

Teorema 1.3. *Se o polinômio característico $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ da relação de recorrência $a_n = sa_{n-1} + ta_{n-2}$ tem apenas uma raiz r_0, então a solução da relação de recorrência é $a_n = c_1 r_0^n + c_2 n r_o^n$, onde c_1, c_2 são constantes arbitrárias, que são unicamente determinadas a partir das condições iniciais.*

Exemplo 1.12 (Polinômio característico com apenas uma raiz)**.** Encontrar a solução da relação de recorrência $a_n = 6a_{n-1} + 9a_{n-2}$ cujas condições iniciais são $a_1 = 3, a_2 = 27$.

Solução: O polinômio característico é $\Delta(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$. Logo, $a_n = c_1(3)^n + c_2 n(3)^n$. Pelas condições iniciais, temos as duas igualdades: $3c_1 + 3c_2 = 3$ e $9c_1 + 18c_2 = 27$. Cuja solução é $c_1 = -1, c_2 = 2$. Logo, a solução da relação de recorrência é $a_n = (-1)3^n + 2n3^n = (2n-1)3^n$. ◀

1.4 Conclusão

Na aula de hoje, apresentamos o princípio da indução, um instrumento eficiente para demonstrações envolvendo números naturais. Vimos ainda o que é uma relação de recorrência e como obter a solução de relações de recorrência homogêneas com coeficientes lineares constantes.

RESUMO

O princípio da indução diz que: se uma afirmação $A(n)$ é válida para $n = 1$ e sempre que $A(k)$ for válida pudermos concluir a validade de $A(k+1)$, então $A(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma segunda forma do princípio da indução diz que se $X \subset \mathbb{N}$ é um conjunto com a propriedade de, dado um $n \in \mathbb{N}$, possuir todos os naturais menores do que n, implicar em $n \in X$. Então $X = N$.

Uma função é recorrente se a definição dela se referir a ela mesma. Para que sua definição não seja circular devemos ter:(1) valores bases nos quais a função não se refere a si mesma; (2) cada vez que a função se referir a si própria, o argumento da função se aproxima de um valor base.

Se r_1, r_2 são raízes distintas do polinômio característico $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ da relação de recorrência $a_n - sa_{n-1} - ta_{n-2} = 0$, então sua solução é $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, onde c_1, c_2 são constantes unicamente determinadas pelas condições iniciais. Se $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ possui única raiz real r_0, então $a_n = c_1 r_0^n + c_2 n r_0^n$ é a solução com c_1, c_2 obtidas como antes.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, estudaremos os princípios da contagem. Para acompanhá-la bem, é recomendado que você domine o princípio da indução. Caso ainda não se sinta seguro, volte e faça uma nova leitura da seção 1.2. Aproveite e tente resolver as atividades referentes a este princípio selecionadas a seguir.

ATIVIDADES

ATIVIDADE 1.1. Prove, por indução, que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

ATIVIDADE 1.2. Prove, por indução, a desigualdade de Bernoulli:

$$(1+a)^n > 1 + na \text{ quando} 1 + a > 0.$$

ATIVIDADE 1.3. Demonstre que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{200}.$$

ATIVIDADE 1.4. Determine A^n se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

ATIVIDADE 1.5. São dados três suportes A, B e C. No suporte A estão encaixados n discos cujos diâmetros, de baixo para cima, estão em ordem estritamente decrescente. Mostre que é possível, com $2n-1$ movimentos, transferir todos os discos para o suporte B, usando o suporte C como auxiliar, de modo que jamais, durante a operação, um disco maior fique sobre um disco menor.

ATIVIDADE 1.6. Considere n retas em um plano. Mostre que o "mapa"determinado por elas pode ser colorido com apenas duas cores sem que duas regiões vizinhas tenham a mesma cor.

ATIVIDADE 1.7. Defina, por recorrência, uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estipulando que $f(1) = 3$ e $f(n+1) = 5f(n) + 1$. Dê uma fórmula explícita para $f(n)$.

ATIVIDADE 1.8. Demonstre o teorema (1.3).

ATIVIDADE 1.9. Ache o polinômio característico $\Delta(x)$ e a solução geral de cada relação de recorrência:

1. $a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2}$

2. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$

ATIVIDADE 1.10. Dadas as condições iniciais a seguir, ache a solução única de cada relação de recorrência da atividade anterior:

1. $a_0 = 5, a_1 = 11$

2. $a_0 = 2, a_1 = -8$

ATIVIDADE 1.11. Determine a solução única das seguintes relações de recorrência:

1. $a_0 = 5, a_1 = 11, a_2 = 25, a_n = 11a_{n-1} - 39a_{n-2} + 45a_{n-3}$

2. $a_0 = 5, a_1 = 24, a_2 = 117, a_n = 9a_{n-1} - 27a_{n-2} + 27a_{n-3}$

REFERÊNCIAS

LIMA, E.L. Curso de Análise. vol.1. IMPA: Rio de Janeiro, 2009.

LIPSCHUTZ,S., LIPSON, M. Matemática Discreta. Coleção Schaum. Bookman: São Paulo, 2004.

SANTOS, J.P.O., et al. Introdução à Análise Combinatória. Moderna: Rio de Janeiro, 2007.