

Matemática Discreta

Wagner Ferreira Santos



São Cristóvão/SE
2010

Matemática Discreta

Elaboração de Conteúdo

Wagner Ferreira Santos

Copyright © 2010 , Universidade Federal de Sergipe / CESAD.
Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização por escrito da UFS.

**FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Santos. Wagner Ferreira
S237t Matemática Discreta / Wagner Ferreira Santos -- São
Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2010.

1. Matemática . I. Título.

CDU 51

Presidente da República
Luiz Inácio Lula da Silva

Chefe de Gabinete
Ednalva Freire Caetano

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Coordenador Geral da UAB/UFS
Diretor do CESAD
Antônio Ponciano Bezerra

Secretário de Educação a Distância
Carlos Eduardo Bielschowsky

Vice-coordenador da UAB/UFS
Vice-diretor do CESAD
Fábio Alves dos Santos

Reitor
Josué Modesto dos Passos Subrinho

Vice-Reitor
Angelo Roberto Antonioli

Diretoria Pedagógica
Clotildes Farias de Sousa (Diretora)

Núcleo de Serviços Gráficos e Audiovisuais
Giselda Barros

Diretoria Administrativa e Financeira
Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)
Sylvia Helena de Almeida Soares
Valter Siqueira Alves

Núcleo de Tecnologia da Informação
João Eduardo Batista de Deus Anselmo
Marcel da Conceição Souza
Raimundo Araujo de Almeida Júnior

Coordenação de Cursos
Djalma Andrade (Coordenadora)

Assessoria de Comunicação
Edvar Freire Caetano
Guilherme Borba Gouy

Núcleo de Formação Continuada
Rosemeire Marcedo Costa (Coordenadora)

Núcleo de Avaliação
Hérica dos Santos Matos (Coordenadora)
Carlos Alberto Vasconcelos

Coordenadores de Curso
Denis Menezes (Letras Português)
Eduardo Farias (Administração)
Haroldo Dorea (Química)
Hassan Sherafat (Matemática)
Hélio Mario Araújo (Geografia)
Lourival Santana (História)
Marcelo Macedo (Física)
Silmara Pantaleão (Ciências Biológicas)

Coordenadores de Tutoria
Edvan dos Santos Sousa (Física)
Geraldo Ferreira Souza Júnior (Matemática)
Janaína Couvo T. M. de Aguiar (Administração)
Priscila Viana Cardozo (História)
Rafael de Jesus Santana (Química)
Ítala Santana Souza (Geografia)
Trícia C. P. de Sant'ana (Ciências Biológicas)
Vanessa Santos Góes (Letras Português)
Lívia Carvalho Santos (Presencial)

NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO

Hermeson Menezes (Coordenador)
Arthur Pinto R. S. Almeida
Carolina Faccioli dos Santos
Cássio Pitter Silva Vasconcelos

Isabela Pinheiro Ewerton
Lucas Barros Oliveira
Neverton Correia da Silva
Nycolas Menezes Melo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

AULA 1: Indução e Recorrência	7
1.1 Introdução	8
1.2 O Princípio da Indução	8
1.2.1 Segundo Princípio da Indução	11
1.3 Relações de Recorrência	13
1.3.1 Lineares com Coeficientes Constantes	14
1.4 Conclusão	18
RESUMO	19
PRÓXIMA AULA	20
ATIVIDADES	20
REFERÊNCIAS	22
AULA 2: Princípios de Contagem	23
2.1 Introdução	24
2.2 Contagem	25
2.3 Princípio da Soma	25
2.3.1 Conjuntos Disjuntos	25
2.3.2 Conjuntos Quaisquer	26
2.4 Princípio do Produto	32
2.5 Princípio da Inclusão-Exclusão	34
2.5.1 <i>Aplicação: Função de Euler</i>	39

2.6	Princípio da Casa dos Pombos	40
2.6.1	Generalizações	41
2.7	Conclusão	44
	RESUMO	45
	PRÓXIMA AULA	46
	ATIVIDADES	46
	REFERÊNCIAS	48
 AULA 3: Arranjos, Permutações e Combinações		49
3.1	Introdução	50
3.2	Arranjos Simples	50
3.3	Arranjos com Repetição	52
3.4	Permutações Simples	54
3.5	Combinações Simples	54
3.6	Combinações Complementares	55
3.7	Combinações com repetição	57
3.8	Permutação com repetição	58
3.9	Permutações circulares	59
3.10	Conclusão	60
	RESUMO	61
	PRÓXIMA AULA	62
	ATIVIDADES	62
	REFERÊNCIAS	64
 AULA 4: Expansões		65
4.1	Introdução	66
4.2	Coeficientes Binomiais	66
4.3	Expansão Binomial	68
4.3.1	Expansão Recorrente	68

4.3.2	Expansão de Newton	70
4.4	Expansão Multinomial	72
4.5	Conclusão	75
	RESUMO	76
	PRÓXIMA AULA	77
	ATIVIDADES	77
	REFERÊNCIAS	79
 AULA 5: Funções Geradoras		 81
5.1	Introdução	82
5.2	Função Geradora Ordinária	82
5.3	Cálculo de funções geradoras	84
5.4	Função geradora exponencial	86
5.5	<i>Aplicação 1: Polinômios de Torres</i>	89
5.6	<i>Aplicação 2: Permutações com Posições Interditadas</i>	92
5.7	Conclusão	95
	RESUMO	96
	PRÓXIMA AULA	97
	ATIVIDADES	98
	REFERÊNCIAS	100
 AULA 6: Algoritmos		 101
6.1	Introdução	102
6.2	Livros e Algoritmos	102
6.3	Fibonacci	104
6.4	Algoritmos Numéricos	106
6.5	Notação O	109
6.6	Conclusão	110
	RESUMO	110

PRÓXIMA AULA	111
ATIVIDADES	111
REFERÊNCIAS	113
AULA 7: Grafos	115
7.1 Introdução	116
7.2 Noções Elementares	116
7.3 Árvores	121
7.4 Isomorfismo	124
7.5 Grafos Famosos	126
7.6 Conclusão	129
RESUMO	130
PRÓXIMA AULA	131
ATIVIDADES	131
REFERÊNCIAS	133
AULA 8: Roteamentos	135
8.1 Introdução	136
8.2 Circuito Euleriano	136
8.3 Grafos Bipartidos	140
8.4 Ciclo Hamiltoniano	142
8.5 Problema do caminho mais curto	145
8.6 Conclusão	148
RESUMO	149
PRÓXIMA AULA	150
ATIVIDADES	150
REFERÊNCIAS	152

AULA 9: Planaridade	153
9.1 Introdução	154
9.2 Grafos Mergulháveis em Superfícies	154
9.3 Grafo Dual	156
9.4 A Fórmula de Euler	158
9.5 Teorema de Kuratowski	159
9.6 Planaridade e Grafos Hamiltonianos	160
9.7 Conclusão	162
RESUMO	163
PRÓXIMA AULA	164
ATIVIDADES	165
REFERÊNCIAS	168
AULA 10: Coloração	169
10.1 Introdução	170
10.2 Coloração de Vértices	170
10.2.1 Polinômios Cromáticos	170
10.2.2 Número Cromático	177
10.3 Coloração de Arestas	180
10.4 Conclusão	184
RESUMO	184
ATIVIDADES	186
REFERÊNCIAS	188

Indução e Recorrência

META

- Introduzir o princípio de indução e funções definidas de forma recursiva.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

- Demonstrar, pelo princípio da indução, afirmações matemáticas envolvendo os números naturais;
- Identificar funções definidas recursivamente;
- Resolver funções recursivas.



1.1 Introdução

Caro aluno, bem vindo à nossa aula inaugural do curso de matemática discreta. Inicialmente estudaremos o princípio da indução, uma ferramenta matemática eficiente quando se deseja fazer demonstrações envolvendo o conjunto dos números naturais. Uma associação que podemos fazer com este princípio é o da figura que ilustra esta aula: uma fileira de dominós. Se um dominó cair, derrubará o dominó que está à sua frente, e este o próximo, e assim sucessivamente. Então, derrubando-se o primeiro dominó, derrubaremos todos os dominós que estão enfileirados. Em seguida, passaremos ao estudo das relações de recorrência, inclusive das velhas conhecidas progressões aritmética e geométrica. Para finalizar a aula, aprenderemos a resolver relações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes.

1.2 O Princípio da Indução

Considere $X \subset \mathbb{N}$. O princípio da indução diz que se:

- (1) $1 \in X$;
- (2) $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$

Então $X = \mathbb{N}$.

Este princípio é um eficiente instrumento para demonstração de fatos referentes aos números naturais. Entendê-lo é praticamente o mesmo que entender os números naturais. Vejamos uns exemplos:

Exemplo 1.1 (Soma dos n primeiros naturais). Prove que a soma dos n primeiros naturais é $\frac{n(n+1)}{2}$.

Solução: Seja $X = \left\{ n \in \mathbb{N} / 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right\}$. Então:

(1) $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, o que implica em $1 \in X$;

(2) Supondo que $k \in X$, segue que

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + k + (k + 1) &= (1 + \cdots + k) + (k + 1) \\ &= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) \\ &= (k + 1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \end{aligned}$$

Portanto $k + 1 \in X$.

Logo, pelo princípio da indução, $X = \mathbb{N}$. ◀

Exemplo 1.2 (A soma dos n primeiros ímpares). Prove que a soma dos n primeiros ímpares é n^2 .

Solução: A soma dos n primeiros ímpares pode ser escrita como $1 + \cdots + (2n - 1)$. Desejamos mostrar então que $1 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. De fato,

(1) Para $n = 1$, $1 = 1^2$. E a fórmula é válida para $n = 1$;

(2) Suponha que $1 + \cdots + (2k - 1) = k^2$. Então

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) &= (1 + \cdots + (2k - 1)) + (2k + 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2, \end{aligned}$$

isto é, a fórmula é válida para $n = k + 1$.

Portanto, pelo princípio da indução, a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ◀

Exemplo 1.3 (Soma de frações). Mostre que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Solução: Pelo princípio da indução, desde que:

- (1) Para $n = 1$, $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, logo a fórmula é válida para $n = 1$;
- (2) Supondo válida para $n = k$ temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \left(\frac{1}{k+1}\right) \left(k + \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{k+1}\right) \left(\frac{k^2 + 2k + 1}{k+2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{k+1}\right) \left(\frac{(k+1)^2}{k+2}\right) \\ &= \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

Então vale para $n = k + 1$;

segue que a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ◀

Exemplo 1.4 (Divisibilidade por 3). Mostre que a proposição

$$P(n) : 2^{2n} - 1 \text{ é divisível por } 3$$

é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução: Com efeito,

- (1) Para $n = 1$, $P(1) : 3$ é divisível por 3 é verdade;
- (2) Suponha que a proposição $P(k)$ seja verdade, isto é, que para algum $m \in \mathbb{N}$, $2^{2k} - 1 = 3m$. Então a proposição $P(k + 1)$

é $2^{2k+2} - 1$ é divisível por 3. Mostremos que ela é verdade.

Note que podemos escrever

$$\begin{aligned}2^{2k+2} - 1 &= 2^2 \cdot 2^{2k} - 1 \\ &= 4 \cdot 2^{2k} - 1 \\ &= (3 \cdot 2^{2k} + 1 \cdot 2^{2k}) - 1 \\ &= 3 \cdot 2^{2k} + (2^{2k} - 1) \\ &= 3 \cdot 2^{2k} + 3m \\ &= 3(2^{2k} + m)\end{aligned}$$

Mostrando que $2^{2k+2} - 1$ é divisível por 3.

Assim, pelo princípio da indução, segue que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ◀

1.2.1 Segundo Princípio da Indução

Em algumas situações, ao tentarmos fazer uma demonstração por indução, na passagem de n para $n + 1$, sentimos necessidade de admitir que a proposição valha não apenas para n e sim para todos os números naturais menores ou iguais a n . Com esse intuito, apresentamos o Segundo Princípio da Indução.

Teorema 1.1 (Segundo Princípio da Indução). *Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade:*

- *Dado $n \in \mathbb{N}$, se todos os naturais menores do que n pertencem a X , então $n \in X$.*

Então $X = \mathbb{N}$.

Demonstração: (Por absurdo) Com efeito, suponha por absurdo que $X \neq \mathbb{N}$, isto é, $\mathbb{N} - X \neq \emptyset$. Seja n o menor elemento do

conjunto $\mathbb{N} - X$, ou seja, o menor número natural n tal que $n \notin X$. Isto quer dizer que todos os números naturais menores do que n pertencem a X . Mas então, pela propriedade que o conjunto X possui, segue que $n \in X$, uma contradição (pois não pode ocorrer $x \in X$ e $x \notin X$). Portanto, $\mathbb{N} - X = \emptyset$ e $X = \mathbb{N}$. \square

Exemplo 1.5 (Decomposição de um polígono). Qualquer que seja a maneira de decompor um polígono P , de n lados, em triângulos justapostos por meio de diagonais internas que não se intersectam, o número de diagonais utilizadas é sempre $n - 3$.

Solução: Com efeito, dado n , suponhamos que a proposição acima seja verdadeira para todo polígono com menos de n lados. Seja então dada uma decomposição do polígono P , de n lados, em triângulos justapostos, mediante diagonais internas. Fixemos uma dessas diagonais. Ela decompõe P como reunião de dois polígonos justapostos P_1 , de n_1 lados, e P_2 , de n_2 lados, onde $n_1 < n$ e $n_2 < n$, logo a proposição vale para os polígonos P_1 e P_2 . Observe que o lado comum aos polígonos P_1 e P_2 é uma diagonal interna fixa do polígono P , então $n_1 + n_2 = n + 2$. As d diagonais que efetuam a decomposição de P se agrupam assim: $n_1 - 3$ delas decompõem P_1 , $n_2 - 3$ decompõem P_2 e uma foi usada para separar P_1 de P_2 . Portanto

$$\begin{aligned} d &= (n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 \\ &= (n_1 + n_2) - 5 \\ &= (n + 2) - 5 \\ &= n - 3 \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração. \blacktriangleleft

1.3 Relações de Recorrência

Uma função é dita recorrente se a definição da função se referir à própria função. Para que a função recorrente esteja bem definida, isto é, a fim de sua definição não ser circular, é preciso que satisfaça as seguintes propriedades:

1. Existem argumentos, ditos valores base, nos quais a função não se refere a ela mesma;
2. Cada vez que a função se referir a si própria, o argumento da função se aproxima de um valor base.

Exemplo 1.6. Defina:

$$\text{(Fatorial)} \quad n! = \begin{cases} 1 & , \text{ se } n = 0 \\ n(n-1)! & , \text{ se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{(Fibonacci)} \quad F_n = \begin{cases} n & , \text{ se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ F_{n-2} + F_{n-1} & , \text{ se } n \in \mathbb{N} - \{1\} \end{cases}$$

$$\text{(Ackermann)} \quad A(n, m) = \begin{cases} n + 1 & , \text{ se } m = 0 \\ A(m - 1, 1) & , \text{ se } m \neq 0 \text{ e } n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)) & , \text{ se } n, m \in \mathbb{N} \end{cases}$$



Será possível escrever tais funções sem ser de forma recorrente? Passaremos agora a discutir certos tipos de sequências $\{a_n\}$ recorrentes e suas soluções.

Exemplo 1.7 (Progressão Aritmética). Obter a solução geral da progressão aritmética, uma sequência recorrente definida por:

$$a_n = \begin{cases} a & , \text{ se } n = 0 \\ a_{n-1} + r & , \text{ se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Solução: Notamos que $a_0 = a, a_1 = a + r, \dots$, em geral, $a_n = a + nr$. Provando pelo princípio de indução temos:

1. Para $n = 0, a_0 = a = a + 0r$. Então é verdade para $n = 0$;
2. Supondo válido para $n = k$, como $a_{k+1} = a_k + r$ segue que $a_{k+1} = (a + kr) + r = a + (k + 1)r$. Logo é verdade para $n = k + 1$.

Portanto, pelo princípio de indução, $a_n = a + nr$ é solução da relação de recorrência. ◀

Exemplo 1.8 (Progressão Geométrica). Obter a solução geral da progressão geométrica, uma sequência recorrente definida por:

$$a_n = \begin{cases} a & , \text{ se } n = 0 \\ a_{n-1}r & , \text{ se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Solução: É fácil observar que $a_0 = a, a_1 = ar, \dots$, em geral, $a_n = ar^n$. Provemos por indução:

1. Para $n = 0, a_0 = a = ar^0$. Então é verdade para $n = 0$;
2. Supondo válido para $n = k$, como $a_{k+1} = a_k r$ segue que $a_{k+1} = (ar^k)r = ar^{k+1}$. Logo é verdade para $n = k + 1$.

Portanto, pelo princípio de indução, $a_n = ar^n$ é solução da relação de recorrência. ◀

1.3.1 Lineares com Coeficientes Constantes

Uma relação de recorrência de ordem k é uma sequência da forma

$$a_n = \phi(a_{n-1}, \dots, a_{n-k}, n),$$

isto é, o n -ésimo termo a_n da sequência é função dos k termos precedentes (e de n , possivelmente). Em particular, uma relação de recorrência de ordem k com coeficientes constantes é uma relação de recorrência da forma

$$a_n = C_1 a_{n-1} + \cdots + C_k a_{n-k} + f(n),$$

onde C_1, \dots, C_k são constantes com $C_k \neq 0$ e $f(n)$ é uma função de n . Dizemos que ela é linear porque não existem potências ou produtos dos termos a_i . E possui coeficientes constantes pois C_1, \dots, C_k são constantes, isto é, não dependem de n . Se $f(n) = 0$, a relação é dita homogênea.

Se conhecermos os valores de a_{n-1}, \dots, a_{n-k} podemos obter solução única de a_n . Consequentemente, pelo princípio da indução, existe uma única sequência satisfazendo a relação de recorrência se são dados os valores iniciais para os primeiros k elementos da sequência.

Exemplo 1.9 (Algumas Relações de Recorrência). Classifique as relações de recorrência abaixo:

(a) $a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} + n^2$;

(b) $a_n = 2a_{n-1}a_{n-2} + n^2$;

(c) $a_n = na_{n-1} + 3a_{n-2}$;

(d) $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$;

Solução: A relação de recorrência (a) é de segunda ordem com coeficientes constantes não-homogênea. Já (b) possui o produto $a_{n-1}a_{n-2}$ que a torna não-linear. Por sua vez, o coeficiente que multiplica o termo a_{n-1} em (c) não é constante. Por fim, (d) é

uma relação de recorrência linear homogênea de terceira ordem com coeficientes constantes. ◀

A partir de agora investigaremos as soluções de relações de recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes. Considere uma relação de recorrência homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes com a forma

$$a_n = sa_{n-1} + ta_{n-2},$$

com s, t constantes e $t \neq 0$. Associamos o polinômio $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ à relação de recorrência acima. O polinômio $\Delta(x)$ é dito polinômio característico da relação de recorrência e suas raízes são ditas raízes características.

Teorema 1.2. *Se o polinômio característico $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ da relação $a_n - sa_{n-1} - ta_{n-2} = 0$ tem raízes distintas r_1, r_2 , então a solução geral da relação de recorrência é*

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n,$$

onde c_1, c_2 são constantes arbitrárias que são unicamente determinados pelas condições iniciais.

Demonstração: Seja $a_n = x^n$ solução da relação de recorrência $a_n - sa_{n-1} - ta_{n-2} = 0$. então

$$x^n - sx^{n-1} - tx^{n-2} = 0$$

$$x^{n-2}(x^2 - sx - t) = 0$$

$$x^{n-2}\Delta(x) = 0$$

Sendo r_1, r_2 raízes distintas do polinômio característico $\Delta(x)$ e considerando $x^{n-2} \neq 0$ segue que $a_n = r_1^n$ e $a_n = r_2^n$ são soluções

da relação de recorrência. Na verdade, qualquer combinação linear de suas soluções é solução da relação, isto é,

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

é solução da relação de recorrência. \square

Exemplo 1.10 (Solução de uma relação de recorrência). Considere a relação de recorrência

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2},$$

com condições iniciais $a_0 = 1, a_1 = 2$. Determine sua solução.

Solução: A solução geral é obtida pela determinação das raízes do polinômio característico

$$\Delta(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

Portanto, $a_n = c_1(3)^n + c_2(-1)^n$. Pelas condições iniciais, devemos ter ainda

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$3c_1 - c_2 = 2$$

A solução do sistema é $c_1 = \frac{3}{4}$ e $c_2 = \frac{1}{4}$. Logo, a solução da relação de recorrência é

$$a_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}$$



Exemplo 1.11 (Solução de Fibonacci). Obter a solução da relação de Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com $F_0 = 0, F_1 = 1$.

Solução: O polinômio característico da relação de Fibonacci é $\Delta(x) = x^2 - x - 1$ cujas raízes são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Logo $a_n =$

$c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Pelas condições iniciais, segue que

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} &= 1 \end{aligned}$$

A solução do sistema é $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Portanto,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$



Teorema 1.3. *Se o polinômio característico $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ da relação de recorrência $a_n = sa_{n-1} + ta_{n-2}$ tem apenas uma raiz r_0 , então a solução da relação de recorrência é $a_n = c_1 r_0^n + c_2 n r_0^n$, onde c_1, c_2 são constantes arbitrárias, que são unicamente determinadas a partir das condições iniciais.*

Exemplo 1.12 (Polinômio característico com apenas uma raiz).

Encontrar a solução da relação de recorrência $a_n = 6a_{n-1} + 9a_{n-2}$ cujas condições iniciais são $a_1 = 3, a_2 = 27$.

Solução: O polinômio característico é $\Delta(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Logo, $a_n = c_1(3)^n + c_2 n(3)^n$. Pelas condições iniciais, temos as duas igualdades: $3c_1 + 3c_2 = 3$ e $9c_1 + 18c_2 = 27$. Cujas solução é $c_1 = -1, c_2 = 2$. Logo, a solução da relação de recorrência é $a_n = (-1)3^n + 2n3^n = (2n - 1)3^n$.



1.4 Conclusão

Na aula de hoje, apresentamos o princípio da indução, um instrumento eficiente para demonstrações envolvendo números naturais. Vimos ainda o que é uma relação de recorrência e como obter

a solução de relações de recorrência homogêneas com coeficientes lineares constantes.

RESUMO



O princípio da indução diz que: se uma afirmação $A(n)$ é válida para $n = 1$ e sempre que $A(k)$ for válida pudermos concluir a validade de $A(k + 1)$, então $A(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma segunda forma do princípio da indução diz que se $X \subset \mathbb{N}$ é um conjunto com a propriedade de, dado um $n \in \mathbb{N}$, possuir todos os naturais menores do que n , implicar em $n \in X$. Então $X = \mathbb{N}$.

Uma função é recorrente se a definição dela se referir a ela mesma. Para que sua definição não seja circular devemos ter: (1) valores bases nos quais a função não se refere a si mesma; (2) cada vez que a função se referir a si própria, o argumento da função se aproxima de um valor base.

Se r_1, r_2 são raízes distintas do polinômio característico $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ da relação de recorrência $a_n - sa_{n-1} - ta_{n-2} = 0$, então sua solução é $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, onde c_1, c_2 são constantes unicamente determinadas pelas condições iniciais. Se $\Delta(x) = x^2 - sx - t$ possui única raiz real r_0 , então $a_n = c_1 r_0^n + c_2 n r_0^n$ é a solução com c_1, c_2 obtidas como antes.



PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, estudaremos os princípios da contagem. Para acompanhá-la bem, é recomendado que você domine o princípio da indução. Caso ainda não se sinta seguro, volte e faça uma nova leitura da seção 1.2. Aproveite e tente resolver as atividades referentes a este princípio selecionadas a seguir.



ATIVIDADES

ATIVIDADE 1.1. Prove, por indução, que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

ATIVIDADE 1.2. Prove, por indução, a desigualdade de Bernoulli:

$$(1+a)^n > 1+na \text{ quando } 1+a > 0.$$

ATIVIDADE 1.3. Demonstre que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{200}.$$

ATIVIDADE 1.4. Determine A^n se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

ATIVIDADE 1.5. São dados três suportes A, B e C . No suporte A estão encaixados n discos cujos diâmetros, de baixo para cima,

estão em ordem estritamente decrescente. Mostre que é possível, com $2n - 1$ movimentos, transferir todos os discos para o suporte B , usando o suporte C como auxiliar, de modo que jamais, durante a operação, um disco maior fique sobre um disco menor.

ATIVIDADE 1.6. Considere n retas em um plano. Mostre que o "mapa" determinado por elas pode ser colorido com apenas duas cores sem que duas regiões vizinhas tenham a mesma cor.

ATIVIDADE 1.7. Defina, por recorrência, uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estipulando que $f(1) = 3$ e $f(n + 1) = 5f(n) + 1$. Dê uma fórmula explícita para $f(n)$.

ATIVIDADE 1.8. Demonstre o teorema (1.3).

ATIVIDADE 1.9. Ache o polinômio característico $\Delta(x)$ e a solução geral de cada relação de recorrência:

1. $a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2}$

2. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$

ATIVIDADE 1.10. Dadas as condições iniciais a seguir, ache a solução única de cada relação de recorrência da atividade anterior:

1. $a_0 = 5, a_1 = 11$

2. $a_0 = 2, a_1 = -8$

ATIVIDADE 1.11. Determine a solução única das seguintes relações de recorrência:

1. $a_0 = 5, a_1 = 11, a_2 = 25, a_n = 11a_{n-1} - 39a_{n-2} + 45a_{n-3}$

2. $a_0 = 5, a_1 = 24, a_2 = 117, a_n = 9a_{n-1} - 27a_{n-2} + 27a_{n-3}$



REFERÊNCIAS

LIMA, E.L. Curso de Análise. vol.1. IMPA: Rio de Janeiro, 2009.

LIPSCHUTZ,S., LIPSON, M. Matemática Discreta. Coleção Schaum.

Bookman: São Paulo, 2004.

SANTOS, J.P.O., et al. Introdução à Análise Combinatória. Moderna: Rio de Janeiro, 2007.