AULA 2

Princípios de Contagem

META

- Apresentar os princípio da inclusão-exclusão e da casa dos pombos.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

- Contar, utilizando o princípio da inclusão-exclusão, o número de elementos da interseção (ou união) de uma quantidade finita de conjuntos finitos;
- Aplicar a função de Euler para determinar o número de naturais menores do que n que são primos com n;
- Enunciar e resolver problemas envolvendo o princípio da casa dos pombos.

PRÉ-REQUISITOS

- Princípio da indução (aula 1).

2.1 Introdução

Prezado aluno, em nossa segunda aula estudaremos os princípios da contagem. Inicialmente, definiremos o que é uma contagem e trabalharemos conceitos fundamentais como o princípio da soma e do produto. Em seguida, introduziremos a notação de conjuntos com elementos repetidos e definiremos novas operações para estes tipos de conjuntos. Enunciaremos então o princípio da inclusão-exclusão e o crivo de Silva-Sylvestre, que irá nos auxiliar na resolução de problemas que envolvam um grande número de conjuntos. Como aplicação inicial deste princípio, falaremos um pouco sobre a função de Euler, que associa a cada natural n o número de naturais menores do que n que não primos com n. Para finalizar a aula, mudaremos um pouco o tom de nossa fala e trataremos não mais da contagem do número de soluções de um problema de combinatória, mas da existência de soluções. Então será enunciado o princípio da casa dos pombos, que é bastante intuitivo e que pode ser ilustrado pela figura abaixo. Este princípio afirma que se existem $n + 1$ pombos dentro de n gaiolas, então pelo menos uma gaiola possui mais de um pombo.

2.2 Contagem

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos o conjunto

$$J_n = \{x \in \mathbb{N}/1 \leq x \leq n\} = \{1, \ldots, n\}$$

Tal conjunto é o modelo do que chamaremos conjuntos finitos.

Definição 2.1 (Conjunto Finito)**.** Dizemos que um conjunto A é finito quando A for vazio ou quando existir uma bijeção $f : A \to J_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. No segundo caso, a função f é dita uma contagem dos elementos de A.

Sendo A um conjunto finito, denotamos por $N(A)$ o número de elementos do conjunto A. Assim, $N(A) = n$ onde o número n é aquele dado pela contagem f da definição (2.1) que sabemos ser unicamente determinado; definimos ainda $N(\emptyset) = 0$.

Aplicando-se algumas operações entre conjuntos surgem questionamentos naturais: sabendo-se o número de elementos de dois conjuntos quaisquer, é possível calcular o número de elementos da união desses dois conjuntos? E o número de elementos do produto cartesiano deles? E se forem mais de dois conjuntos? E o número de elementos na interseção de complementares? Para responder a essas perguntas, iremos estudar alguns princípios básicos de contagem.

2.3 Princípio da Soma

2.3.1 Conjuntos Disjuntos

Considere A e B dois conjuntos finitos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$). É claro que o número de elementos do conjunto união será a soma dos números de elementos de cada conjunto:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow N(A \cup B) = N(A) + N(B) \tag{2.1}$$

Se considerarmos n conjuntos finitos $A_1, \ldots, A_n$ dois a dois disjuntos, mostraremos pelo princípio de indução que:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i) \tag{2.2}$$

Em particular, o caso $n = 2$ é verdadeiro. Supondo que seja verdadeiro para $n = k$, devemos mostrar que é verdadeiro para $n = k + 1$. Denote $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, então:

$$\begin{aligned} A \cap A_{k+1} &= \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1} \\ &= \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap A_{k+1}) \\ &= \bigcup_{i=1}^{k} \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Logo, A e A_{k+1} são disjuntos e pela afirmação (2.1) segue que

$$\begin{aligned} N(A \cup A_{k+1}) &= N(A) + N(A_{k+1}) \\ N\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= \left(\sum_{i=1}^{k} N(A_i)\right) + N(A_{k+1}) \\ N\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{k+1} N(A_i) \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução, a afirmação (2.2) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.3.2 Conjuntos Quaisquer

Sejam os conjuntos A e B subconjuntos de U. Então $A = A \cap U$ e $B = B \cap U$. Denotando por $\overline{B}$ o conjunto complementar de B

sobre U, podemos escrever $U = B \cup \overline{B}$, então:

$$\begin{aligned} A &= A \cap U \\ A &= A \cap \left(B \cup \overline{B}\right) \\ A &= (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \end{aligned}$$

Observe que a última igualdade diz que A pode ser decomposto em dois conjuntos $A \cap B$ e $A \cap \overline{B}$. Mostremos que eles são disjuntos. De fato,

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap \left(A \cap \overline{B}\right) &= A \cap \left(B \cap \left(A \cap \overline{B}\right)\right) \\ &= A \cap \left(B \cap \left(\overline{B} \cap A\right)\right) \\ &= A \cap \left(\left(B \cap \overline{B}\right) \cap A\right) \\ &= A \cap (\emptyset \cap A) \\ &= A \cap \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Podemos utilizar então a afirmação (2.1) e daí

$$N(A) = N(A \cap B) + N\left(A \cap \overline{B}\right) \tag{2.3}$$

Analogamente, prova-se que

$$N(B) = N(B \cap A) + N\left(B \cap \overline{A}\right), \tag{2.4}$$

fazendo a decomposição de B nos conjuntos disjuntos $(B \cap A)$ e $\left(B \cap \overline{A}\right)$. Podemos então escrever

$$\begin{aligned} A \cup B &= \left((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\right) \cup \left((B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})\right) \\ &= \left((A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)\right) \cup \left((B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})\right) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup ((A \cap B) \cup (B \cap A)) \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A}) \end{aligned}$$

Os três conjuntos do segundo membro desta última igualdade são dois a dois disjuntos. Com efeito, os dois primeiros são aqueles da decomposição de A, os dois últimos são os da decomposição de B, basta provar que $(A \cap \overline{B})$ e $(B \cap \overline{A})$ são disjuntos. De fato,

$$\begin{aligned}
(A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A}) &= A \cap (\overline{B} \cap (B \cap \overline{A})) \\
&= A \cap ((\overline{B} \cap B) \cap \overline{A}) \\
&= A \cap (\emptyset \cap \overline{A}) \\
&= A \cap \emptyset \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando o princípio (2.2) obtemos $N(A \cup B) = N(A \cap \overline{B}) + N(A \cap B) + N(B \cap \overline{A})$ e considerando (2.3) e (2.4) encontramos:

$$\begin{aligned}
N(A \cup B) &= N(A \cap \overline{B}) + N(A \cap B) + N(B \cap \overline{A}) \\
&= (N(A) - N(A \cap B)) + N(A \cap B) + (N(B) - N(B \cap A)) \\
&= N(A) + N(B) - N(A \cap B)
\end{aligned}$$

Passemos a um exemplo com dois conjuntos cruzados, isto é, conjuntos cuja interseção é não nula.

Exemplo 2.1 (Dois conjuntos cruzados)**.** Um conjunto A possui 12 elementos e um conjunto B possui 8 elementos, sendo que 6 são comuns aos dois conjuntos. Quantos elementos terá o conjunto $A \cup B$?

Solução: Temos que $N(A) = 12, N(B) = 8, N(A \cap B) = 6$. Então

$$\begin{aligned}
N(A \cup B) &= N(A) + N(B) - N(A \cap B) \\
&= 12 + 8 - 6 \\
&= 14
\end{aligned}$$

◄

Exemplo 2.2 (Pesquisa de audiência de televisão)**.** Numa enquete em relação à audiência de programas de televisão verificou-se que 1000 famílias assistem ao programa A, 420 ao B, 390 ao C; dessas, 170 assistem indistintamente a A e B, 120 a A e C, 45 a B e C; sendo que dessas, 31 assistem aos três sem preferência. Pede-se o número de pessoas entrevistadas que assistem televisão.

Solução: O diagrama nos auxilia a resolver o problema. Observe

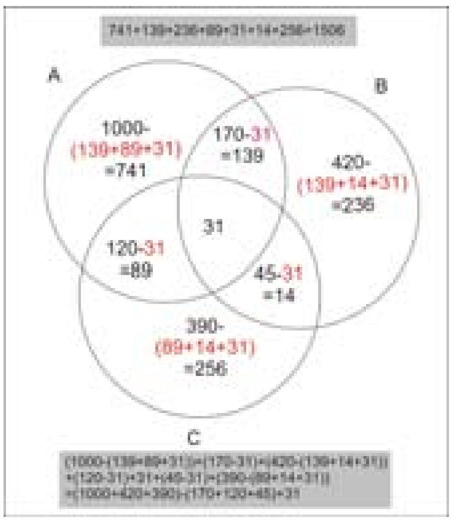

Figura 2.1: Diagrama de três conjuntos cruzados. A construção do diagrama vai do centro para periferia.

que se o número de conjuntos envolvido for maior do que três, torna difícil construir um diagrama cuja visualização dos dados não fique comprometida. Para esses casos, apenas métodos algébricos continuam eficientes. ◀

Observe que o destaque superior da figura mostra como foi feita a soma dos elementos de $A \cup B \cup C$. A parte destacada no inferior da figura enfatiza que aquela soma superior pode ser feita de um modo muito parecido ao que foi feito para o caso de apenas dois conjuntos. Podemos então nos perguntar: será possível obter uma fórmula geral para o número de elementos na união de n conjuntos quaisquer? A resposta é sim e dada por

$$\begin{aligned} N\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} N(A_i) \\ &\quad - \sum_{1\leq i<j} N(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \sum_{1\leq i<j<k} N(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-1} N\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \end{aligned}$$

A prova dessa afirmação é feita pelo princípio da indução. Vimos ser verdadeira para 2 conjuntos. Suponha verdadeira para $n-1$ conjuntos. Então para o conjunto $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, temos:

$$\begin{aligned} N(B) &= \sum_{i=2}^{n} N(A_i) - \sum_{2\leq i<j} N(A_i \cap A_j) + \sum_{2\leq i<j<k} N(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-2} N\left(\bigcap_{i=2}^{n} A_i\right) \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$N\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = N(A_1 \cup B) = N(A_1) + N(B) - N(A_1 \cap B)$$

Mas observe que

$$N(A_1 \cap B) = N\left(A_1 \cap \left(\bigcup_{j=2}^{n} A_j\right)\right) = N\left(\bigcup_{j=2}^{n} (A_1 \cap A_j)\right),$$

onde temos a união de $n-1$ conjuntos para a qual vale a hipótese de indução.

$$N(A_1 \cap B) = \sum_{j=2}^{n} N(A_1 \cap A_j) - \sum_{2\leq j<k} N(A_1 \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-2} N\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right)$$

Portanto, $N\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ é dado por

$$\begin{aligned}
& N(A_1) + N(B) - N(A_1 \cap B) \\
= \; & N(A_1) + \sum_{i=2}^{n} N(A_i) \\
& - \sum_{2 \le i < j} N(A_i \cap A_j) \\
& + \sum_{2 \le i < j < k} N(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-2} N\left(\bigcap_{i=2}^{n} A_i\right) \\
& - \sum_{j=2}^{n} N(A_1 \cap A_j) \\
& + \sum_{2 \le j < k} N(A_1 \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-2} N\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} N(A_i) \\
& - \sum_{2 \le i < j} N(A_i \cap A_j) - \sum_{j=2}^{n} N(A_1 \cap A_j) \\
& + \sum_{2 \le i < j < k} N(A_i \cap A_j \cap A_k) + \sum_{2 \le j < k} N(A_1 \cap A_j \cap A_k) \\
& + \cdots + (-1)^{n-1} N\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} N\left(A_i\right) \\
& - \sum_{1 \le i < j} N\left(A_i \cap A_j\right) \\
& + \sum_{1 \le i < j < k} N\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) \\
& + \cdots + (-1)^{n-1} N\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)
\end{aligned}$$

Provando assim que a fórmula é válida para n conjuntos.

Voltando ao exemplo (2.2), um caso particular com $n = 3$, temos:

$$\begin{aligned} N(A \cup B \cup C) &= (N(A) + N(B) + N(C)) \\ &\quad -(N(A \cap B) + N(A \cap C) + N(B \cap C)) \\ &\quad +N(A \cap B \cap C) \\ &= (1000 + 420 + 390) - (170 + 120 + 45) + 31 \\ &= 1810 - 335 + 31 = 1506 \end{aligned}$$

2.4 Princípio do Produto

Dados dois conjuntos A e B, denotamos por $A \times B$ o produto cartesiano de A por B que é o conjunto de todos os pares ordenados tais que o primeiro elemento do par pertence ao conjunto A e o segundo elemento do par pertence ao conjunto B:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Podemos usar a definição de produto cartesiano de dois conjuntos para definir produto cartesiano de n conjuntos como sendo

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in A_i, \text{ para cada } i \in J_n\}.$$

Se os conjuntos A_i forem finitos, então $\prod_{i=1}^{n} A_i$ também será finito. Mas quantos elementos possui o produto cartesiano $\prod_{i=1}^{n} A_i$?

Para $n = 2$, temos que $N(A_1 \times A_2) = N(A_1)N(A_2)$, isto é, o número de elementos do produto cartesiano de dois conjuntos é o produto do número de elementos de cada conjunto individualmente. Suponha agora que a fórmula é válida para k conjuntos. Como

$$\prod_{i=1}^{k+1} A_i = \left(\prod_{i=1}^{k} A_i \right) \times A_{k+1}$$

segue que

$$\begin{aligned} N\left(\prod_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= N\left(\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right) \times A_{k+1}\right) \\ &= N\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right) N(A_{k+1}) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k} N(A_i)\right) N(A_{k+1}) \\ &= \prod_{i=1}^{k+1} N(A_i) \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.3 (Formação de Casais)**.** Numa sala estão 3 homens e 4 mulheres. Quantos e quais casais poderiam ser formados?

Solução: Sejam $H = \{h_1, h_2, h_3\}, M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$. Então o número de casais que podem ser formados é $N(H \times M) = N(H)N(M) = 3.4 = 12$, como pode ser visto pela definição do produto cartesiano

$$\begin{aligned} H \times M = \; & \{(h_1, m_1), (h_1, m_2), (h_1, m_3), (h_1, m_4), \\ & (h_2, m_1), (h_2, m_2), (h_2, m_3), (h_2, m_4), \\ & (h_3, m_1), (h_3, m_2), (h_3, m_3), (h_3, m_4)\} \end{aligned}$$

◄

Exemplo 2.4 (Trajes esporte de um garoto)**.** Um garoto possui para traje esporte 3 bermudas, 4 camisetas e 2 pares de tênis. De quantas maneiras poderá se vestir?

Solução: Sejam B, C, T os conjuntos de bermudas, camisetas e tênis, respectivamente. Considerando que para se vestir ele deve usar uma bermuda, uma camisa e um tênis, temos que ele pode se vestir de $N(B \times C \times T)$ maneiras, isto é, de $N(B)N(C)N(T) = 3.4.2 = 24$ maneiras diferentes. ◀

Exemplo 2.5 (Com que roupa?)**.** Considere ainda o garoto do exemplo anterior. Se ele possuir para traje social 2 camisas, 2 ternos, 2 gravatas e 1 par de sapatos, de quantas maneiras poderá se vestir ou esporte ou social?

Solução: Sejam E, S os conjuntos de trajes esporte e social, respectivamente. No exemplo anterior, vimos que $N(E) = 24$. De forma análoga, temos que $N(S) = 2.2.2.1 = 8$. Assim, o garoto pode se vestir de $N(E \cup S)$ maneiras (esporte ou social), como $E \cap S = \emptyset$, segue que $N(E \cup S) = N(E) + N(S) = 24 + 8 = 32$.◀

2.5 Princípio da Inclusão-Exclusão

Considere $A \subset U$. Então $\overline{A} = U - A$ e, claramente, $N(\overline{A}) = N(U) - N(A)$. Considere então o seguinte problema de contagem.

Exemplo 2.6 (Contagem de divisíveis)**.** Determine o número de elementos em J_{21} não divisíveis por 3.

Solução: Considere $M_3 = \{x \in J_{21} | \text{x é divisível por 3}\}$. Desejamos $N(\overline{M_3})$. Note que de 3 em 3 temos um divisível por 3. Lembrando da função maior inteiro $\lfloor x \rfloor$ que fornece a parte inteira de um número real x, segue que $N(M_3) = \left\lfloor \frac{21}{3} \right\rfloor = 7$. Portanto, $N(\overline{M_3}) = N(J_{21}) - N(M_3) = 21 - 7 = 14$. ◀

Considere agora dois subconjuntos $A, B \subset U$. Podemos decompor $U = (A \cup B) \cup \overline{(A \cup B)}$ o que, pela Lei de Morgan, implica em $U = (A \cup B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$. Assim, o número de elementos de U é dado por $N(U) = N(A \cup B) + N(\overline{A} \cap \overline{B})$ o que implica em

$N(\overline{A} \cap \overline{B}) = N(U) - N(A \cup B)$. Portanto,

$$N(\overline{A} \cap \overline{B}) = N(U) - N(A) - N(B) + N(A \cap B)$$

Exemplo 2.7 (Contagem de divisíveis - parte 2)**.** Determine o número de elementos em J_{62} não divisíveis por 3 ou 5.

Solução: Considere $M_3 = \{x \in J_{62}|\text{x é divisível por 3}\}$ e $M_5 = \{x \in J_{62}|\text{x é divisível por 5}\}$. Desejamos $N(\overline{M_3} \cap \overline{M_5})$ que sabemos ser igual a $N(J_{62}) - N(M_3) - N(M_5) + N(M_3 \cap M_5)$. Mas $N(J_{62}) = 62$, $N(M_3) = \lfloor \frac{62}{3} \rfloor = 20$, $N(M_5) = \lfloor \frac{62}{5} \rfloor = 12$, $N(M_3 \cap M_5) = \lfloor \frac{62}{3.5} \rfloor = \lfloor \frac{62}{15} \rfloor = 4$; logo $N(\overline{M_3} \cap \overline{M_5}) = 62 - 20 - 12 + 4 = 34$. ◄

E como obter, de maneira rápida, uma fórmula como essa mas para um número grande de conjuntos? Note que mesmo para dois conjuntos a obtenção de uma fórmula para contar o número de elementos do conjunto $\overline{A} \cap \overline{B}$ não é tão simples. No que segue, iremos apresentar uma técnica que permite um cálculo simples e rápido para obter fórmulas até mais complicadas do que essa com relativa simplicidade.

Para isso, admitiremos a noção de conjuntos nos quais a repetição de elementos é permitida. Por exemplo, admitiremos conjuntos do tipo $\{a, b, b, c, c, c\}$ e o denotaremos como $\{a, (b)_2, (c)_3\}$. Definimos também três operações como seguem:

- O produto $A.B$ é a intersecção usual de conjuntos, isto é, $A.B = A \cap B$.
- A soma $A + B$ é um conjunto constituído de todos os elementos de um e do outro valendo a repetição.
- A diferença $A - B$ só está definida se $B \subset A$ e é tal que $(A - B) + B = A$.

Assim, se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, d, e\}$ então $A.B = \{b, c\}$ e $A + B = \{a, (b)_2, (c)_2, d, e\}$. E se $M = \{a, (b)_3, c, (d)_2\}$ e $N\{a, (b)_2, d\}$ então $M - N = \{b, c, d\}$, pois $(M - N) + N = M$.

Conhecidas as novas operações e notações, voltemos ao caso $A, B \subset U$. Como $\overline{A} = U - A$ e $\overline{B} = U - B$, segue que

$$\begin{aligned}
\overline{A}.\overline{B} &= (U - A).(U - B) \\
&= U.U - A.U - U.B + A.B \\
&= U - A - B + A.B
\end{aligned}$$

E, portanto, $N(\overline{A}.\overline{B}) = N(U) - N(A) - N(B) + N(A.B)$, conforme tínhamos obtido anteriormente. Entretanto, note que esta última técnica é mais simples e rápida, mesmo para exprimir fórmulas mistas em termos de conjuntos positivos. Como exprimir um conjunto como $\overline{A}.B.\overline{C}$ em termos de conjuntos positivos? Para isso, substituirmos os conjuntos complementares do tipo $\overline{X}$ por $U - X$ e efetuarmos algumas operações algébricas básicas. Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{A}.B.\overline{C} &= (U - A).B.(U - C) \\
&= (U.B - A.B).(U - C) \\
&= (U.B.U - U.B.C - A.B.U + A.B.C \\
&= B - B.C - A.B + A.B.C
\end{aligned}$$

Daí, $N(\overline{A}.B.\overline{C}) = N(B) - N(B.C) - N(A.B) + N(A.B.C)$.

Até fórmulas mais complicadas são facilmente resolvidas por essa técnica. Suponha que desejássemos exprimir $(A.\overline{B}).(\overline{A.\overline{C}})$ em termos de conjuntos positivos. Então,

$$\begin{aligned}
(A.\overline{B}).(\overline{A.\overline{C}}) &= (A.(U-B)).(U-A.(U-C)) \\
&= (A-A.B).(U-A+A.C) \\
&= (A.C+U-A).(A-A.B) \\
&= A.C-A.B.C+(A-A.B)-(A-A.B) \\
&= A.C-A.B.C
\end{aligned}$$

Logo, $N\left((A.\overline{B}).(\overline{A.\overline{C}})\right) = N(A.C) - N(A.B.C)$.

Em geral, o conjunto $\overline{A_1}\ldots\overline{A_n}$ é dado pela fórmula

$$\overline{A_1}.\ldots.\overline{A_n} = U - \sum_{i=1}^{n} A_i + \sum_{1\le i<j}(A_i.A_j) + \cdots + (-1)^n(A_1.\ldots.A_n)$$

facilmente demonstrada pelo princípio de indução. A partir dela é direto obter uma fórmula, denominada crivo de **Silva-Sylvestre**, para $A_1.\ldots.A_m.\overline{A_{m+1}}.\ldots.\overline{A_n}$ dada por

$$\begin{aligned}
A_1.\ldots.A_m.\overline{A_{m+1}}.\ldots.\overline{A_n} &= (A_1.\ldots.A_m) - \sum_{j=m+1}^{n}((A_1.\ldots.A_m).A_j) \\
&\quad + \sum_{m+1\le j<k}((A_1.\ldots.A_m).A_j.A_k) \\
&\quad + \cdots + (-1)^{n-m}(A_1.\ldots.A_n)
\end{aligned}$$

Exemplo 2.8 (Enumeração)**.** Considere o conjunto J_5 e as proposições $P_1 : x+y$ é ímpar; $P_2 : y$ é par e $P_3 : x < 3$. Pede-se enumerar os pares $(x,y) \in J_5 \times J_5$ para os quais é verificada a proposição composta $P \Leftrightarrow P_1 \wedge (\sim P_2) \wedge (\sim P_3)$.

Solução: Considere $A_i = \{(x,y) \in J_5 \times J_5 / P_i\}$. Então

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4), \\
&\quad (4,1),(4,3),(4,5),(5,2),(5,4)\} \\
A_2 &= \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,2),(4,4),(5,2),(5,4)\} \\
A_3 &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5)\}
\end{aligned}$$

Desejamos $A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3}$. Assim, pelo crivo de Silva-Sylvestre temos que

$$A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3} = A_1 + A_1.A_2.A_3 - (A_1.A_2 + A_1.A_3)$$

Como

$$\begin{aligned} A_1.A_2 &= \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\} \\ A_1.A_3 &= \{(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(2,5)\} \\ A_1.A_2.A_3 &= \{(1,2),(1,4)\} \end{aligned}$$

Teremos a solução $A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3} = \{(4,1),(4,3),(4,5)\}$ ◀

Observe, no entanto, que se nos fosse perguntado apenas o número de elementos do conjunto $A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3}$ não era necessário fazer a enumeração como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 2.9 (Contagem)**.** Considere o exemplo anterior. Pede-se o número de elementos do conjunto $A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3}$ sem fazer sua enumeração.

Solução: Como antes, pelo crivo de Silva-Sylvestre, temos $A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3} = A_1 + A_1.A_2.A_3 - (A_1.A_2 + A_1.A_3)$. Mas agora desejamos apenas o $N(A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3})$. Para isso basta calcularmos $N(A_1)+N(A_1.A_2.A_3)-(N(A_1.A_2) + N(A_1.A_3))$. Note então que existem dois tipos de pares ordenados que satisfazem A_1, a saber, (par,ímpar) ou (ímpar,par). Do primeiro tipo existem 2.3=6, do segundo, 3.2=6, logo $N(A_1) = 12$. Já para que o par pertença a $A_1.A_2.A_3$ é preciso que seja do tipo (ímpar $<$ 3,par) então possui 1.2=2 elementos. Para o conjunto $A_1.A_2$ o elemento típico é (ímpar,par), que vimos ter 3.2=6 elementos. Por fim, o conjunto $A_1.A_3$ também possui dois tipos de pares ordenados (par $<$ 3,ímpar) e (ímpar $<$ 3,par) e, portanto, 1.3+1.2=5 elementos. Assim, o número de elementos de $A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3}$ é 12+2-(6+5)=3, conforme o exemplo anterior. ◀

2.5.1 *Aplicação: Função de Euler*

Para finalizar esta aula, daremos como aplicação do princípio da inclusão-exclusão a definição da função de **Euler** do número n, denotada por $\varphi(n)$, que associa a cada natural $n \in \mathbb{N}$ o número de naturais menores do que n que são primos com n.

Sejam $n_1, \ldots, n_r$ os fatores primos de n e $M_i = \{x \in J_n | \text{x é divisível por } n_i\}$. Pelo princípio da inclusão-exclusão temos:

$$\varphi(n) = N(J_n) - \left(\sum_{i=1}^{r} N(M_i)\right) + \left(\sum_{1 \le i < j} N(M_i.M_j)\right) + \cdots + (-1)^r N(M_1.\ldots.M_r),$$

como $N(J_n) = n$, $N(M_i) = \frac{n}{n_i}$, $N(M_i.M_j) = \frac{n}{n_i.n_j}$ e assim sucessivamente, segue que

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= n - \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{n}{n_i}\right) + \left(\sum_{1 \le i < j} \frac{n}{n_i n_j}\right) + \cdots + (-1)^r \left(\frac{n}{n_1 \ldots n_r}\right) \\
&= n\left(1 - \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i}\right) + \left(\sum_{1 \le i < j} \frac{1}{n_i n_j}\right) + \cdots + (-1)^r \left(\frac{1}{n_1 \ldots n_r}\right)\right) \\
&= n\left(1 - \frac{1}{n_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n_r}\right)
\end{aligned}$$

Assim, a função de Euler fica definida como

$$\varphi(1) = 1 \text{ e } \varphi(n) = n \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right), \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

Exemplo 2.10 (Euler de 30)**.** Determinar o número de naturais menores do que 30 e primos com 30.

Solução: Desde que 30=2.3.5, segue que

$$\begin{aligned}
\varphi(30) &= 30\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \\
&= 30\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) \\
&= 1.2.4 \\
&= 8
\end{aligned}$$

Portanto, existem **8** números menores do que 30 e primos com 30.◄

Exemplo 2.11 (Euler de 45)**.** Determinar o número de naturais menores do que 45 e primos com 45.

Solução: Como 45=3.3.5, segue que

$$\begin{aligned} \varphi(45) &= 45\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) \\ &= 45\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) \\ &= 3.2.4 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Assim, existem **24** números menores do que 45 e primos com 45.◄

2.6 Princípio da Casa dos Pombos

Diferentemente das seções anteriores, a ferramenta que apresentaremos nesta seção é de fundamental importância na resolução de vários problemas de existência. O enunciado do princípio da casa dos pombos, também dito princípio das gavetas de Dirichlet, é bem simples.

Teorema 2.1 (O princípio da casa dos pombos)**.** *Se $n+1$ pombos são colocados em n gaiolas, então pelo menos uma gaiola deverá conter 2 ou mais pombos.*

Demonstração: *Suponha que não exista gaiolas contendo 2 ou mais pombos, isto é, cada gaiola conténha no máximo 1 pombo. Então as n gaiolas conterão no máximo n pombos, contradição pois existem $n+1$ pombos.* □

Exemplo 2.12 (Subconjuntos com 7 elementos)**.** Mostrar que qualquer subconjunto S de $\{1, 2, \ldots, 12\}$ contendo sete elementos possui dois subconjuntos cuja soma dos elementos é a mesma.

Solução: Um subconjunto com 7 elementos terá soma máxima igual a $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 63$. Disto concluímos que os possíveis valores para a soma dos elementos de um subconjunto não vazio de um suconjunto contendo 7 dos elementos de $\{1, 2, \ldots, 12\}$ vão de 1 a 63, ou seja, temos 63 possíveis valores (63 casas). Mas um conjunto com 7 elementos possui $2^7 - 1$ subconjuntos não vazios. Logo, como $2^7 - 1 > 63$, pelo menos dois deles terão a mesma soma para os seus elementos. ◀

Exemplo 2.13 (Cubo de aresta 2)**.** Mostar que, dentre 9 pontos quaisquer de um cubo de aresta 2, existem pelo menos dois pontos que se encontram a uma distância menor do que ou igual a $\sqrt{3}$ um do outro.

Solução: Dividimos este cubo em oito cubos menores seccionando cada aresta ao meio, obtemos 8 cubos de aresta 1 e diagonal $\sqrt{3}$. Como temos 9 pontos, pelo menos um dos 8 cubos conterá 2 ou mais pontos, que estarão no máximo afastados pela distância da diagonal, $\sqrt{3}$. ◀

2.6.1 Generalizações

Uma generalização do princípio da casa dos pombos pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 2.2. *Se n gaiolas são ocupadas por $nk+1$ pombos, então pelo menos uma gaiola deverá conter pelo menos $k+1$ pombos.*

Solução: *Se cada uma contiver no máximo k, como são n gaiolas, teríamos no máximo nk pombos distribuídos, contradição.* □

Exemplo 2.14 (Urna com bolas de 4 cores)**.** Se uma urna contém

4 bolas vermelhas, 7 bolas verdes, 9 bolas azuis e 6 bolas amarelas, qual é o menor número de bolas que devemos retirar (sem olhar) para que possamos ter certeza de termos tirado pelo menos 3 de uma mesma cor?

Solução: Considere como gaiolas as $n = 4$ cores diferentes. Como desejamos ter certeza de retirar pelo menos 3 bolas da mesma cor, consideramos $k+1 = 3$, isto é, $k = 2$, então se fizermos $nk+1 = 9$ retiradas temos certeza que tiramos pelo menos 3 de uma mesma cor. Esse valor é o menor possível. ◀

Teorema 2.3. *Se colocarmos em n gaiolas k pombos, então pelo menos uma gaiola deverá conter pelo menos $\left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor + 1$ pombos.*

Demonstração: *Como $\left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor \leq \frac{k-1}{n}$, se cada gaiola contiver no máximo $\left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor$ pombos, teremos no máximo $n\left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor$ pombos no total. Mas*

$$n\left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor \leq n\left(\frac{k-1}{n}\right) = k-1 < k$$

uma contradição. □

Exemplo 2.15 (Dia da semana do nascimento)**.** Em qualquer grupo de 20 pessoas, pelo menos 3 nasceram no mesmo dia da semana.

Solução: Como uma semana possui $n = 7$ dias, num grupo de $k = 20$ pessoas pelo menos $\left\lfloor \frac{20-1}{7} \right\rfloor + 1 = 2 + 1 = 3$ nasceram no mesmo dia da semana. ◀

Exemplo 2.16 (Triângulos com lados de mesma cor)**.** Suponhamos 6 pontos no espaço, não havendo 3 numa mesma linha. Cada dois pontos ligados por um segmento de reta e cada um desses 15 segmentos pintado de uma cor dentre duas, azul e vermelho. Provar que qualquer que seja a escolha destas duas cores na pintura dos segmentos sempre existirá um triângulo com todos os lados de uma mesma cor.

Solução: Qualquer ponto A está ligado a 5 outros por 5 segmentos. Existem duas cores disponíveis, logo pelo menos 3 segmentos tem a mesma cor. Suponha que estes 3 segmentos ligam A a B,C e D e estão pintados de azul, por exemplo, e considere o triângulo BCD. Se existe um dos lados do triângulo BCD, BC por exemplo, pintado de azul, então o triângulo ABC é um triângulo azul. Se nenhum dos lados é azul, então todos são vermelhos, logo BCD é um triângulo vermelho. ◀

Exemplo 2.17 (O estudante)**.** Um indivíduo estuda pelo menos uma hora por dia durante 3 semanas, mas nunca estuda mais do que 11 horas em 7 dias consecutivos. Mostrar que, em algum período de dias sucessivos, ele estuda um total de exatamente 20 horas. (admita que ele estude um número inteiro de horas por dia.)

Solução: Seja d_i o número de horas que ele estudou no dia i. Como 3 semanas são 21 dias, consideremos a sequência

$$\begin{aligned} b_1 &= d_1 \\ b_2 &= d_1 + d_2 \\ \ldots & \\ b_{21} &= d_1 + d_2 + \cdots + d_{21} \end{aligned}$$

Por termos 21 números distintos, dois deles, pelo menos, estarão na mesma classe de congruência módulo 20. Logo, a diferença entre eles deve ser um múltiplo de 20. Como, num período de 21 dias, ele poderá ter estudado no máximo 33 horas (3.11), esta diferença, não sendo nula, terá que ser exatamente igual a 20. ◀

2.7 Conclusão

Nesta aula, utilizamos o princípio da indução para generalizar o princípio da soma e do produto para uma quantidade finita de conjuntos finitos. Em seguida, introduzimos o princípio da inclusão-exclusão e desenvolvemos o crivo de Silva-Sylvestre. Como aplicação do princípio da inclusão-exclusão, definimos a função de Euler que possui a propriedade de associar a cada número natural n à quantidade de números naturais que são primos com n. Por fim, estudamos outro princípio importante em combinatória, conhecido como princípio da casa dos pombos, que nos é bastante intuitivo, já que afirma que se $n+1$ pombos são colocados em n gaiolas então existirá ao menos uma gaiola com mais de um pombo.

RESUMO

O princípio da soma diz que:

$$\begin{aligned} N\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} N\left(A_i\right) \\ &- \sum_{1\le i<j} N\left(A_i \cap A_j\right) \\ &+ \sum_{1\le i<j<k} N\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) \\ &+ \cdots + (-1)^{n-1} N\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \end{aligned}$$

Pelo princípio do produto:

$$N\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} N(A_i)$$

Crivo de Silva-Sylvestre:

$$\begin{aligned} A_1.\ldots.A_m.\overline{A_{m+1}}.\ldots.\overline{A_n} &= (A_1.\ldots.A_m) - \sum_{j=m+1}^{n} ((A_1.\ldots.A_m).A_j) \\ &+ \sum_{m+1\le j<k} ((A_1.\ldots.A_m).A_j.A_k) \\ &+ \cdots + (-1)^{n-m}(A_1.\ldots.A_n) \end{aligned}$$

Função ϕ de Euler:

$$\varphi(1) = 1 \text{ e } \varphi(n) = n\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{n_i}\right), \text{ para } n > 1$$

Princípio da Casa dos Pombos:

Se $n + 1$ pombos são colocados em n gaiolas, então pelo menos uma gaiola deverá conter 2 ou mais pombos.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, seguiremos resolvendo problemas de combinatória e partiremos ao estudo de permutações e combinações. É bom ter entendido corretamente o princípio do produto dado nesta aula, pois será fundamental na definição de arranjos, permutações e combinações. Além disso, a função fatorial que foi definida na primeira aula será muito utilizada e é essencial saber trabalhar bem com ela.

ATIVIDADES

ATIVIDADE 2.1. São dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c, d\}$ e $C = \{a, b, c, e\}$. Calcule e enumere os elementos do conjunto $\overline{A}.\overline{B}.C$.

ATIVIDADE 2.2. Calcule quantos números primos existem inferiores a 170.

ATIVIDADE 2.3. Calcule o número de naturais menores do que o número n dado e primos com ele:

1. $n = 12$
2. $n = 20$
3. $n = 847$

ATIVIDADE 2.4. Deveriam ser pintados 150 dados. 20 receberam tinta só vermelha, 10 só branca, 30 só azul; 8 receberam só tinta vermelha e azul; 13 receberam só branca e azul; e 12 receberam tinta vermelha, azul e branca. Quantos não foram pintados?

ATIVIDADE 2.5. São dados os conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e as proposições: $p_1 : x + y$ é par; $p_2 : x$ é ímpar;$p_3 : y > 3$. Pede-se calcular e enumerar os pares ordenados $(x, y) \in A \times B$ para os quais se verifica a proposição composta: $p_1 \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3)$.

ATIVIDADE 2.6. São dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{1, 2\}$, e as proposições: $p_1 : x + y + z$ é ímpar, $p_2 : x$ é par,$p3 : y < 3$, $p_4 : z$ é ímpar. Pode-se contar e enumerar as ternas $(x, y, z) \in A \times B \times C$ para as quais é verificada a proposição composta: $p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3) \wedge (\sim p_4)$.

ATIVIDADE 2.7. Existem 83 casas em uma rua. As casas são numeradas com números entre 100 e 262 inclusive. Mostre que pelo menos 2 casas têm números consecutivos.

ATIVIDADE 2.8. Supondo que os números de RG sejam constituídos de 7 dígitos, quantas pessoas, no mínimo, devemos ter em uma cidade para que se tenha certeza da existência de pelo menos duas com os primeiros dois dígitos iguais? (Admita que um RG possa ter "0"como dígito inicial.)

ATIVIDADE 2.9. Um restaurante possui 62 mesas com um total de 314 cadeiras. É possível garantir a existência de pelo menos uma mesa com pelo menos 6 cadeiras?

REFERÊNCIAS

BARBOSA, R.M. Combinatória e Grafos. vol.1. Nobel: São Paulo, 1974.

SANTOS, J.P.O., et al. Introdução à Análise Combinatória. Moderna: Rio de Janeiro, 2007.