AULA

3

Arrranjos, Permutações e Combinações

META

- Definir e diferenciar a noção de arranjo, permutação e combinação.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

- Distinguir arranjo, permutação e combinação (com ou sem repetição);
- Resolver problemas de combinatória que envolvem estas noções;
- Desenvolver estratégias para resolver problemas de permutações circulares.

PRÉ-REQUISITOS

- Função fatorial (aula 1);
- Princípio do produto (aula 2).

3.1 Introdução

Prezado aluno, nesta aula focaremos três tipos de agrupamentos que provocam muita confusão entre os alunos: arranjos, permutações e combinações. Qual a diferença entre cada um deles? Esta será uma das principais dúvidas a serem sanadas nesta aula. Veremos que se você possuir n objetos e p lugares disponíveis para guardar exatamente 1 desses objetos em cada lugar, isso será um arranjo de n objetos tomados p a p. Em particular, se o número de objetos for igual ao número de lugares disponíveis, teremos uma permutação de n objetos. Notaremos que nos arranjos, e portanto nas permutações, a ordem é importante. Contudo, se você possuir n objetos e p lugares disponíveis, mas a ordem cujos objetos são escolhidos não for importante, isso será uma combinação de n objetos tomados p a p. Trataremos ainda dos casos cuja escolha repitida de objetos é permitida e também das permutações circulares.

3.2 Arranjos Simples

Suponha que tenhamos n objetos com os quais queremos preencher p lugares. O primeiro lugar pode ser preenchido de n maneiras diferentes. Tendo preenchido o primeiro lugar, restam $(n-1)$ objetos para preencher $(p-1)$ lugares e, portanto, o segundo lugar pode ser preenchido de $(n-1)$ maneiras diferentes. E assim sucessivamente, vamos preenchendo as posições de forma que na p-ésima posição teremos $(n-(p-1))$ maneiras diferentes de preenchê-la. Pelo princípio do produto, podemos dizer que as p posições podem ser preenchidas de $n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))$ maneiras diferentes.

Denotando por A_n^p o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p, ou seja, todas as escolhas ordenadas de p desses n elementos, temos $A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))$. Se multiplicarmos e dividirmos A_n^p por $(n-p)!$, segue que $A_n^p = \frac{[n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))](n-p)!}{(n-p)!}$, ou de maneira mais simples:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 3.1 (Arranjo de 5, 2 a 2)**.** Considerando os dígitos 1,2,3,4,5, quantos números de 2 algarismos distintos podem ser formados?

Solução: Desejamos o arranjo de 5 elementos tomados 2 a 2, isto é,

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 5.4 = 20$$

◄

Exemplo 3.2 (Números entre 100 e 1000)**.** Considere os algarismos 1,2,3,4,5. Quantos números distintos, superiores a 100 e inferiores a 1000, podemos formar se:

(a) o número é par?

(b) o número é ímpar?

(c) o número é par ou ímpar?

Solução: Números entre 100 e 1000 possuem três dígitos, e portanto, temos 3 posições a serem preenchidas. Para que o número seja par, a última posição deve ser um algarismo par, caso contrário o número será ímpar. Essa será a primeira dificuldade que devemos resolver.

(a) Se o número é par, a última posição L_3 pode ser preenchida com 2 ou 4. Há, portanto, 2 maneiras de preencher a posição L_3. Tomemos, por exemplo, o algarismo 2. Então para preenchermos as posições L_1 e L_2 temos os algarismos 1,3,4,5, isto é, um arranjo de 4 tomados 2 a 2. Logo, existem $2A_4^2$ maneiras diferentes de preencher as 3 posições, isto é, $2.\frac{4!}{2!} = 2.4.3 = 24$ números pares maiores do que 100 e menores do que 1000 formados com os algarismos 1,2,3,4 e 5.

(b) Já se o número é ímpar, a posição P_3 pode ser preenchida com 1,3 ou 5. Então, existem 3 maneiras de preencher L_3. Digamos que tomamos o algarismo 1. Então restam os algarismos 2,3,4,5 para preenhcer as posições L_1 e L_2, novamente um arranjo $A_4^2 = 12$. Assim, existem $3A_4^2$ maneiras diferentes de preencher as 3 posições, isto é, 36 números ímpares maiores do que 100 e menores do que 1000, formados com os algarismos 1,2,3,4 e 5.

(c) Podemos somar a resposta do item (a) e (b) para obtermos 60 ou então pensarmos que a quantidade de números superiores a 100 e inferiores a 1000 que podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4 e 5 é simplesmente o arranjo de 5 tomados 3 a 3, isto é, $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5.4.3 = 60$. ◀

3.3 Arranjos com Repetição

Caso sejam permitidas repetições de elementos, podemos na posição L_1 escolher n elementos, na posição L_2 também n elementos, e assim sucessivamente até a posição L_p. Logo, o número de arranjos com repetição de n elementos tomados p a p, denotado por AR_n^p, é igual a

$$AR_n^p = n^p$$

Exemplo 3.3 (Placas de carro)**.** Qual o total de placas de carro que podem ser construídas constando de 7 símbolos, sendo os 3 primeiros constituídos por letras e os 4 últimos por dígitos?

Solução: Considerando-se o alfabeto com 26 letras, podemos escolher os 3 primeiros símbolos de AR_{26}^3 maneiras diferentes e os 4 últimos de AR_{10}^4. Logo, pelo princípio do produto, temos um total de $AR_{26}^3 AR_{10}^4 = 26^3.10^4$, isto é, podem ser construídas 175760000 placas. ◀

Exemplo 3.4 (Número de subconjuntos)**.** Quantos subconjuntos possui um conjunto A com n elementos?

Solução: Observe que cada elemento de A pode ou não estar presente num determinado subconjunto, como A possui n elementos, então A possui $AR_2^n = 2^n$ subconjuntos. ◀

Exemplo 3.5 (Duas caixas e n objetos)**.** De quantas maneiras podemos distribuir n objetos diferentes em duas caixas diferentes, de modo que nenhuma caixa fique vazia?

Solução: Para cada objeto podemos escolher entre duas caixas. Assim, n objetos podem ser distribuídos de AR_2^n maneiras diferentes, incluindo a possibilidade de uma delas ficar vazia. Como são 2 caixas, devemos excluir 2 dos casos anteriores. Então, existem $AR_2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1)$ maneiras de distribuir n objetos em 2 caixas diferentes, de modo que nenhuma delas fique vazia. ◀

3.4 Permutações Simples

Uma permutação simples de n objetos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos. Assim, uma permutação de n objetos é um arranjo de n objetos tomados n a n. Denotando o número de permutações de n objetos por P_n, segue que $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$.

Exemplo 3.6 (Carros e vagas de estacionamento)**.** Quantas são as maneiras de 6 carros serem estacionados em 6 vagas?

Solução: Claramente é o arranjo de 6 carros tomados 6 a 6, ou seja, uma permutação de 6 carros. Assim, o número de maneiras é $P_6 = 6! = 720$. ◄

Exemplo 3.7 (Pares de dança)**.** De quantas maneiras 12 moças e 12 rapazes podem formar pares para uma dança?

Solução: A primeira moça tem 12 possibilidades para escolher um par. A segunda, 11, e assim sucessivamente de modo que a 12ª terá apenas 1 escolha. Assim, pelo princípio multiplicativo, existem $P_{12} = 12! = 479001600$ maneiras desses pares serem formados. ◄

3.5 Combinações Simples

Se temos n elementos e desejamos escolher p deles, mas a ordem com o que fazemos tais escolhas não for importante, dizemos que queremos a combinação simples de n elementos tomados p a p. Usamos a notação C_n^p para designar a combinação de n tomados p a p. Vimos anteriormente que o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é igual ao número de maneiras de preencher p lugares com n elementos distintos e obtivemos $A_n^p =$

$\frac{n!}{(n-p)!}$.

Embora a ordem seja importante num arranjo simples, ela deixa de ser numa combinação simples. Então para cada combinação particular de n elementos p a p (que não importa a ordem), podemos fazer a permutação de seus p elementos, de forma que obtemos todos os arranjos de n elementos tomados p a p (onde importa a ordem). Dessa forma, fica claro que $A_n^p = P_p C_n^p$, isto é,

$$C_n^p = A_n^p \frac{1}{P_p} = \frac{n!}{(n-p)!}\frac{1}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo 3.8 (Subconjuntos)**.** Quantos subconjuntos de 3 elementos possui um conjunto A de 5 elementos?

Solução: Como a ordem dos elementos no conjunto não importa, basta tomarmos a combinação $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$. Portanto, um conjunto A de 5 elementos, possui 10 subconjuntos de 3 elementos. ◀

Exemplo 3.9 (Quantos triângulos?)**.** Quantos triângulos diferentes podem ser traçados utilizando-se 14 pontos de um plano, não havendo 3 pontos alinhados?

Solução: Como não há 3 pontos alinhados, basta escolhermos 3 pontos dentre os 14 para traçarmos um triângulo, não importando a ordem. Então, podemos traçar $C_{14}^3 = \frac{14!}{3!11!} = \frac{14.13.12}{3.2} = 364$ triângulos diferentes. ◀

3.6 Combinações Complementares

Observe que

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = C_n^{n-p}$$

Chamamos C_n^{n-p} de combinação complementar de C_n^p.

Exemplo 3.10 (Sinas (-) e (/)). De quantas maneiras podemos arrumar em fila 5 sinais (-) e 7 sinais (/)?

Solução: Conside o problema equivalente de se ter 12 lugares para serem preenchidos por 5 sinais (-) e 7 sinais (/). Observe que tanto faz escolhermos 5 dos 12 lugares para colocar os sinais (-) como escolhermos 7 dos 12 lugares para colocar os sinais de (/), uma vez que $C^5_{12} = C^7_{12} = \frac{12!}{7!5!} = 792$. ◀

Exemplo 3.11 (Sinais (+) e (-)). Dado $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de quantos modos é possível formar subconjuntos de 2 elementos nos quais não haja números consecutivos?

Solução: Utilizemos o sinal (+) para marcar os elementos que farão parte do subconjunto e o sinal (-) para marcar os que não farão parte. Então podemos representar subconjuntos de 2 elementos por uma sequência de 5 sinais sendo que exatamente 2 são (+). Por exemplo, representamos o subconjunto $\{1, 5\}$ por $(+ - - - +)$, e $\{2, 3\}$ por $(- + + - -)$. Observe que não desejamos contar conjuntos como o último exemplo, pois ele possui dois números consecutivos (dois sinais + consecutivos). Então, para formar um subconjunto com 2 elementos não consecutivos, devemos tomar 3 sinais (-) e 2 sinais (+) de forma que não haja dois sinais (+) consecutivos. Podemos então colocar os 3 sinais (-) e deixar espaço entre eles $(\square - \square - \square - \square)$. Assim, há 4 espaços vazios e, para colocarmos os 2 sinais (+) basta escolher 2 dentre os 4. Isto é, há $C^2_4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ maneiras diferentes de fazermos tal escolha. Portanto, existem 6 subconjuntos de A com dois elementos sem que estes sejam consecutivos. ◀

Exemplo 3.12 (Sinais (+) e (-): parte 2). Dado $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, de quantos modos é possível formar subconjuntos de p elementos nos quais não haja números consecutivos?

Solução: Para formarmos subconjuntos de p elementos não consecutivos, devemos tomar p sinais (+) e $(n-p)$ sinais (-). Colocando-se os $(n-p)$ sinais (-), haverá $(n-p+1)$ espaços onde se poderá colocar os p sinais (+). Devemos então fazer uma escolha de p espaços dentre os $(n-p+1)$ espaços disponíveis. Tal escolha pode ser feita de C^p_{n-p+1} maneiras. ◀

3.7 Combinações com repetição

Suponha que devemos escolher p objetos entre n objetos distintos sendo que cada objeto pode ser escolhido até p vezes. Se denotarmos por x_i o número de vezes que escolhemos o objeto i, o número total de maneiras de fazermos tal seleção é igual ao número de soluções inteiras não-negativas da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p \tag{3.5}$$

Se escrevermos uma sequência de p 1's e $n-1$ sinais (|) poderemos associar cada solução inteira não-negativa da equação acima a exatamente uma dessas sequências. Por exemplo, se $p = 7$ e $n = 3$, teríamos a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ onde soluções como $(3, 1, 3)$ e $(5, 0, 2)$ podem ser escritas como $111|1|111$ e $11111||11$, respectivamente.

Sendo assim, o número total de soluções inteiras não-negativas da equação (3.5) é igual ao número total de sequências de p 1's e $n-1$ sinais | a elas associadas. Tal número é a combinação C^p_{p+n-1}.

Denotando por CR^p_n o número total de maneiras de selecionarmos p objetos dentre n objetos distintos onde cada objeto pode ser tomado até p vezes, temos $CR^p_n = C^p_{p+n-1}$.

Exemplo 3.13 (Refrigerantes num bar)**.** De quantos modos podemos comprar 4 refrigerantes num bar que vende 2 tipos de reprigerantes?

Solução: Temos que escolher $p = 4$ refrigerantes entre $n = 2$ opções, isto é, podemos fazer tal compra de $CR_2^4 = C_5^4 = 5$ maneiras diferentes. ◀

Exemplo 3.14 (Bombons nas caixas)**.** De quantos modos diferentes podemos distribuir 10 bombons idênticos em 4 caixas diferentes?

Solução: É simplesmente o número de soluções inteiras não-negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10,$$

onde x_i denota o número de bombons na caixa i, para $i = 1, 2, 3, 4$. Logo, é igual a $CR_4^{10} = C_{13}^{10} = 286$. ◀

3.8 Permutação com repetição

Já consideramos permutação simples de n elementos distintos. Iremos considerar agora o caso em que dentre os n elementos existem n_i iguais a a_i com $i = 1, \dots, r$. Inicialmente, temos $N_0 = n$ lugares dos quais devemos escolher n_1 para neles colocarmos os elementos a_1. Após a primeira escolha, restam ainda $N_1 = n - n_1$ lugares e devemos escolher n_2 deles para alocarmos os elementos a_2. E assim sucessivamente teremos $N_{i-1} = n - \sum_{j=1}^{i-1} n_j$, lugares dos quais devemos escolher n_i deles para alocarmos os elementos a_i, para cada $i = 1, \dots, r$. Como em cada $i = 1, \dots, r$ dispomos de N_{i-1} lugares para escolhermso n_i elementos, temos como fazer isso de $C^{n_i}_{N_{i-1}}$ maneiras diferentes. Pelo princípio do produto, temos que o número total de permutações de n elementos onde existem n_i elementos iguais a a_i, $i = 1, \ldots, r$, e dado por

$$PR(n; n_1, \ldots, n_r) = \prod_{i=1}^{r} C^{n_i}_{N_{i-1}} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_r!},$$

Exemplo 3.15 (Time de futebol)**.** Se um time de futebol jogou 13 partidas em um campeonato, tendo perdido 5 jogos, empatado 2 e vencido 6 jogos, de quantos modos isto pode ter ocorrido?

Solução: É apenas a permutação de 13 elementos com repetições (5 derrotas, 2 empates e 6 vitórias). Assim, isso pode ocorrer de $PR(13; 5, 2, 6) = \frac{13!}{5!2!6!} = 36036$ modos diferentes. ◀

3.9 Permutações circulares

Considere o conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Desejamos permutar esses n elementos em torno de um círculo. As permutações circulares

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n), (a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1), (a_n, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$$

são todas iguais por que uma pode ser obtida da outra a partir de uma rotação. Então, para cada permutação circular de n elementos, existem n permutações simples desses n elementos. Se denotarmos por PC_n o número de permutações circulares com n elementos, segue que $P_n = n.PC_n$, e portanto

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Exemplo 3.16 (Brincadeira de roda)**.** De quantas maneiras 8 crianças podem dar as mãos para brincar de roda?

Solução: É o número de permutações circulares de 8 elementos, isto é, $PC_8 = 7! = 5040$ maneiras. ◀

Exemplo 3.17 (Brincadeira de roda: parte 2)**.** Se Pedro e Ana são 2 das 8 crianças do problema anterior, de quantas maneiras elas podem brincar ficando Ana e Pedro sempre lado a lado?

Solução: Se considerarmos Pedro e Ana como uma única criança, teremos a permutação circular de 7 elementos. Como eles podem ficar um ao lado do outro de duas maneiras diferentes, segue que as 8 crianças podem brincar de $2PC_7 = 2.6! = 1440$ maneiras diferentes de maneira que Ana e Pedro fiquem sempre lado a lado.◀

3.10 Conclusão

Nesta aula, aplicamos o princípio do produto estudado na aula 2 para definirmos arranjo, permutação e combinação. Vimos que a diferença entre arranjo simples e combinação simples está no fato de ser ou não importante a ordem dos objetos escolhidos no agrupamento. Tratamos ainda como obter fórmulas fechadas e simples para problemas de arranjo, permutação e combinação com repetição. Para completar a aula, definimos permutação circular, que é um pouco diferente da permutação simples (em fila), mas que possui relação íntima com esta, como pode ser visto pela própria fórmula obtida.

RESUMO

Num arranjo simples de n objetos tomados p a p, a ordem de escolha dos objetos é importante e o número total de arranjos simples desse tipo é igual a $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Uma permutação simples de n objetos, nada mais é do que um arranjo simples de n objetos tomados n a n, logo o número total de permutações simples de n objetos é $P_n = n!$.

Já numa combinação simples de n objetos tomados p a p, a ordem não é importante, e o número total de combinações de tal combinação é dada por $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Fica evidente, portanto,que o número de combinações complementares de uma combinação simples de n objetos tomados p a p, isto é, uma combinação simples de n objetos tomados $n-p$ a $n-p$, é igual a C_n^p.

O número de arranjos com repetição de n objetos tomados p a p é simplesmente $AR_n^p = n^p$. Enquanto que o número de combinações com repetição de n objetos tomados p a p é $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$ e o número de permutações de n elementos onde existem n_i elementos iguais a a_i, com $i = 1, \dots, r$ é dado por $PR(n; n_1, \dots, n_r) = \frac{n!}{n_1! \dots n_r!}$.

Já o número de permutações circulares de n objetos é dado por $PC_n = (n-1)!$.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula trataremos de expansões binomiais e multinomiais. Veremos como fazer expansão binomial utilizando recorrência sobre os coeficientes de um polinômio. Se ainda tiver dúvida sobre relações de recorrência, faça uma nova leitura desse tema na aula 1. Iremos também demonstrar a expansão de Newton utilizando o princípio da indução, portanto, se não se sentir seguro volte a seção que trata desse tópico, também na aula 1. Já se combinações simples, complementares e permutação com repetição ainda não foram bem assimiladas e distinguidas, refaça a leitura desses tópicos nesta aula e tente resolver as atividades referentes a seguir.

ATIVIDADES

ATIVIDADE 3.1. Considere num plano 10 pontos. Pede-se para calcular o número de triângulos tendo os vértices nos seguintes casos: a) não existem mais que dois pontos em linha reta; b) existem 6 pontos em linha reta; c) existem 4 numa reta e 3 numa outra.

ATIVIDADE 3.2. Considere no espaço 12 pontos. Quantos tetraedros existem tendo-os por vértices nos seguintes casos?

1. não existem mais que 3 pontos num plano;

2. existem 5 pontos num plano e 7 num outro plano.

Obs.: Os pontos dos planos não estão mais que dois em reta.

ATIVIDADE 3.3. Duas urnas possuem respectivamente 6 e 7 bolas coloridas em cores diferentes, mas existem 3 cores que são comuns às duas urnas. De quantas maneiras diferentes podemos selecionar 2 bolas, retirando-as de uma mesma urna simultaneamente?

ATIVIDADE 3.4. Dispõe-se de um quadriculado 3×3, de quantas maneiras podemos colocar quatro fichas, sendo duas de um tipo indistinguíveis entre si, e duas de outro tipo indistinguíveis entre si, colocando no máximo uma ficha em cada quadrícula?

ATIVIDADE 3.5. Quantas diagonais possui um polígono (convexo) de n vértices? E um prisma?

ATIVIDADE 3.6. Seja A o conjunto dos pontos de a retas duas a duas paralelas contidas num plano α, e seja B o conjunto dos pontos de b retas, duas a suas paralelas contidas em α, concorrentes com as a retas. Quantos paralelogramos existem de vértices pertencentes ao conjunto $A \cap B$ e de lados contidos no conjunto $A \cup B$? Em particular, calcule o número de paralelogramos quando $a = 6$ e $b = 5$.

ATIVIDADE 3.7. Calcule n sabendo-se que $A_n^5 = 180 C_n^3$.

ATIVIDADE 3.8. Calcular x sabendo que A_3^1, C_x^3 e A_x^2 formam nessa ordem uma progressão geométrica.

ATIVIDADE 3.9. Numa quitanda existem as seguintes verduras: 6 pés de alface, 4 de couve, 2 de almeirão, 1 de repolho e 2 de couve-flor. De quantas maneiras diferentes é possível efetuar a compra de verduras?

ATIVIDADE 3.10. Determine o número de divisores de 360.

ATIVIDADE 3.11. Considere a palavra P A P A D O. Quantos são os anagramas que não possuem 2 vogais juntas? E quantos não possuem letras iguais juntas?

ATIVIDADE 3.12. De quantos modos 8 casais fixos podem sentar-se em uma roda gigante de 8 bancos de dois lugares cada um, com cada casal em um banco?

ATIVIDADE 3.13. Um cubo deve ser pintado, cada face de uma cor, utilizando-se exatamente 5 cores, sendo que as únicas faces de mesma cor devem ser opostas. De quantas maneiras isto pode ser feito?

ATIVIDADE 3.14. Se 4 meninos e 4 meninas vão brincar de roda, de quantas maneiras poderão dar as mãos, com a condição de que pelo menos 2 meninas estejam juntas?

REFERÊNCIAS

BARBOSA, R.M. Combinatória e Grafos. vol.1. Nobel: São Paulo, 1974.

SANTOS, J.P.O., et al. Introdução à Análise Combinatória. Moderna: Rio de Janeiro, 2007.