AULA 4

Expansões

META

- Apresentar a expansão binomial e multinomial.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

- Identificar e utilizar algumas propriedades dos coeficientes binomiais;
- Expandir produto de binômios por recorrência e combinatorialmente;
- Expandir produto multinomial;

PRÉ-REQUISITOS

- Princípio da indução e relação de recorrência (aula 1);
- Combinação simples e permutação com repetição (aula 3).

4.1 Introdução

Caro aluno, nesta quarta aula estudaremos expansão binomial e multinomial. Inicialmente, demonstraremos uma das mais famosas relações entre coeficientes binomiais: a relação de Stifel, base para a construção do triângulo de Pascal. Em seguida, mostraremos como fazer a expansão binomial por dois métodos: expansão recorrente e expansão de Newton. Enquanto o primeiro utiliza relação de recorrência para obter os coeficientes da expansão, o segundo faz uso dos coeficientes binomiais previamente estudados. Para finalizar, apresentaremos a fórmula da expansão multinomial de Leibnitz e um procedimento útil para calcular produto de polinômios.

4.2 Coeficientes Binomiais

Como vimos na aula anterior, a combinação de n, p a p, denotado por C_n^p, é o número total de diferentes subconjuntos contendo p elementos cada, tomados de um conjunto contendo n elementos ($p \leq n$). Estes números C_n^p são chamados coeficientes binomais pelo fato de serem os coeficientes de x^p na expansão de $(1+x)^n$, como veremos na seção seguinte. Já vimos também, na seção sobre combinações complementares, que $C_n^p = C_n^{n-p}$. Nesta seção apresentaremos algumas propriedades dos coeficientes binomiais.

Proposição 4.1 (Relação de Stifel). $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Demonstração: *Seja a um dos n elementos do conjunto A. Quando tomamos um subconjunto arbitrário na tabela que contém todos os C_n^p subconjuntos contendo exatamente p elementos existem apenas duas possibilidades com relação à presença de a: ou a está ou* *não está presente. Portanto, somando o número de subconjuntos com p elementos e que contém a, ou seja,* C_{n-1}^{p-1}*, com o número de subconjuntos com p elementos que não contém a, isto é,* C_{n-1}^{p}*, temos* $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$. □

A relação de Stifel dá uma forma recursiva de construir o triângulo de Pascal. A seguir, demonstraremos uma propriedade que os coeficientes do triângulo de Pascal possuem: a soma dos coeficientes que estão na coluna j acima da linha i é o coeficiente da linha i e coluna $j+1$.

Proposição 4.2. $C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1}$

Demonstração: *Pela relação de Stifel, cada uma das igualdades abaixo é verdadeira:*

$$\begin{array}{rcl} C_{p+1}^{p+1} & = & C_p^p + C_p^{p+1} = C_p^p \\ C_{p+2}^{p+1} & = & C_{p+1}^p + C_{p+1}^{p+1} \\ C_{p+3}^{p+1} & = & C_{p+2}^p + C_{p+2}^{p+1} \\ & \vdots & \\ C_{p+n+1}^{p+1} & = & C_{p+n}^p + C_{p+n}^{p+1} \end{array}$$

Somando membro a membro estas igualdades e cancelando termos iguais, temos $C_{p+n+1}^{p+1} = C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_{p+n}^p$. □

Exemplo 4.1 (Soma dos n primeiros inteiros positivos)**.** Achar uma fórmula para a soma dos n primeiros inteiros positivos.

Observe que $1+2+\cdots+n = C_1^1 + C_2^1 + \cdots + C_n^1$. Aplicando a proposição anterior com $p = 1$ e $n = n-1$, segue que a soma nos n primeiros inteiros positivos vale $C_{n+1}^2 = \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} = \frac{n(n+1)}{2}$. ◀

4.3 Expansão Binomial

4.3.1 Expansão Recorrente

Suponha que $\sum_{i=0}^{n} A_i x^i$ seja a expansão de $(ax+b)^n$. Se desejamos obter a expansão $\sum_{i=0}^{n+1} B_i x^i$ de $(ax+b)^{n+1}$, podemos fazer:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} B_i x^i &= (ax+b)^{n+1} \\
&= (ax+b).(ax+b)^n \\
&= (ax+b).\sum_{i=0}^{n} A_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} aA_i x^{i+1} + \sum_{i=0}^{n} bA_i x^i \\
&= \left(aA_n x^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} aA_i x^{i+1} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} bA_i x^i + bA_0 \right) \\
&= aA_n x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (aA_{i-1} + bA_i) x^i + bA_0,
\end{aligned}$$

onde na penúltima linha explicitamos $i = n$ na primeira soma e $i = 0$ na segunda; e para obter a última igualdade, reescrevemos $\sum_{i=0}^{n-1} aA_i x^{i+1}$ como $\sum_{i=1}^{n} aA_{i-1} x^i$.

Pela igualdade entre polinômios, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
B_0 &= bA_0, \\
B_{n+1} &= aA_n, \\
B_i &= aA_{i-1} + bA_i, i \in J_n
\end{aligned}$$

A partir desse método de expansão, conseguimos fazer a expansão de binômios com certa rapidez. Veja os exemplos seguintes, que mostra um esquema que pode ser seguido:

Exemplo 4.2 (Potência de binômio)**.** Expandir $(2x+5)^4$.

Solução:

a	b	0	1	2	3	4
2	5	5	2			
2	5	25	20	4		
2	5	125	150	60	8	
2	5	625	1000	600	160	16

Logo, $(2x+5)^4 = 625 + 1000x + 600x^2 + 160x^3 + 16x^4$. ◀

O exemplo a seguir mostra que a expansão recorrente pode ser usada também para expandir o produto de binômios.

Exemplo 4.3 (Produto de binômios distintos)**.** Expandir $(2x+5)(3x+4)(4x+2)(2x-1)$.

Solução:

a	b	0	1	2	3	4
2	5	5	2			
3	4	20	23	6		
4	2	40	126	104	24	
2	-1	-40	-46	148	184	48

Logo, $(2x+5)(3x+4)(4x+2)(2x-1) = -40 - 46x + 148x^2 + 184x^3 + 48x^4$. ◀

Outra aplicação é a determinação de um polinômio com raízes fixadas, como no próximo exemplo.

Exemplo 4.4 (Polinômio)**.** Seja $P(x)$ um polinômio com raízes 2,-4,7, sendo que -4 é de multiplicidade 2.

Solução: Podemos escrever $P(x) = (x-2)(x+4)^2(x-7)$ então, como no exemplo anterior

a	b	0	1	2	3	4
1	-2	-2	1			
1	4	-8	2	1		
1	4	-32	0	6	1	
1	-7	224	-32	-42	-1	1

Assim, $P(x) = 224 - 32x - 42x^2 - x^3 + x^4$. ◀

4.3.2 Expansão de Newton

As expansões de $(a+b)^2$ e $(a+b)^3$ conhecidas como produtos notáveis são generalizadas para a expansão de $(a+b)^n$. Vejamos o que acontece nos casos simples para utilizarmos raciocínio análogo para a generalização. Lembre-se que

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Note agora que na expansão de $(a+b)^2$ os termos são do tipo a^ib^j com $i+j=2$ enquanto que em $(a+b)^3$ os termos também são do tipo a^ib^j mas agora com $i+j=3$. Em geral, na expansão de $(a+b)^n$ aparecerão termos do tipo a^ib^j com $i+j=n$. Como os fatores a e b podem aparecer em ordens diferentes o mesmo número de vezes i e j, existirão tantos termos a^ib^j quantas são as permutações do conjunto $\{(a)_i, (b)_j\}$, que sabemos ser $\frac{n!}{i!j!}$.

Teremos portanto na expansão termos do tipo

$$\frac{n!}{i!j!}a^ib^j \text{ ou } \frac{n!}{(n-j)!j!}a^{n-j}b^j = \binom{n}{j} a^{n-j}b^j$$

Fazendo j variar de 0 a n teremos toda expansão, isto é,

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}b^j,$$

denominada Fórmula de Expansão Binomial de Newton.

Façamos a demonstração da fórmula pelo princípio de indução.

(1) Para $n = 1$ a fórmula é válida, uma vez que

$$(a+b)^1 = \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} a^{1-j} b^j = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$$

(2) Suponha então a fórmula válida para $n = k$, então

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\
(a+b)^{k+1} &= (a+b) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j \\
(a+b)^{k+1} &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{(k+1)-j} b^j + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^{j+1} \\
(a+b)^{k+1} &= \binom{k}{0} a^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^{(k+1)-j} b^j + \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} a^{k-j} b^{j+1} + \binom{k}{k} b^{k+1} \\
(a+b)^{k+1} &= a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \left[\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} \right] a^{(k+1)-j} b^j
\end{aligned}$$

Pela relação de Stiefel, segue que $\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} = \binom{k+1}{j}$, logo,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} a^{(k+1)-j} b^j \\
(a+b)^{k+1} &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} a^{(k+1)-j} b^j
\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula é válida para $n = k + 1$

Pelo princípio de indução segue que a expansão é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vejamos o exemplo 4.2 resolvido agora pela expansão de Newton.

Exemplo 4.5 (Potência de binômio)**.** Expandir $(2x + 5)^4$.

Solução:

$$\begin{aligned}(2x+5)^4 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}(2x)^4(5)^0 + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}(2x)^4(4)^1 + \\ &\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}(2x)^2(5)^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}(2x)^1(5)^3 + \\ &\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}(2x)^0(5)^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2x+5)^4 &= 1.16x^4.1 + 4.8x^3.5 + 6.4x^2.25 + 4.2x.125 + 1.1.625 \\ (2x+5)^4 &= 16x^4.160x^3 + 600x^2 + 1000x + 625\end{aligned}$$

como obtido no exemplo 4.2. ◀

4.4 Expansão Multinomial

Na seção anterior, estudamos a expansão do binômio $(a + b)^n$. Nesta, estudaremos a expansão multinomial $(a_1 + \cdots + a_k)^n$. Como antes, se desenvolvermos os produtos obteremos termos do tipo:

$$a_1^{x_1} \ldots a_k^{x_k}, \text{ com } \sum_{i=1}^{k} x_i = n$$

Como os termos dessa forma para os mesmos expoentes podem provir de diversas ordens o número deles é dado pelo número de permutações com elementos repetidos do conjunto $\{(a_1)_{x_1}, \ldots, (a_k)_{x_k}\}$ dado por $PR(n; x_1, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1! \ldots x_k!}$.

Teremos portanto termos da forma:

$$\frac{n!}{x_1! \ldots x_k!} a_1^{x_1} \ldots a_k^{x_k}$$

Fazendo variar os x_i de todos modos possíveis obtemos todos os termos, portanto:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^n = \sum_{\sum x_i = n} \frac{n!}{x_1! \ldots x_k!} a_1^{x_1} \ldots a_k^{x_k},$$

denominada Fórmula de Expansão Multinomial de Leibnitz.

Exemplo 4.6 (Expansão Multinomial)**.** Expandir $(a_1 + a_2 + a_3)^4$.

Solução: A fórmula de expansão multinomial de Leibnitz diz que

$$(a_1 + a_2 + a_3)^4 = \sum_{x_1 + x_2 + x_3 = 4} \frac{4!}{x_1! x_2! x_3!} a_1^{x_1} a_2^{x_2} a_3^{x_3}$$

Para facilitar o trabalho, utilizamos a tabela a seguir:

	x_1	x_2	x_3	$\frac{4!}{x_1!x_2!x_3!}$	termos
1	4	0	0	1	a_1^4
2	0	4	0	1	a_2^4
3	0	0	4	1	a_3^4
4	3	1	0	4	$4a_1^3a_2$
5	3	0	1	4	$4a_1^3a_3$
6	1	3	0	4	$4a_1a_2^3$
7	0	3	1	4	$4a_2^3a_3$
8	1	0	3	4	$4a_1a_3^3$

9	0	1	3	4	$4a_2a_3^3$
10	2	2	0	6	$6a_1^2a_2^2$
11	2	0	2	6	$6a_1^2a_3^2$
12	0	2	2	6	$6a_2^2a_3^2$
13	2	1	1	12	$12a_1^2a_2a_3$
14	1	2	1	12	$12a_1a_2^2a_3$
15	1	1	2	12	$12a_1a_2a_3^2$

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+a_3)^4 &= (a_1^4+a_2^4+a_3^4)\\ &+ 4(a_1^3a_2+a_1^3a_3+a_1a_2^3+a_2^3a_3+a_1a_3^3+a_2a_3^3)\\ &+ 6(a_1^2a_2^2+a_1^2a_3^2+a_2^2a_3^2)\\ &+ 12(a_1^2a_2a_3+a_1a_2^2a_3+a_1a_2a_3^2)\end{aligned}$$

◀

De uma maneira geral, desejamos obter um método eficiente para calcular o produto de dois polinômios quaisquer. Sabemos que se $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, então o produto $p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i$, onde os coeficientes c_i são obtidos pelo produto convolutório $c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$. Uma maneira prática para fazer esse produto é apresentado abaixo e exemplificado em seguida.

Sejam $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ e $q(x) = b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0$. Então o produto $p(x)q(x)$ pode ser obtido rapidamente pela tabela abaixo. Colocamos os coeficientes de $p(x)$ com índices em ordem decrescente na primeira linha e os de $q(x)$ na primeira coluna da tabela, mas com os índices em ordem crescente. Fazemos o produto linha-coluna da tabela e somamos em diagonal. Observe que o resultado é o produto convolutório que desejamos.

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_0			
b_0	a_nb_0	$a_{n-1}b_0$	$\ldots$	a_0b_0			
b_1	a_nb_1	$a_{n-1}b_1$	$\ldots$	a_0b_1			
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$			
b_{m-1}	a_nb_{m-1}	$a_{n-1}b_{m-1}$	$\ldots$	a_0b_{m-1}			
b_m	a_nb_m	$a_{n-1}b_m$	$\ldots$	a_0b_m			
	a_nb_m	$a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		a_0b_0

Exemplo 4.7 (Produto Convolutório)**.** Calcular

$$(x^2+2x+1)(x^4+3x^3+x^2+2).$$

Solução: Colocamos os coeficientes dos polinômio ordenadamente (inclusive os nulos) uma na primeira linha e outro na primeira coluna da tabela. Fazemos o produto linha-coluna da tabela e somamos em diagonal.

	1	3	1	0	2		
1	1	3	1	0	2		
2	2	6	2	0	4		
1	1	3	1	0	2		
		1	5	8	5	3	4	2

Portanto, $(x^2+2x+1)(x^4+3x^3+x^2+2) = x^6+5x^5+8x^4+5x^3+3x^2+4x+2$. ◄

4.5 Conclusão

Nesta aula, aplicamos a noção de combinação simples de n elementos p a p (aula 3) para obtermos a famosa relação de Stiefel que torna possível a construção do triângulo de Pascal de maneira recursiva. Continuamos utilizando a recursividade (aula 1) para expandir potência de binômios e até mesmo produto de binômios.

Pelo princípio da indução (aula 1), demonstramos a fórmula de expansão binomial de Newton com seus coeficientes binomiais. Por fim, utilizamos argumentos combinatoriais para obter a fórmula da expansão multinomial de Leibnitz.

RESUMO

Pela relação de Stifel,

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p,$$

obtemos a propriedade

$$C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1}$$

Se $(ax+b)^n = \sum_{i=0}^n A_i x^i$, então os coeficientes B_k da expansão de $(ax+b)^{n+1}$ podem ser obtidos recursivamente por:

$$\begin{aligned} B_0 &= bA_0, \\ B_{n+1} &= aA_n, \\ B_i &= aA_{i-1} + bA_i, i \in J_n \end{aligned}$$

A fórmula de Expansão Binomial de Newton é

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} a^{n-j} b^j,$$

Enquanto que a fórmula de Expansão Multinomial de Leibnitz é

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^n = \sum_{\sum x_i = n} \frac{n!}{x_1! \ldots x_k!} a_1^{x_1} \ldots a_k^{x_k},$$

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, estudaremos funções geradoras. Como veremos, ela é uma ferramenta poderosa quando se deseja atacar problemas de combinatória. Para que sua leitura seja melhor aproveitada, faça uma revisão do enunciado do princípio da inclusão-exclusão (aula 2). Também é importante que os conceitos de arranjos, permutações e combinações (aula 3) estejam bem fixados e que já possua certa habilidade para calcular produto de polinômios (aula 4). Numa pequena parte da aula também será preciso ter conhecimentos elementares de cálculo: derivação e integração de polinômios.

ATIVIDADES

ATIVIDADE 4.1. Usando o procedimento de Parker faça as expansões de:

1. $(3x+4)^5$
2. $(5x+1)^6$
3. $(2x+4)(3x+1)(4x-3)(2x-5)$
4. $(3x+1)(2x-4)(5x+6)$

ATIVIDADE 4.2. Desenvolva pela fórmula do binômio de Newton:

1. $(y-2)^9$

2. $(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})^5$

ATIVIDADE 4.3. Faça as expansões usando a fórmula de Leibnitz:

1. $(a+b+c)^5$

2. $(x-y+2x^2)^5$

ATIVIDADE 4.4. Expanda os produtos polinomiais:

1. $(x^5-2x^3+3x-1)(x^2-3x+2)$

2. $(x-1)^3(x^2-x-2)^2$

ATIVIDADE 4.5. Calcule o coeficiente de x^6 em $(2-3x)^{10}$.

ATIVIDADE 4.6. Qual é o valor de n para que a razão entre o 3º e o 2º termo da expressão de $(a+b)^{n+2}$ em potências crescentes de a, seja $\frac{3a}{b}$?

ATIVIDADE 4.7. Qual é o valor de $(1-\sqrt{5})^5-(1+\sqrt{5})^5$?

ATIVIDADE 4.8. Qual é o valor numérico de $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$ sabendo-se que: $a=\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}}$ e $b=\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt[4]{5}}$?

ATIVIDADE 4.9. Se a soma dos coeficientes de $(2x+y)^n$ é 729 então qual é o valor de n?

ATIVIDADE 4.10. Se os coeficientes do 5º,6º e 7º termos de $(x+y)^n$ estão em progressão aritmética, qual é o valor de n?

REFERÊNCIAS

BARBOSA, R.M. Combinatória e Grafos. vol.1. Nobel: São Paulo, 1974.

BARBOSA, R.M. Combinatória e Grafos. vol.2. Nobel: São Paulo, 1975.

SANTOS, J.P.O., et al. Introdução à Análise Combinatória. Moderna: Rio de Janeiro, 2007.