
Funções Geradoras

META

- Aplicar funções geradoras em problemas de combinatória.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

- Definir a função geradora associada a um problema de combinatória;
- Aplicar função geradora ao problema das torres;
- Resolver problemas de permutações com posições interditas.

PRÉ-REQUISITOS

- Princípio da inclusão-exclusão (aula 2)
- Arranjo e combinação (aula 3);
- Expansão binomial e multinomial (aula 4).

5.1 Introdução

Estimado aluno, nesta aula faremos uma introdução ao estudo de funções geradoras. Primeiramente, iremos definir função geradora ordinária e testaremos sua força na resolução de problemas de combinatória. Em seguida, definiremos função geradora exponencial para podermos tratar de problemas que envolvem arranjos de elementos, ao invés de combinações como a função geradora ordinária. Logo após, faremos duas aplicações interessantes: 1) o problema de torres, que descreverá como obter o número de disposição de k torres num tabuleiro genérico de tal maneira que elas não se ataquem mutuamente; e 2) permutações com posições interditas, que será resolvido utilizando-se o problema de torres nas posições interditas e o princípio da inclusão-exclusão.

5.2 Função Geradora Ordinária

Definição 5.1 (Série de potências). Uma série de potências é uma série infinita da forma $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$, onde $a_r \in \mathbb{R}$ e x é uma variável.

Definição 5.2 (Função geradora ordinária). Se o número de soluções de um problema de combinatória é a_r , com $r = 0, 1, \dots$, então a função geradora ordinária para este problema, denotada por $G[(a_r), x]$, é a série de potências $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$.

Exemplo 5.1 (Número combinatório). Determine a função geradora ordinária associada ao problema de combinatória de determinar o número de maneiras de retirarmos r objetos de um conjunto de n objetos distintos, $r \leq n$.

Solução: O número de maneiras de retirarmos r objetos de um

conjunto de n objetos distintos é C_n^r , assim

$$G[(C_n^r), x] = \sum_{r=0}^n C_n^r x^r$$

é a função geradora ordinária desejada. Como sabemos, podemos escrever $G[(C_n^r), x] = (1+x)^n$. ◀

Exemplo 5.2 (Número de soluções com restrições). Encontrar a função geradora ordinária na qual o coeficiente a_r de x^r é o número de soluções inteiras positivas de $x_1 + x_2 + x_3 = r$, para $r \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, com as restrições $x_1, x_2 \in \{2, 3, 4\}$ e $x_3 \in \{5, 6, 7\}$.

Solução: Para resolver este problema, definimos os polinômios p_i , relacionados com as variáveis x_i , da seguinte forma:

$$p_1(x) = x^2 + x^3 + x^4$$

$$p_2(x) = x^2 + x^3 + x^4$$

$$p_3(x) = x^5 + x^6 + x^7$$

Observe que os expoentes de x em p_i são os elementos do conjunto ao qual x_i pertence. Fazemos então o produto desses polinômios

$$G[(a_r), x] = (x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4)(x^5 + x^6 + x^7)$$

$$G[(a_r), x] = x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15}$$

Portanto, $G[(a_r), x]$ é a função geradora ordinária do problema. ◀

Definição 5.3 (Soma e produto de série de potências). Se $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ e $\sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$ são duas séries de potências, então a soma destas duas séries é a série de potências na qual o coeficiente de x^r é $a_r + b_r$ e o produto destas duas séries é a série de potências na qual o coeficiente de x^r é $c_r = \sum_{k=0}^r a_k b_{r-k}$, produto convolutório dos coeficientes das séries.

Exemplo 5.3 (Produto de série de potências). Achar a função geradora ordinária $G[(a_r), x]$ na qual o coeficiente a_r de a^r é o número de soluções inteiras não-negativas da equação $2x + 3y + 7z = r$.

Solução: Faça $x_1 = 2x, x_2 = 3y, x_3 = 7z$. Então o problema torna-se o de obter as soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = r$, onde as variáveis x_i possuem as seguintes restrições: $x_1 \in \{0, 2, 4, \dots\}, x_2 \in \{0, 3, 6, \dots\}, x_3 \in \{0, 7, 14, \dots\}$. Assim, associamos essas variáveis às série de potência cujos expoentes são os possíveis valores de x_i . E a função geradora ordinária desse problema de combinatória é dada pelo produto dessas três séries $G[(a_r), x] = (1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^7 + x^{14} + \dots)$. ◀

5.3 Cálculo de funções geradoras

Como $G[(1), x] = 1 + x + x^2 + \dots$, se $|x| < 1$ então $G[(1), x] = \frac{1}{1-x}$.

Exemplo 5.4 (Reescrevendo uma função). Encontrar a função geradora para a sequência $(a_r) = (0, 0, 1, 1, 1, \dots)$.

Solução: A função geradora é $G[(0, 0, 1, 1, 1, \dots), x] = x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ que pode ser reescrita como $G[(0, 0, 1, 1, 1, \dots), x] = x^2(1 + x + x^2 + \dots) = x^2 \left(\frac{1}{1-x} \right)$. ◀

Exemplo 5.5 (Reescrevendo: parte 2). Encontrar a sequência cuja função geradora é dada por $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Solução: Como $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$, basta substituir x por x^2 , logo $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots$. Portanto $g(x) = G[(1, 0, 1, 0, \dots), x]$. ◀

Teorema 5.1. São válidas as seguintes igualdades para funções geradoras:

$$(1) G[(a_r), 1] = \sum_{r=0}^{\infty} a_r.$$

$$(2) G[(a_r), -1] = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_r.$$

$$(3) \alpha G[(a_r), x] + \beta G[(b_r), x] = G[(\alpha a_r + \beta b_r), x].$$

$$(4) G[(a_r), x]G[(b_r), x] = G[(\sum_{k=0}^n (a_k b_{n-k})], x].$$

$$(5) G[(a_0 + a_1 + \dots + a_r), x] = (1 + x + \dots)G[(a_r), x].$$

$$(6) G[(a_{r-1}), x] = xG[(a_r), x].$$

$$(7) G[(a_{r+1}), x] = \frac{1}{x}(G[(a_r), x] - a_0).$$

$$(8) G[(ra_r), x] = x \frac{d}{dx} G[(a_r), x].$$

$$(9) \int G[(a_r), x] dx = xG[(\frac{a_n}{n+1}], x] + C.$$

Demonstração: As demonstrações de (1)-(7) são deixadas como exercício. Para as duas últimas, considere $f(x) = G[(a_r), x]$. Para mostrar (8) observe que derivando $f(x)$ com respeito a x , temos $f'(x) = \sum_{r=1}^{\infty} r a_r x^{r-1}$; multiplicando por x , obtemos $x f'(x) = \sum_{r=0}^{\infty} r a_r x^r$, portanto, $G[(ra_r), x] = x f'(x) = x \frac{d}{dx} G[(a_r), x]$. Para (9), temos $\int f(x) dx = \int \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ logo,

$$\sum_{r=0}^{\infty} \int a_r x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

□

Exemplo 5.6 (Derivada). Encontrar $G[(r), x]$.

Solução: Como $G[(1), x] = \frac{1}{1-x}$, segue do teorema (5.1) item (8) que $G[(r), x] = x G'[(1), x]$, isto é, $G[(r), x] = x \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$. ◀

Exemplo 5.7 (Derivada: parte 2). Encontrar $G[(r^2), x]$.

Solução: Como no exercício anterior, sendo $g(x) = G[(r), x]$, segue que $G[(r^2), x]$ é obtida por $x g'(x) = x \frac{1+x}{(1-x)^3}$. ◀

Exemplo 5.8 (Combinação linear). Encontrar $G[(2r + 3r^2), x]$

Solução: Pelo teorema (5.1) item (3), segue que $G[(2r + 3r^2), x] = 2G[(r), x] + 3G[(r^2), x]$. Assim, $G[(2r + 3r^2), x] = 2\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) + 3\left(\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\right) = \frac{x(5+x)}{(1-x)^3}$. ◀

5.4 Função geradora exponencial

Se no problema de combinatória que tratamos a ordem de escolha dos objetos não for relevante, vimos que a função geradora ordinária pode ser utilizada. E em casos particulares, os coeficientes desta ficam em associação com as combinações de elementos. No entanto, se a ordem da escolha deve ser considerada, precisamos utilizar outro tipo de função geradora que associe os coeficientes com arranjos de elementos. Com essa finalidade, definimos a função geradora exponencial.

Definição 5.4 (Função geradora exponencial). A função geradora exponencial da sequência (a_r) , denotada por $GE[(a_r), x]$, é série de potências $\sum_{r=0}^{\infty} a_r \frac{x^r}{r!}$.

Exemplo 5.9 (Função exponencial). Encontrar $GE[(1), x]$.

Solução: Como $e^x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$, segue que nesta expansão o coeficiente de $\frac{x^r}{r!}$ é igual a 1, para todo r . Portanto, $GE[(1), x] = e^x$. ◀

Exemplo 5.10 (k letras). Achar a função geradora exponencial para se encontrar o número de sequências de k letras ($k \leq 6$) formadas pelas letras a, b, c onde a letra a ocorre no máximo uma vez, a letra b no máximo 2 vezes e a letra c no máximo 3 vezes.

Solução: Como agora a ordem é importante, devemos considerar os polinômios $(1 + x)$, $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)$, $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)$ e a função

geradora exponencial $f(x) = GE[(a_r), x]$ será o produto destes três polinômios. Logo,

$$f(x) = 1 + 3x + 4x^2 + \frac{19}{6}x^3 + \frac{10}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{6}x^6,$$

Devemos reescrever este polinômio como

$$f(x) = 1 + 3\frac{x}{1!} + 8\frac{x^2}{2!} + 19\frac{x^3}{3!} + 80\frac{x^4}{4!} + 60\frac{x^5}{5!} + 120\frac{x^6}{6!}$$

Observe que as possíveis maneiras de retirarmos 2 letras (sem importar a ordem) são 5: ab, ac, bc, bb, cc ; mas se a ordem importa (como é o caso), podemos ter: $ab, ba, ac, ca, bc, cb, bb, cc$. Isso totaliza 8 possibilidades, como indica o coeficiente que multiplica o termo $\frac{x^2}{2!}$. ◀

Teorema 5.2. *O número de n -uplas cujos elementos pertencem ao conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$ nas quais cada um dos números $1, 2, \dots, k$, aparece pelo menos uma vez é*

$$T(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i (k-i)^n$$

Demonstração: *Como cada um dos números $1, 2, \dots, k$, deve ocorrer pelo menos uma vez, e a ordem dos n números retirados é relevante, a função geradora exponencial para este problema é*

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^k = (e^x - 1)^k$$

Estamos interessados no coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ nesta função. Sabemos que

$$(e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i (-1)^i e^{(k-i)x}$$

Como

$$e^{(k-i)x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-i)^n x^n$$

temos

$$\begin{aligned} (e^x - 1)^k &= \sum_{i=0}^k C_k^i (-1)^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-i)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i (k-i)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T(n, k) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

□

Teorema 5.3. *O número de maneiras $S(n, k)$ de distribuímos n bolas distintas em k caixas idênticas sem que nenhuma caixa fique vazia é*

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} T(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i (k-i)^n$$

Demonstração: *Para que possamos obter uma distribuição de n bolas distintas em k caixas distintas, sem que nenhuma caixa fique vazia, basta encontrarmos uma distribuição de n bolas distintas em k caixas idênticas (nenhuma vazia) e ordenar estas caixas. Isto nos garante que $T(n, k) = k!S(n, k)$.*

□

Exemplo 5.11. De quantas maneiras podemos distribuir 4 bolas distintas a, b, c, d em duas caixas idênticas, de modo que nenhuma fique vazia?

Solução: Basta aplicar o teorema anterior com $n = 4$ e $k = 2$.
Então

$$S(4, 2) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 (-1)^i C_2^i (2-i)^4 = \frac{1}{2} (2^4 - 2) = 7.$$

◀

5.5 Aplicação 1: Polinômios de Torres

Um problema clássico, conhecido como problema das torres, consiste em determinar o número de disposições possíveis de 8 torres num tabuleiro de xadrez (8x8) de maneira que elas não se ataquem mutuamente. Esse problema pode ser generalizado para tabuleiros diversos da seguinte forma: determinar o número r_k de disposições de k torres num tabuleiro de n células de uma determinada forma.

Denominamos polinômio de torre de um tabuleiro C , a função geradora $G[(r_k(C)), x]$, onde $r_k(C)$ indica o número de disposições de k torres no tabuleiro C .

Exemplo 5.12 (Tabuleiro Simples). Determine $G[(r_k(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix})), x]$.

Solução: $r_0(C) = 1$, pois há apenas uma maneira de não dispor torres no tabuleiro; $r_1(C) = 3$, pois há três escolhas possíveis para dispor uma torre no tabuleiro; $r_2(C) = 1$, pois a única possibilidade de dispormos duas torres no tabuleiro é se uma ficar na posição (1,1) e a outra em (2,2). Logo, $G[(r_k(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix})), x] = 1 + 3x + x^2$. ◀

A seguir, demonstraremos uma série de teoremas que nos auxiliarão a resolver problemas de torres para tabuleiros maiores decompondo-os em tabuleiros menores.

Teorema 5.4 (Grau do polinômio de torres). *Se um tabuleiro conexo possui n linhas e m colunas, então o maior valor de k é dado por $k_{max} = \min\{m, n\}$.*

Teorema 5.5 (Coeficiente 1). *Se um tabuleiro possui n células então $r_1 = n$.*

Teorema 5.6 (Decomposição em dois tabuleiros menores). *Se marcarmos a célula $c_{ij} \in C$ num tabuleiro C e o separarmos em dois tabuleiros C_1, C_2 tais que:*

1. C_1 é constituído de todas as células não pertencentes à linha i e nem à coluna j .
2. C_2 é constituído de todas as células, exceto c_{ij} .

Então

$$G[(r_k(C)), x] = tG[(r_k(C_1)), x] + G[(r_k(C_2)), x]$$

Demonstração: O número $r_k(C)$ consta de duas parcelas: a) número de disposições com uma torre em c_{ij} ; b) número de disposições sem torre em c_{ij} . Isso implica em $r_k(C) = r_{k-1}(C_1) + r_k(C_2)$. Portanto, pelas propriedades (3) e (6) do teorema (5.1), segue que:

$$\begin{aligned} G[(r_k(C)), x] &= G[(r_{k-1}(C_1)), x] + G[(r_k(C_2)), x] \\ &= xG[(r_k(C_1)), x] + G[(r_k(C_2)), x] \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 5.7 (Tabuleiros desconexos). *Se um tabuleiro C é desconexo com componentes C_1 e C_2 então:*

$$G[(r_k(C)), x] = G[(r_k(C_1)), x]G[(r_k(C_2)), x]$$

Demonstração: Suponha que colocamos j peças em C_1 , então temos $k - j$ peças para colocar em C_2 , portanto se para cada disposição em C_1 podemos fazer todas as disposições em C_2 , temos pelo princípio do produto $r_j(C_1)r_{k-j}(C_2)$, com j variando entre 0 e k . Então $r_k(C) = \sum_{j=0}^k r_j(C_1)r_{k-j}(C_2)$, e portanto,

$$G[(r_k(C)), x] = G[(r_k(C_1)), x]G[(r_k(C_2)), x].$$

□

Para melhor visualização, nos exemplos a seguir indicaremos $G[(r_k(C), x)]$ por $G[(r_k), x, C]$ e a célula cinza representa a célula c_{ij} do teorema (5.6). Para obter a função geradora em cada exemplo, usaremos apenas os resultados obtidos nos teoremas anteriores.

Exemplo 5.13 (Tabuleiro 1).

$$\begin{aligned} G \left[(r_k), x, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right] &= xG[(r_k), x, \square] + G[(r_k), x, \square\square] \\ &= x(1+x) + (1+2x) \\ &= 1 + 3x + x^2 \end{aligned}$$

Como tínhamos obtido no exemplo anterior. ◀

Exemplo 5.14 (Tabuleiro 2).

$$\begin{aligned} G \left[(r_k), x, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right] &= xG[(r_k), x, \square] + G \left[(r_k), x, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right] \\ &= x(1+x) + G[(r_k), x, \square] G[(r_k), x, \square\square] \\ &= x(1+x) + (1+x)(1+2x) \\ &= (1+x)(1+3x) \\ &= 1 + 4x + 3x^2 \end{aligned}$$

◀

Exemplo 5.15 (Tabuleiro 3).

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \blacksquare & & \end{array} \\
 &= x \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \blacksquare & \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \blacksquare & & \end{array} \\
 &= x \left(x \square + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \blacksquare & \end{array} \right) + x \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \blacksquare & \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \blacksquare & & \end{array} \\
 &= x^2 \square + 2x \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \blacksquare & \end{array} + x \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \blacksquare & \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \blacksquare & & \end{array} \\
 &= x^2 \square + 3x \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \blacksquare & \end{array} + x \square + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \blacksquare & \end{array} \\
 &= (x + x^2) \square + (1 + 3x) \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \blacksquare & \end{array} \\
 &= (x + x^2)(1 + x) + (1 + 3x)(1 + 3x + x^2) \\
 &= (x + 2x^2 + x^3) + (1 + 6x + 10x^2 + 3x^3) \\
 &= 1 + 7x + 12x^2 + 4x^3
 \end{aligned}$$



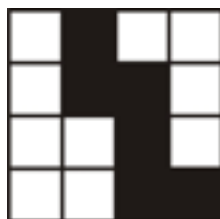
5.6 Aplicação 2: Permutações com Posições Interditadas

Considere a permutação $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ cuja representação é dada a seguir.

	●		
		●	
			●
●			

Nesse tabuleiro existem $4! = 24$ maneiras de dispor 4 torres de forma que elas não se ataquem mutuamente.

Suponha agora que algumas posições do tabuleiro estejam interditas, digamos que as células $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(4, 3)$ e $(4, 4)$. Então o número de permutações fica bastante reduzido. Este número é chamado número de permutações com posições interditas.



A solução é relativamente simples com o uso dos polinômios de torres e o princípio da inclusão-exclusão.

Inicialmente, calculemos o polinômio de torre do tabuleiro de interdição.

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \\
 &= x \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \\
 &= x \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} + x \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \square \\ \hline & & & \square \\ \hline & & & \square \\ \hline & & & \square \\ \hline \end{array} \\
 &= (1+x) \begin{array}{|c|c|c|} \hline \blacksquare & & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} + x \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \square \\ \hline & & \square \\ \hline & & \square \\ \hline \end{array} \\
 &= (1+x) \left(x \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \square \\ \hline \square & & \square \\ \hline \square & & \square \\ \hline \end{array} \right) + x \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \square \\ \hline & & \square \\ \hline & & \square \\ \hline \end{array} \\
 &= (1+2x) \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \square \\ \hline \square & & \square \\ \hline \square & & \square \\ \hline \end{array} + (x+x^2) \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\
 &= (1+2x) \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + (x+x^2) \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\
 &= (1+2x)(1+3x+x^2) + (x+x^2)(1+x) \\
 &= (1+5x+7x^2+2x^3) + (x+2x^2+x^3) \\
 &= 1+6x+9x^2+3x^3
 \end{aligned}$$

Então o polinômio de torre do tabuleiro interdição é $1 + 6x + 9x^2 + 3x^3$.

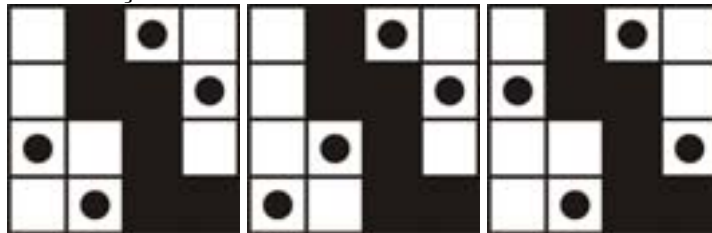
Seja A_i o conjunto das permutações com o elemento i (da linha i) ocupando posição interdita. Pelo princípio de inclusão-exclusão, temos que $N(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}.\overline{A_4})$ é dado por:

$$N(U) - \sum N(A_i) + \sum N(A_i.A_j) - \sum N(A_i.A_j.A_k) + N(A_1.A_2.A_3.A_4)$$

Como $\sum N(A_i) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) + N(A_4)$, segue que esta soma indica o número de permutações tendo 1 elemento em posição interdita e os outros 3 em posições permitidas, logo deve ser igual a $3!r_1$. Já $\sum N(A_i.A_j)$ representa o número de permutações tendo 2 elementos em posição interdita e os outros 2 em posições permitidas, logo é igual a $2!r_2$. De modo análogo, concluímos que $\sum N(A_i.A_j.A_k) = 1!r_3$ e $N(A_1.A_2.A_3.A_4) = 0!r_4$. Portanto,

$$\begin{aligned} N(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}.\overline{A_4}) &= 4! - 3!r_1 + 2!r_2 - 1!r_3 + 0!r_4 \\ &= 24 - 6.6 + 2.9 - 1.3 + 1.0 \\ &= 24 - 36 + 18 - 3 + 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Enumeração:



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

5.7 Conclusão

Nesta aula, apresentamos uma poderosa ferramenta de análise combinatória: as funções geradoras. Estudamos e distinguimos o uso das funções geradoras ordinárias e exponenciais. Vimos ainda duas aplicações interessantes das funções geradoras em problemas de combinatória: o problema de torres e a permutação com posições interditas.



RESUMO

$G[(a_r), x] = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ é dita função geradora ordinária associada ao problema de combinatória cujo número de soluções é a_r , com $r = 0, 1, \dots$

Suas principais propriedades são:

- (1) $G[(a_r), 1] = \sum_{r=0}^{\infty} a_r$.
- (2) $G[(a_r), -1] = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_r$.
- (3) $AG[(a_r), x] + BG[(b_r), x] = G[(Aa_r + Bb_r), x]$.
- (4) $G[(a_r), x]G[(b_r), x] = G[(\sum_{k=0}^n (a_k b_{n-k})) , x]$.
- (5) $G[(a_0 + a_1 + \dots + a_r), x] = (1 + x + \dots)G[(a_r), x]$.
- (6) $G[(a_{r-1}), x] = xG[(a_r), x]$.
- (7) $G[(a_{r+1}), x] = \frac{1}{x}(G[(a_r), x] - a_0)$.
- (8) $G[(ra_r), x] = x \frac{d}{dx} G[(a_r), x]$.
- (9) $\int G[(a_r), x] dx = xG[(\frac{a_n}{n+1}, x] + C$.

Quando a ordem de escolha dos objetos for relevante, devemos usar a função geradora exponencial definida como $GE[(a_r), x] = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \frac{x^r}{r!}$.

Para o problema de torres, temos os seguintes resultados:

1. Se um tabuleiro conexo possui n linhas e m colunas, então o maior valor de k é dado por $k_{max} = \min\{m, n\}$.

2. Se um tabuleiro possui n células então $r_1 = n$.
3. Se marcarmos a célula $c_{ij} \in C$ num tabuleiro C e o separarmos em dois tabuleiros C_1, C_2 tais que:
 - (a) C_1 é constituído de todas as células não pertencentes à linha i e nem à coluna j .
 - (b) C_2 é constituído de todas células, exceto c_{ij} .

Então

$$G[(r_k(C)), x] = tG[(r_k(C_1)), x] + G[(r_k(C_2)), x]$$

4. Se um tabuleiro C é desconexo com componentes C_1 e C_2 então:

$$G[(r_k(C)), x] = G[(r_k(C_1)), x]G[(r_k(C_2)), x]$$

O número de permutações com posições interditas pode ser determinado ao se resolver o problema de torres para as posições interditas e então aplicar o princípio da inclusão-exclusão.

PRÓXIMA AULA



Na próxima aula estudaremos algoritmos. Talvez uma das idéias fundamentais que ajudaram no desenvolvimento do mundo como o conhecemos hoje. Nela veremos que procedimentos como o usado para se solucionar o problema de torres desta aula são muito úteis para resoluções dos mais diversos problemas cotidianos.

Muitos deles são tratados pela matemática discreta e descritos por meio de grafos, uma estrutura matemática que será tratada na segunda parte de nosso curso. Como boa parte dos problemas dessa teoria são resolvidos via algoritmos, faz-se necessário sabermos melhor do que estamos tratando.



ATIVIDADES

ATIVIDADE 5.1. Determine as combinações com repetição do conjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ com as restrições:

- a_1 pode aparecer no máximo 3 vezes;
- a_2 pode aparecer no mínimo 1 vez e no máximo 2;
- a_3 aparece obrigatoriamente uma vez;
- a_4 aparece no máximo uma vez;
- a_5 aparece no máximo 2 vezes.

ATIVIDADE 5.2. De quantas formas podemos distribuir 10 trabalhos a 6 alunos se cada aluno deverá realizar pelo menos 1 e no máximo 3?

ATIVIDADE 5.3. De quantas maneiras podemos distribuir 11 trabalhos a 4 alunos se cada aluno deverá participar pelo menos de 2 trabalhos e no máximo 3?

ATIVIDADE 5.4. Representantes de três institutos de pesquisa devem formar uma comissão de 9 pesquisadores. De quantos modos se pode formar esta comissão sendo que nenhum instituto deve ter maioria absoluta no grupo?

ATIVIDADE 5.5. Jogando 4 dados, quantas possibilidades de soma 12 existem?

ATIVIDADE 5.6. Encontrar a função geradora ordinária para se calcular o número de soluções em inteiros não-negativos da equação $2x + 3y + 4z + 5w = r$.

ATIVIDADE 5.7. Dispõe-se de um número ilimitado de bolas vermelhas, brancas e verdes. De quantos modos podemos selecionar n bolas sendo que cada seleção deve conter um número par de bolas verdes?

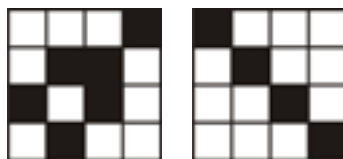
ATIVIDADE 5.8. De quantas maneiras podemos distribuir 300 cadeiras idênticas em 4 salas de modo que o número de cadeiras em cada sala seja 20 ou 40 ou 60 ou 80 ou 100?

ATIVIDADE 5.9. Demonstre os itens (1)-(7) do teorema (5.1).

ATIVIDADE 5.10. Determine o polinômio de Torres para os tabuleiros abaixo:



ATIVIDADE 5.11. Determinar o número de permutações com posições interditadas nos dois casos que seguem:





REFERÊNCIAS

BARBOSA, R.M. Combinatória e Grafos. vol.1. Nobel: São Paulo, 1974.

SANTOS, J.P.O., et al. Introdução à Análise Combinatória. Moderna: Rio de Janeiro, 2007.

Algoritmos

META

- Introduzir e medir eficiência de algoritmos.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

- Criar pequenos algoritmos;
- Medir a eficiência de algoritmos simples.

PRÉ-REQUISITOS

- Relação de recorrência (aula 1);

6.1 Introdução

Prezado aluno, passamos da metade de nosso curso, e nesta aula estudaremos uma idéia que talvez tenha sido a chave do desenvolvimento do mundo: os algoritmos. Apesar deles terem tido uma explosão de crescimento com o advento dos computadores, veremos que os algoritmos foram introduzidos na Europa pelo trabalho de Al Khwarizmi, um matemático árabe do século IX, que influenciou Fibonacci, matemático italiano do século XV. Neste famoso trabalho, Al Khwarizmi utilizou o sistema posicional decimal, já conhecido na Índia desde o século VI, que só na época de Fibonacci passou a ser adotado em substituição aos algarismos romanos. Foi nesse sistema posicional decimal que surgiram os primeiros algarismos para adição, multiplicação e divisão de números. Aprenderemos ainda que sempre que temos um algoritmo devemos responder a três perguntas: ele é correto? É eficiente? Pode ser melhorado? Para finalizar, estudaremos a notação O que medirá a eficiência de um algoritmo.

6.2 Livros e Algoritmos

Duas idéias mudaram o mundo. Em 1448 Johann Gutenberg descobriu uma forma de imprimir livros colocando peças metálicas móveis juntas. A literatura se expandiu, a Idade das Trevas terminou, o intelecto humano foi liberado, ciência e tecnologia triunfaram, a Revolução Industrial aconteceu. Muitos historiadores dizem que devemos tudo isso à tipografia. Mas outros insistem que a chave do desenvolvimento não foi a tipografia, mas os algoritmos.

Hoje estamos tão acostumados a escrever os números usando

o sistema decimal que esquecemos que na época de Gutenberg ele escreveu 1448 em numerais romanos. Mas como os romanos (ou europeus do século XV) somavam dois números? Quanto é $MCDXLVIII + DCCCXII$? Provavelmente só conseguiam adicionar e subtrair pequenos números com o auxílio dos dedos; para coisas mais complicadas tinham que consultar algum especialista em ábacos.

O sistema decimal, inventado na Índia cerca de 600 D.C., foi uma revolução por razões quantitativas: usando apenas 10 símbolos, mesmo números muito grandes podiam ser escritos compactamente e a aritmética podia ser feita eficientemente seguindo passos elementares. Todavia, estas idéias levaram muito tempo para se espalhar, por dificultadas como as barreiras tradicionais do idioma, distância e ignorância. O meio de transmissão mais influente foi um livro texto, escrito em árabe no século IX por um homem que viveu em Bagdá. Al Khwarizmi ensinou os métodos básicos para adição, multiplicação e divisão de números - e até mesmo a extração de raízes quadradas e o cálculo de dígitos de π . Esses procedimentos eram precisos, claros, mecânicos, eficientes e corretos - em resumo, eram algoritmos, um termo em homenagem a este sábio depois que o sistema decimal foi finalmente adotado na Europa, muitos séculos depois.

Desde então, esse sistema posicional decimal e seus algoritmos numéricos têm sido de importância fundamental para as civilizações ocidentais. Eles habilitaram a ciência e a tecnologia; aceleraram a indústria e o comércio. E quando, muito depois, o computador foi finalmente criado, ele incorporou explicitamente o sistema posicional em seus bits. Os cientistas de todo mundo ficaram

ocupados em desenvolver algoritmos cada vez mais complexos para todo tipo de aplicação em problemas e inovações que acabaram mudando o mundo.

6.3 Fibonacci

O trabalho de Al Khwarizmi não teria conseguido uma posição tão segura no ocidente se não fossem os esforços de um homem: o matemático italiano do século XV Leonardo Fibonacci, que viu o potencial do sistema posicional e trabalhou nele para o desenvolver e propagar.

Hoje, Fibonacci é mais conhecido devido à sua famosa sequência de números

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

que é a soma de seus dois últimos predecessores imediatos. Mais formalmente, os números de Fibonacci F_n são gerados por uma regra simples

$$F_n = \begin{cases} F_{n-2} + F_{n-1}, & \text{se } n > 1 \\ 1, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Nenhuma outra sequência de números foi tão estudada ou aplicada em mais campos: biologia, demografia, artes, arquitetura, música, para citar apenas alguns.

Mas qual é o valor preciso de F_{100} ou F_{200} ? O próprio Fibonacci queria saber tais coisas. Para responder, precisamos de um algoritmo para calcular o n -ésimo número de Fibonacci.


```
função fib1(n)
se n=0:  retorne 0
se n=1:  retorne 1
retorne fib1(n-1)+fib1(n-2)
```

Sempre que temos um algoritmo, existem três perguntas que devem ser feitas:

1. Ele é correto?
2. Ele é eficiente? Isto é, quanto tempo ele leva, como função de n ?
3. Podemos fazer melhor?

A resposta à primeira pergunta é sim, desde que esse algoritmo é precisamente a definição de Fibonacci de F_n . Já a segunda requer um raciocínio mais elaborado. Seja $T(n)$ o número de passos computacionais necessários para calcular $\text{fib1}(n)$; o que podemos dizer sobre essa função? Para iniciar, se $n \leq 1$, o procedimento para quase que imediatamente, depois de no máximo dois passos. Então $T(n) \leq 2$ se $n \leq 2$. Para valores maiores de n , existem duas invocações recursivas de fib1 , levando $T(n-1)$ e $T(n-2)$ passos, mais três passos (cálculo de $n-1$ e $n-2$ e a soma final $\text{fib1}(n-1) + \text{fib1}(n-2)$). Então,

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 3, \text{ para } n > 1$$

Comparando essa à relação de recorrência F_n vemos imediatamente que $T(n) \geq F_n$. Essa é uma notícia muito ruim: o tempo de execução do algoritmo cresce tão rapidamente quanto os números de Fibonacci. $T(n)$ é exponencial em n , o que significa que o algoritmo é impraticável para valores grandes de n . Em resumo, nosso

ingênuo algoritmo recursivo é correto mas incrivelmente ineficiente. O que nos leva à terceira pergunta: podemos fazer melhor?

Um esquema mais sensível poderia estocar os resultados intermediários, F_0, F_1, \dots, F_{n-1} , assim que eles se tornassem conhecidos.

```
função fib2(n)
se n=0: retorne 0
crie um vetor  $f[0 \dots n]$ 
 $f[0]=0, f[1]=1$ 
para  $i=2 \dots n$   $f[i]=f[i-1]+f[i-2]$ 
retorne  $f[n]$ 
```

Assim como `fib1`, a correção desse algoritmo é evidente porque usa diretamente a definição de F_n . Quanto tempo ele leva? O loop interno consiste de um passo computacional simples que é executado $n - 1$ vezes. Então o número de passos computacionais usado por `fib2` é linear em n .

6.4 Algoritmos Numéricos

Veremos como um algoritmo adequado faz toda diferença.

Exemplo 6.1 (Avaliação de Polinômios). Determinar $p(5)$ para o polinômio $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 15$.

Solução: Faremos a avaliação por dois algoritmos distintos: método direto e método de Horner (divisão sintética).

- (a) (**Método direto**) Ao escrever $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 15$, entende-se $p(x) = 2.x.x.x - 7.x.x + 4.x - 15$ então:

$$p(5) = 2.5.5.5 - 7.5.5 + 4.5 - 15 \quad (\text{substituindo } x \text{ por } 5)$$

$$p(5) = 250 - 175 + 20 - 15 \quad (\text{após } 6 \text{ multiplicações})$$

$$p(5) = 80 \quad (\text{após } 3 \text{ adições})$$

Total de operações: 9 (6 multiplicações e 3 adições). Em geral, para avaliar um polinômio $p(x)$ de grau n pelo método direto serão necessárias $\frac{n(n+1)}{2}$ multiplicações e n adições.

(b) (**Método de Horner**) Se reescrevermos $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 15$ como $p(x) = ((2x - 7).x + 4).x - 15$ então:

$$p(5) = ((2.5 - 7).5 + 4).5 - 15 \quad (\text{substituindo } x \text{ por } 5)$$

$$p(5) = (3.5 + 4).5 - 15 \quad (\text{após } 1 \text{ multiplicação e } 1 \text{ adição})$$

$$p(5) = 19.5 - 15 \quad (\text{após } 1 \text{ multiplicação e } 1 \text{ adição})$$

$$p(5) = 80 \quad (\text{após } 1 \text{ multiplicação e } 1 \text{ adição})$$

Total de operações: 6 (3 multiplicações e 3 adições). Em geral, para avaliar um polinômio $p(x)$ de grau n pelo método de Horner serão necessárias n multiplicações e n adições. Este método é conhecido como divisão sintética, cujo algoritmo está exemplificado abaixo:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 5 & 2 & -7 & 4 & -15 \\
 & & 10 & 15 & 95 \\
 \hline
 & 2 & 3 & 19 & 80
 \end{array}$$



Exemplo 6.2 (Máximo Divisor Comum). Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ com $b < a$. Determine o máximo divisor comum de a e b , $d = MDC(a, b)$.

Solução: Podemos fazer isso de duas maneiras diferentes: pelo método direto e pelo algoritmo da divisão de Euclides.

- (a) (**Método direto**) Testamos todos os números de 2 até $a/2$ para acharmos os divisores de a ; fazemos o mesmo teste para acharmos os divisores de b ; então escolhemos o maior divisor comum. Por exemplo, suponha $a = 258, b = 60$, então denotando D_n o conjunto dos divisores de n temos:

$$D_{258} = \{1, 2, 3, 6, 43, 86, 129, 258\}$$

$$D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

$$D_{258} \cap D_{60} = \{1, 2, 3, 6\}(\text{divisores comuns})$$

$$MDC(258, 60) = 6(\text{máximo divisor comum})$$

- (b) (**Algoritmo de Euclides**) Dividimos a por b e obtemos o resto $r_1 < b$; então dividimos b por r_1 e obtemos o resto $r_2 < r_1$; depois dividimos r_1 por r_2 e obtemos $r_3 < r_2$; prosseguimos dividindo r_{n-2} por r_{n-1} para obtermos o resto $r_n < r_{n-1}$. Esse processo tem fim quando obtemos o resto $r_k = 0$, que sempre ocorre, uma vez que $0 \leq \dots < r_n < r_{n-1} < \dots < r_1 < b < a$; aí teremos $r_{k-1} = MDC(a, b)$. Vejamos o exemplo $a = 258, b = 60$. Dividindo 258 por 60, obtemos resto 18; dividindo 60 por 18, obtemos resto 6; dividindo 18 por 6, obtemos resto 0. Portanto, $MDC(258, 60) = 6$. É comum utilizarmos a tabela seguinte quando aplicamos o algoritmo de Euclides:

258	60	18	
60	18	6	0



6.5 Notação O

Suponha que M é um algoritmo e que n seja o tamanho do dado de entrada. A complexidade $f(n)$ de M aumenta quando n aumenta. Normalmente queremos examinar a razão de crescimento de $f(n)$. Em geral, para isso, comparamos $f(n)$ com funções padrão tais como $\ln n, n, n \ln n, n^2, n^3, 2^n$.

A maneira pela qual comparamos a função complexidade $f(n)$ com uma das funções padrão utiliza a notação O , definida a seguir.

Definição 6.1. Sejam $f(x), g(x)$ funções arbitrárias definidas em $U \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $f(x)$ é da ordem de $g(x)$, e denotamos isso por

$$f(x) = O(g(x))$$

se existem um número real k e uma constante positiva C tais que:

$$\forall x > k, |f(x)| \leq C|g(x)|$$

Exemplo 6.3 (Polinômio). Suponha que $P(n) = a_0 + a_1n + a_2n^2 + \dots + a_mn^m$ tem grau m . Prove que $P(n) = O(n^m)$.

Solução: Seja $b_i = |a_i|$, para $i = 0, 1, \dots, m$. Então, para $n \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} P(n) &= a_0 + a_1n + a_2n^2 + \dots + a_mn^m \\ &\leq b_0 + b_1n + b_2n^2 + \dots + b_mn^m \\ &= \left(\frac{b_0}{n^m} + \frac{b_1}{n^{m-1}} + \dots + b_m \right) n^m \\ &\leq (b_0 + b_1 + \dots + b_m)n^m \\ &= Cn^m \end{aligned}$$

Portanto, $P(n) = O(n^m)$.

6.6 Conclusão

Nesta aula, vimos que um algoritmo é um procedimento preciso, claro, mecânico, eficiente e correto. Aprendemos que de posse de um algoritmo, devemos responder a três perguntas: ele é correto? Ele é eficiente? Pode ser melhorado? Para finalizar, introduzimos a notação O que compara a complexidade entre algoritmos.



RESUMO

Um algoritmo é um procedimento preciso, claro, mecânico, eficiente e correto.

Sempre que temos um algoritmo, devemos fazer três perguntas:

1. É correto?
2. É eficiente?
3. Pode ser melhorado?

Para medir a complexidade de um algoritmo, utilizamos a notação O . Dizemos que $f(x) = O(g(x))$, se existem um número real k e uma constante positiva C tais que: $\forall x > k, |f(x)| \leq C|g(x)|$.



PRÓXIMA AULA

Na próxima aula partiremos a uma segunda etapa deste curso. Nela, definiremos alguns conceitos elementares da teoria dos grafos e apresentaremos alguns problemas famosos desta teoria. Preparem-se para uma prazerosa sequência de tópicos que vêm sendo alvo de estudo de muitos matemáticos.

ATIVIDADES



ATIVIDADE 6.1. Existe uma maneira mais rápida para calcular o n -ésimo número de Fibonacci do que por fib2? Uma idéia envolve matrizes. Iniciamos escrevendo as equações $F_1 = F_1$ e $F_2 = F_0 + F_1$ que em notação matricial fica:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

Similarmente,

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

Em geral,

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

Então, querendo calcular F_n é suficiente calcular a n -ésima potência da matriz 2×2 .

1. Mostre que matrizes 2×2 podem ser multiplicadas usando-se 4 adições e 8 multiplicações. Mas se X é uma matriz 2×2 , quantas multiplicações são necessárias para calcular X^n ?

2. Mostre que a multiplicação matricial de X^n é da ordem de $O(\log n)$.

ATIVIDADE 6.2. Todo número natural n pode ser escrito na base 2 como segue $n = \sum_{i=0}^k j_i 2^i$, denotamos então $n = (i_k, i_{k-1}, \dots, i_1, i_0)$.

1. Faça um algoritmo que transforma um número natural em binário e vice-versa.
2. Faça um algoritmo que adiciona dois números binários.

ATIVIDADE 6.3. Escreva um algoritmo que dados dois números inteiros a, b determina $d = \text{mdc}(a, b)$ e dois inteiros x, y tais que $d = x.a + y.b$.

ATIVIDADE 6.4. Escreva um algoritmo que ordena uma lista com n números inteiros.

ATIVIDADE 6.5. Escreva um algoritmo que, dados dois polinômios $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$, determina o produto $p(x).q(x)$.

ATIVIDADE 6.6. Em cada umas das situações abaixo, indique se $f(n) = O(g(n))$, ou $g(n) = O(f(n))$ ou ambos.

1. $f(n) = n - 100, g(n) = n - 200$
2. $f(n) = n \log n, g(n) = 10n \log 10n$
3. $f(n) = 10 \log n, g(n) = \log(n^2)$



REFERÊNCIAS

DASGUPTA, S., et al. Algorithms. McGraw-Hill: New York, 2006.

LIPSCHUTZ, S. LIPSON, M. Matemática Discreta. Coleção Schaum. Bookman: São Paulo, 2004.

Grafos

META

- Introduzir noções elementares da teoria dos grafos.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

- Representar grafos por meio de matrizes e diagramas;
- Caracterizar uma árvore;
- Identificar grafos isomorfos.

PRÉ-REQUISITOS

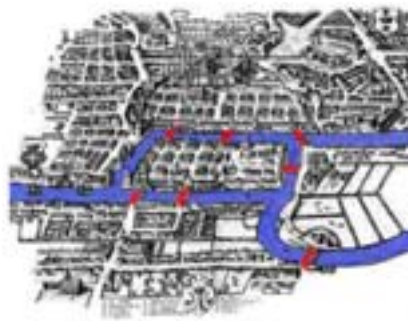
- Princípio da indução (aula 1);

7.1 Introdução

Caro aluno, a partir desta aula iniciaremos uma nova etapa do curso de matemática discreta. Passaremos a estudar alguns problemas famosos da teoria dos grafos. Para nos familiarizarmos com os termos usados nas aulas seguintes, definiremos alguns conceitos elementares. Afinal de contas, o que é um grafo? Veremos que muitos problemas podem ser modelados por grafos. Desde uma simples caminhada pela cidade até a tarefa de construir uma rede de comunicações com custo mínimo, passando pelas estruturas atômicas de compostos químicos. Daremos ainda o conceito de isomorfismo de grafos, que nos permitirão compará-los. Para concluir, apresentaremos problemas famosos da teoria dos grafos que serão melhor tratados nas aulas seguintes.

7.2 Noções Elementares

Um grafo G é uma tripla (V, E, \mathcal{I}) , onde V e E são conjuntos finitos e $\mathcal{I} \subset V \times E$ satisfaz $1 \leq N(\{v \in V; (v, e) \in \mathcal{I}\}) \leq 2$, para qualquer $e \in E$. Chamamos $V(G)$, $E(G)$ e \mathcal{I} de vértices, arestas e relação de incidência do grafo G , respectivamente. Notamos, pelo número de elementos do conjunto $I_e = \{v \in V; (v, e) \in \mathcal{I}\}$, que



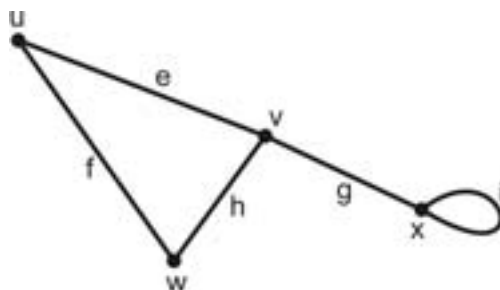


Figura 7.1: Grafo com vértices $V = \{u, v, w, x\}$, arestas $E = \{e, f, g, h, i\}$ e relação de incidência $\mathcal{I} = \{(u, e), (v, e), (u, f), (w, f), (v, g), (x, g), (v, h), (w, h), (i, x)\}$. Observe que i é um laço do grafo.

existem dois tipos de arestas. Se $N(I_e) = 1$, isto é, se existe apenas um vértice incidente à aresta e , dizemos que e é um laço. Quando o grafo não possui laços nem arestas múltiplas, isto é, dois vértices ligados por mais de uma aresta, o grafo é dito simples. Vértices que não se ligam a nenhum outro são ditos isolados. Convencionamos desenhar um grafo representando cada vértice por um círculo e as arestas por linhas ligando estes círculos.

Duas arestas incidentes num mesmo vértice são chamados adjacentes. O grau de um vértice é o número de arestas incidentes no vértice, sendo que cada laço conta como dois vértices.

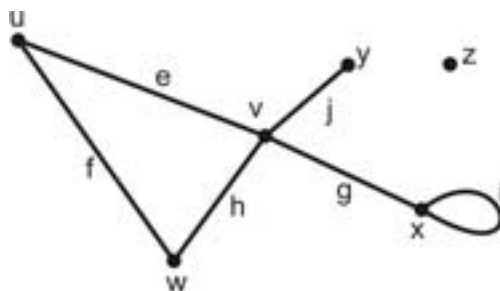


Figura 7.2: As arestas e e f são adjacentes, pois são incidentes ao vértice u . O grau do vértice v é $d_v = 4$, já o grau de x é $d_x = 3$ e o vértice z é isolado, logo $d_z = 0$.

Teorema 7.1. *A soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas.*

Demonstração: *Quando os graus são somados contamos cada aresta duas vezes.* □

Corolário 7.1. *O número de nós de grau ímpar de um grafo é par.*

Demonstração: *Considere um grafo $G = (V, E, \mathcal{I})$. Denotando o grau do vértice v por d_v , segue do teorema anterior que:*

$$2N(E) = \sum_{v \in V} d_v = \sum_{v \in V; d_v \text{ par}} d_v + \sum_{v \in V; d_v \text{ ímpar}} d_v$$

Separando o somatório em duas parcelas, a primeira contendo os graus pares e a segunda os graus ímpares, vemos que a primeira é par e como a soma das duas parcelas também é par, segue que a segunda parcela deve ser par. □

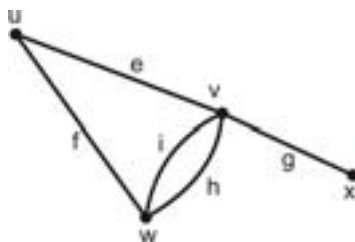
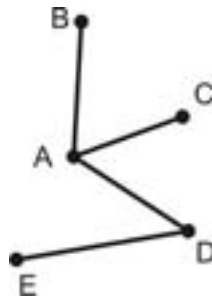


Figura 7.3: A sequência (u, e, v, i, w, h, v, x) é um ux -passeio, mas não é ux -caminho, pois o vértice v se repete. Já a sequência (x, g, v, e, u, f, w) é um xw -caminho. A sequência $(x, g, v, h, w, f, u, e, v, g, x)$ é um circuito, mas não é um ciclo. Contudo, (v, e, u, f, w, i, v) é ciclo. Observe que este grafo é conexo.

Um passeio do vértice u para o vértice v de um grafo (uv -passeio) é uma sequência alternada de vértices e arestas começando no vértice u e terminando no v , tal que cada aresta é incidente aos vértices que o cercam na sequência. Um caminho é um passeio que

não contém vértices repetidos. Um circuito é um passeio fechado, isto é, um passeio de um vértice para ele mesmo. Um ciclo é um caminho fechado, isto é, um passeio que contém exatamente dois vértices iguais: o inicial e o final. Dois vértices estão conectados se existe caminho entre eles no grafo. Um grafo é conexo se qualquer par de vértices no grafo estão conectados.

Exemplo 7.1 (Rede de comunicações). Deseja-se configurar uma rede de comunicações entre as cidades A, B, C, D, E de tal maneira que possa haver comunicação entre cada par de cidades. As ligações devem ser efetuadas por cabos telefônicos. Admitimos que mensagens possam ser retransmitidas, isto é, qualquer cidade pode mandar mensagem para outra por uma terceira. Modelar por meio de grafos.



Solução: O conjunto de cidades corresponde ao conjunto de vértices e cada aresta corresponde a um cabo telefônico. A figura mostra uma possível configuração de cabos entre as cidades que satisfaz à exigência do enunciado, ou seja, cada cidade pode se comunicar com qualquer outra. O grafo da figura é um exemplo de árvore, um grafo com exatamente um caminho entre cada par de vértices. Ou seja, este tipo de grafo fornece o esquema de conexão o mais "enxuto" possível, pois, se retirarmos uma aresta que seja,

eliminamos pelo menos um caminho e desconectamos o grafo.

Este problema vem, em geral, formulado como um problema de otimização: a "construção" de cada aresta implica num custo e queremos determinar quais arestas construir de modo a assegurar a comunicação a um custo o menor possível. Este é mais um problema na área de otimização combinatorial. ◀

O grafo $H = (V_H, E_H, \mathcal{I}_H)$ é um subgrafo de $G = (V, E, \mathcal{I})$ se $V_H \subset V$, $E_H \subset E$ e a relação de recorrência \mathcal{I}_H é a restrição de \mathcal{I} a $V_H \times E_H$. As componentes conexas de um grafo são os subgrafos conexos maximais deste grafo, ou seja, são os subgrafos deste grafo que não estão estritamente contidos em outros subgrafos conexos.

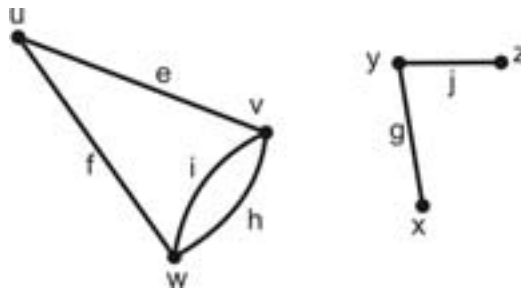


Figura 7.4: Grafo desconexo com duas componentes conexas facilmente identificáveis.

O desenho do grafo é muito útil em muitas situações. Porém, para grafos maiores e mais complexos precisamos de outro tipo de descrição. Podemos representar grafos por meio de matrizes, estabelecendo assim um elo útil com a álgebra. Temos a matriz de incidência $V \times E$, cujas linhas estão associadas aos vértices e as colunas às arestas. Um elemento na linha i e coluna j é 1 se o vértice i é incidente na aresta j e 0 caso contrário. A matriz de adjacência tem linhas e colunas associadas aos vértices. O elemento

na linha i e coluna j é o número de arestas que têm i e j como extremidades.

A matriz de incidência e de adjacência do grafo anterior são apresentadas abaixo.

$$M_I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7.3 Árvores

Definição 7.1. Uma árvore é um grafo simples conexo sem ciclos.

Teorema 7.2. Se T é uma árvore com $v \geq 2$ vértices então T contém ao menos dois vértices de grau 1.

Demonstração: Desde que T tem v vértices, todos caminhos em T devem ter comprimento menor do que v . Então deve existir um caminho mais longo em T , digamos (v_1, v_2, \dots, v_r) . Afirmamos que v_1 e v_r têm grau 1. Suponha que v_1 tem grau maior do que 1; então existe uma outra aresta incidente a v_1 , digamos $v_1 v_0$, onde v_0 é diferente de todos os demais v_2, \dots, v_r , pois caso contrário

existiria um ciclo. Então (v_0, v_1, \dots, v_r) seria um caminho mais longo, contradição. Portanto, grau de v_1 é 1 e similarmente, grau de v_r é 1. \square

Teorema 7.3. *Seja T um grafo simples com v vértices. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) T é uma árvore;
- (ii) T tem $v - 1$ arestas e nenhum ciclo;
- (iii) T tem $v - 1$ arestas e é conexo.

Demonstração: (i) \Rightarrow (ii) Devemos mostrar que todas árvores com v vértices possuem $v - 1$ arestas. Isso é verdade para $v = 1$. Suponha verdade para todas árvores com $v \leq k$ vértices e tome uma árvore T com $k + 1$ vértices. Então pelo teorema anterior, T possui um vértice w de grau 1. Remova w e sua aresta incidente de T para obter uma árvore T' com k vértices. Pela hipótese de indução, T' possui $k - 1$ arestas; logo T possui $(k - 1) + 1 = k$ arestas.

(ii) \Rightarrow (iii) Suponha que T possui $v - 1$ aresta, nenhum ciclo e é constituído por $t \geq 1$ componentes conexas T_1, \dots, T_t , cada uma das quais não possui ciclo e portanto, deve ser uma árvore. Denote por v_i o número de vértices de T_i . Então $\sum_i v_i = v$, e o número de arestas em T é $\sum_i (v_i - 1) = v - t$. Então $v - t = v - 1$, isto é, $t = 1$, logo T é conexo.

(iii) \Rightarrow (i) Suponha que T é conexo com $v - 1$ arestas, mas não é uma árvore. Então T deve ter um ciclo. Removendo uma aresta de um ciclo, nós não destruimos a conexidade, então podemos remover arestas dos ciclos até não restarem mais ciclos e preservar a

conexidade. O grafo resultante deve ser uma árvore, com v vértices e $a < v - 1$ arestas, contradizendo (ii). \square

Esse teorema pode ser usado para estabelecer uma natureza de árvore de certas moléculas químicas.

Exemplo 7.2 (Alcanos). Mostre que os alcanos (parafinas) C_nH_{2n+2} são moléculas do tipo árvore.

Solução: Cada molécula é representada por um grafo com $v = n + (2n + 2) = 3n + 2$ vértices. Dessas, n têm grau 4 (valência do carbono) e $2n + 2$ têm grau 1 (valência do hidrogênio). Então, pelo teorema (7.1), $2a = 4n + 2n + 2 = 6n + 2$, portanto, $a = 3n + 1 = v - 1$. Desde que moléculas são conexas, segue do teorema anterior que os grafos devem ser árvores, pelo teorema anterior. \blacktriangleleft

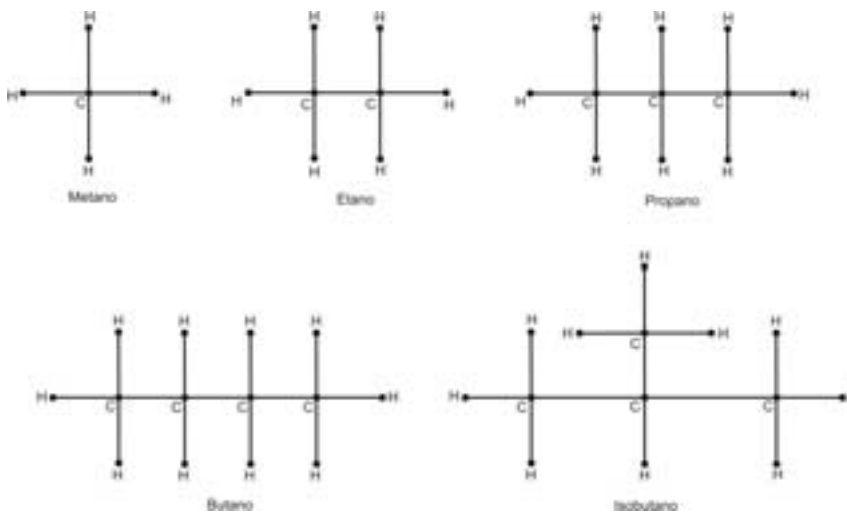


Figura 7.5: Observe que existem duas árvores "diferentes" correspondentes ao C_4H_{10} : butano e isobutano.

7.4 Isomorfismo

Dois grafos G e H são isomorfos se existe uma relação 1-1 entre os vértices $V(G)$ e $V(H)$ que preserva adjacência, isto é, se i e j em $V(G)$ são adjacentes em G , então os vértices correspondentes em $V(H)$ pela relação também são adjacentes em H e vice-versa.

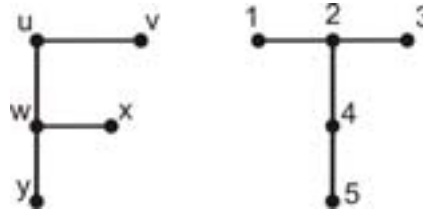


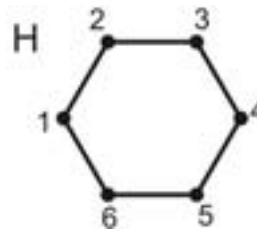
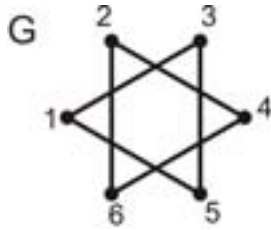
Figura 7.6: Grafos isomorfos. Considere a relação $f(1) = y, f(2) = w, f(3) = x, f(4) = u, f(5) = v$.

Não é tão simples perceber a relação entre os vértices que comprove o isomorfismo entre dois grafos. Se tivermos sorte de detectar por inspeção uma relação 1-1 que comprove o isomorfismo, ótimo. Caso contrário, temos que tentar verificar alguma diferença estrutural entre os grafos que evidencie não serem eles isomorfos. Os itens mais óbvios para verificar são número de vértices, número de arestas e graus de vértices. Mas outros itens úteis são conectividade ou planaridade (que será estudada na aula 9).

Exemplo 7.3 (Isomorfismo e conexidade). Mostrar que os grafos G e H não são isomorfos.

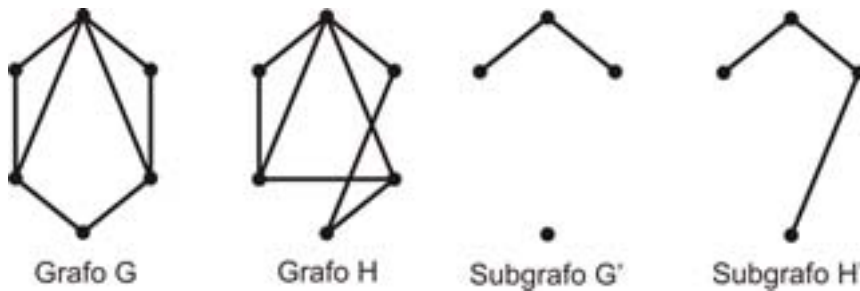
Solução: Note que G e H possuem o mesmo número de vértices, mesmo número de arestas, e o grau de todos os vértices é 2. No entanto, G é desconexo e H é conexo. Portanto, os grafos não são isomorfos. ◀

Considere agora dois grafos isomorfos G, \tilde{G} . Seja I um subcon-



junto de $V(G)$ e \tilde{I} o subconjunto correspondente de $V(\tilde{G})$, com respeito à relação 1-1 que evidencia o isomorfismo entre G e \tilde{G} . Então, os subgrafos de G e \tilde{G} obtidos pela remoção dos vértices em I e \tilde{I} e as arestas a eles incidentes são também isomorfos.

Exemplo 7.4 (Isomorfismo e subgrafo). Mostrar que os grafos G e H não são isomorfos.



Solução: Os dois grafos em questão contêm o mesmo número de vértices (6), de arestas (8) e o mesmo conjunto de graus de vértices (2, 2, 2, 3, 3, 4). No entanto, se removermos os vértices de grau 3 de G e H , obtemos os subgrafos G' e H' . Portanto, G e H não são isomorfos, pois se fossem os subgrafos G' e H' seriam isomorfos, que não é o caso, uma vez que G' é desconexo e H' é conexo. ◀

O grafo completo K_n é o grafo simples com n vértices, em que cada par de vértices são adjacentes. Desde que cada um dos n vértices deve ter grau $n - 1$, o número a de arestas deve satisfazer

$$2a = n(n - 1), \text{ logo } a = \frac{1}{2}n(n - 1).$$

7.5 Grafos Famosos

Nessa seção apresentamos alguns problemas famosos que serão nosso ponto de partida para as próximas aulas deste curso: roteamentos, planaridade e coloração.

Exemplo 7.5 (As pontes de Königsberg). O primeiro e mais famoso problema na teoria dos grafos, resolvido por Euler em 1736, é o problema das 7 pontes. Na cidade de Königsberg sete pontes cruzam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio, conforme ilustrado na figura a seguir. Será possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma vez?

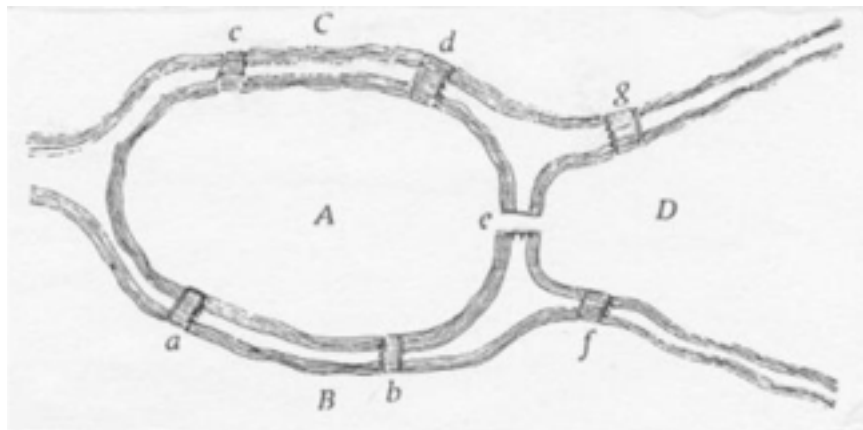


Figura 7.7: Ilhas no rio Pregel em Königsberg

Euler transformou o problema em um problema de grafos. A cada margem e ilha associou um vértice e a cada ponte uma aresta,

obtendo o grafo da figura abaixo. Em termos de grafo, o problema consiste em achar um circuito que percorra cada aresta exatamente uma vez. Grafos para os quais isto é possível são chamados eulerianos. Na próxima aula veremos como Euler resolveu este problema. Você seria capaz de tentar?

Exemplo 7.6 (Ciclo Hamiltoniano). Um problema semelhante ao problema das sete pontes de Königsberg consiste em verificar se, dado um grafo, é possível construir um ciclo que inclua todos os vértices. Tal ciclo é chamado de hamiltoniano. Um grafo que contenha tal ciclo é chamado de grafo hamiltoniano. O grafo abaixo é hamiltoniano.

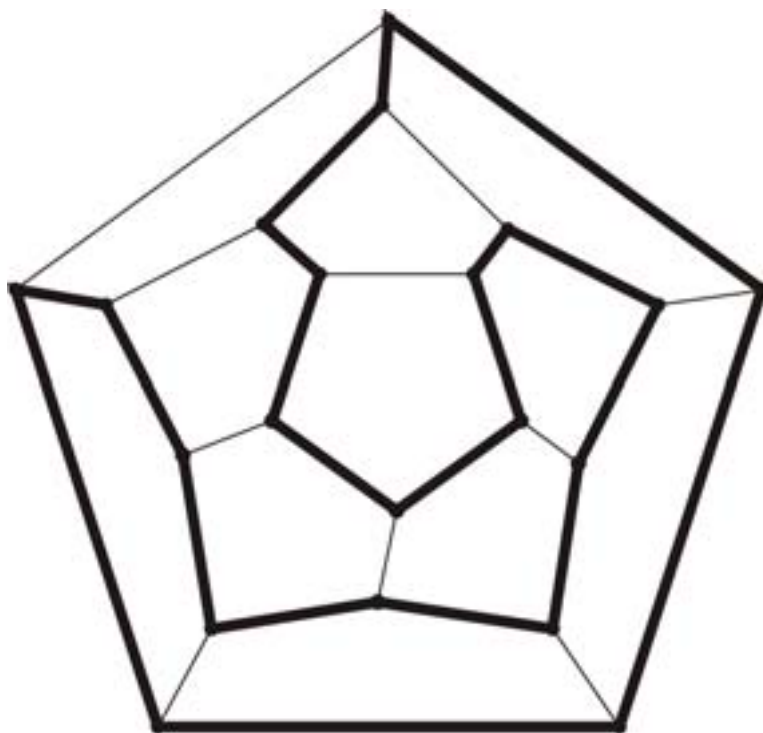


Figura 7.8: Grafo dodecaedro. Em destaque, ciclo hamiltoniano.

Embora semelhante ao problema de achar um ciclo euleriano, o problema de achar um ciclo hamiltoniano é muito mais complexo. Não são conhecidas condições necessárias e suficientes para que um grafo genérico contenha um ciclo hamiltoniano, nem tampouco métodos para construir tal ciclo, caso exista.

Exemplo 7.7 (Fornecimento de serviços). Três companhias públicas devem fornecer três tipos de serviços, água, luz e gás, a três prédios públicos. Decidiu-se usar tubulações subterrâneas, todas à mesma profundidade, por motivos de segurança. Como realizar esta tarefa? Este é um famoso exemplo em teoria dos grafos, us-

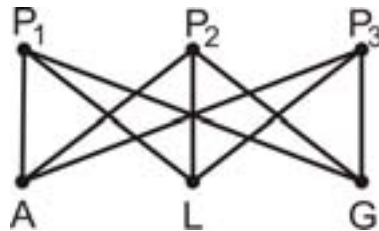


Figura 7.9: Grafo associado ao problema de fornecimento de serviços.

ado para introduzir e motivar o conceito de planaridade. Associando um vértice a cada prédio (P_1, P_2, P_3) e cada fonte de serviço (A, L, G), obtemos o grafo acima. Você consegue fazer essas 9 ligações sem que eles se cruzem?

Exemplo 7.8 (O problema das quatro cores). O teorema das quatro cores diz que é possível colorir as regiões de qualquer mapa desenhado no plano usando no máximo quatro cores, de maneira que nenhum par de regiões que tenham uma fronteira em comum (não apenas um ponto) seja da mesma cor.

Para transformar este problema em um problema de grafos,



associamos a cada região um vértice e dizemos que dois vértices são adjacentes se as regiões correspondentes têm fronteira comum. Note que, por construção, o grafo associado a um mapa qualquer é um grafo planar. A afirmação que temos, em termos de grafos, é que: "usando no máximo quatro cores, um grafo planar pode ter seus vértices coloridos de modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes".

7.6 Conclusão

Nesta aula, nos familiarizamos com muitos novos conceitos da teoria dos grafos. Vimos o que é um grafo e como ele pode ser usado para modelar diversos problemas. Aprendemos a representar grafos de forma matricial, tanto por matriz de adjacência como por matriz de incidência. Conhecemos ainda algumas técnicas para verificar se dois grafos são isomorfos. Por fim fomos apresentados a alguns problemas famosos da teoria dos grafos e desafiados por eles.



RESUMO

Um grafo G é uma tripla (V, E, \mathcal{I}) , onde V e E são conjuntos finitos e $\mathcal{I} \subset V \times E$ satisfaz $1 \leq N(\{v \in V; (v, e) \in \mathcal{I}\}) \leq 2$, para qualquer $e \in E$.

A matriz de incidência $V \times E$, possui linhas associadas aos vértices e colunas às arestas. O elemento na linha i e coluna j é 1 se o vértice i é incidente na aresta j e 0 caso contrário.

A matriz de adjacência tem linhas e colunas associadas aos vértices. O elemento na linha i e coluna j é o número de arestas que têm i e j como extremidades.

O grau de um vértice é o número de arestas incidentes no vértice, sendo que cada laço conta como dois vértices. A soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas. O número de nós de grau ímpar de um grafo é par.

Um uv -passeio é uma sequência alternada de vértices e arestas começando no vértice u e terminando no v , tal que cada aresta é incidente aos vértices que o cercam na sequência. Um caminho é um passeio que não contém vértices repetidos. Um circuito é um passeio fechado. Um ciclo é um caminho fechado. Um grafo conexo é aquele tal que existe caminho entre qualquer par de vértices no grafo.

Uma árvore é um grafo simples conexo sem ciclos.

Dois grafos G e H são isomorfos se existe uma relação 1-1 entre os vértices $V(G)$ e $V(H)$ que preserva adjacência.



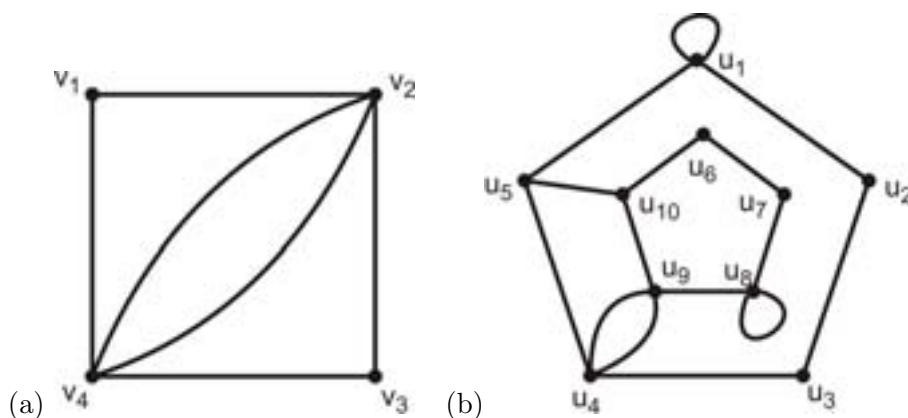
PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, estudaremos a solução dada por Euler para o problema das pontes de Königsberg. Enunciaremos três problemas clássicos de roteamento: o carteiro chinês, o caixeiro viajante e caminho mais curto. Aprenderemos ainda o algoritmo de Dijkstra para obter um caminho mais curto entre vértices de um grafo.



ATIVIDADES

ATIVIDADE 7.1. Para cada grafo abaixo, determine as matrizes de adjacência e de incidência.



ATIVIDADE 7.2. Desenhe o grafo G que corresponde a cada uma das matrizes de adjacência seguintes:

$$\bullet A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

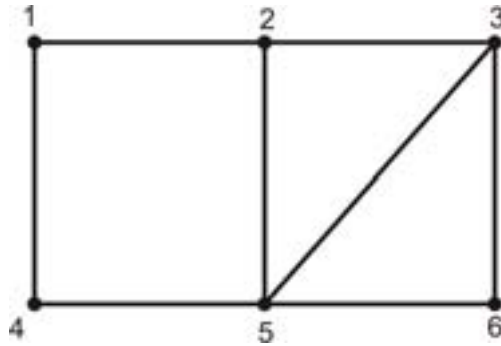
ATIVIDADE 7.3. Considere o grafo do item (b) da atividade 1. Determine um $u_{10}u_8$ -passeio que não seja um $u_{10}u_8$ -caminho, mas que possuam o mesmo número de arestas. Determine um u_5u_{10} -passeio que passa uma única vez por todas as arestas do grafo.

ATIVIDADE 7.4. Considere ainda os grafos da atividade 1. Eles são Eulerianos? E Hamiltonianos? Justifique suas respostas.

ATIVIDADE 7.5. Desenhe todas as árvores com exatamente seis vértices.

ATIVIDADE 7.6. Mostre que todos alcoóis $C_nH_{2n+1}OH$ têm moléculas do tipo árvore. (A valência de C,O e H são 4,2 e 1, respectivamente.)

ATIVIDADE 7.7. A operação deletar vértice de um grafo G determina um subgrafo G' com todos os vértices de G exceto aquele deletado e todas as arestas de G exceto as que contém o vértice deletado. Ache os subgrafos $G_k, k = 1, \dots, 6$ obtidos do grafo G abaixo pela deleção do vértice k .



ATIVIDADE 7.8. Mostre que nenhum par de subgráfos $G_k, k = 1, \dots, 6$ obtidos na atividade anterior são isomorfos.

REFERÊNCIAS



- LIPSCHUTZ, S. LIPSON, M. Matemática Discreta. Coleção Schaum. Bookman: São Paulo, 2004.
- SANTOS, J.P.O., et al. Introdução à Análise Combinatória. Moderna: Rio de Janeiro, 2007.

Roteamentos

META

- Introduzir alguns problemas de roteamento.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

- Distinguir circuito euleriano e ciclo hamiltoniano;
- Obter um circuito euleriano de um grafo euleriano;
- Caracterizar grafos bipartidos;
- Obter um caminho mais curto entre vértices de grafos conexos.

PRÉ-REQUISITOS

- Conceitos elementares da teoria dos grafos (aula 7).

8.1 Introdução

Prezado aluno, nesta aula apresentaremos alguns problemas clássicos de roteamento. São eles o problema do carteiro chinês, o problema do caixeiro viajante e o problema do caminho mais curto. Nela aprenderemos a diferença entre passeio euleriano e caminho hamiltoniano. Criaremos um algoritmo que obtém, quando existir, um circuito euleriano num grafo. Caracterizaremos grafos bipartidos como sendo aqueles que não possuem ciclos ímpares, e utilizaremos este resultado para mostrar que grafos bipartidos conexos com número ímpar de vértices não podem ser hamiltonianos. Para finalizar, resolveremos, aplicando o algoritmo de Dijkstra, um problema muito comum: qual o caminho mais curto que podemos percorrer partindo do ponto A do mapa abaixo e chegando no ponto B ?



8.2 Circuito Euleriano

Os passeios eulerianos são assim designados pela sua relação com o problema das pontes de Königsberg que foi resolvido por Euler.

Definição 8.1. Um passeio é dito euleriano se for um passeio que contém cada aresta uma única vez. Um passeio euleriano fechado é dito circuito euleriano. Se G é um grafo que admite um circuito euleriano, então G é dito um grafo euleriano.

O problema das pontes de Königsberg é saber se o correspondente grafo possui ou não algum circuito euleriano. Um problema similar a este é o problema do carteiro chinês. Neste problema, as arestas do grafo representam trechos de ruas que o carteiro deve percorrer para entregar cartas. Admitindo que o carteiro procure realizar seu trabalho dispendendo o menor esforço possível, e que seu esforço seja proporcional à distância percorrida, temos um problema de otimização: encontrar um circuito que contenha todas arestas do grafo e cuja distância total (a soma das distâncias das arestas no circuito) seja mínima. Se o grafo for euleriano, a resposta é trivial, pois qualquer circuito euleriano fornece um procedimento simples para a construção de tal circuito. Se o grafo não for euleriano, o problema torna-se bem mais complexo, embora existam métodos eficientes para se achar uma solução ótima.

A resposta geral para esse tipo de problema é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 8.1 (Euler). *O grafo conexo G é euleriano se, e somente se, os graus de todos os vértices de G são pares.*

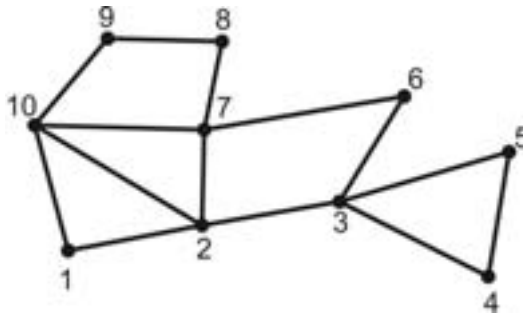
Demonstração: *Suponha que o grafo G seja euleriano, isto é, possui circuito euleriano. Observe que os graus dos vértices podem ser calculados enquanto percorremos o circuito euleriano, pois este contém todas as arestas. Para tanto, começamos em um vértice qualquer e percorremos o circuito, incrementando de uma unidade*

o contador associado a cada vértice (inicializado com valor zero) cada vez que saímos ou entramos do vértice. No final do percurso, os contadores conterão os graus dos vértices respectivos. Como se trata de um circuito, a cada entrada corresponde uma saída, portanto os graus dos vértices serão pares.

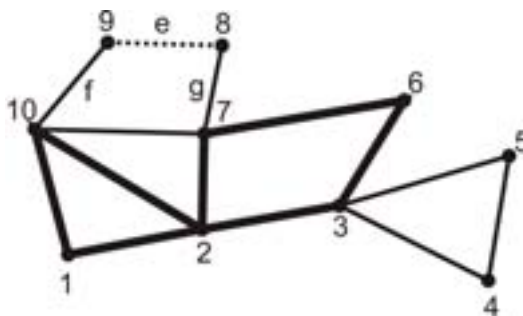
Reciprocamente, suponha que todos os vértices de G tenham grau par. Tome um vértice qualquer de G , digamos o vértice i , e comece a percorrer o grafo a partir dele, sem repetir arestas, até não conseguir mais prosseguir, isto é, até alcançar um vértice tal que todas as arestas incidentes no vértice já tenham sido percorridos. Como todos os vértices têm grau par, este vértice tem que ser o vértice i . Se o circuito C assim construído contiver todas as arestas, a demonstração estará concluída. Suponha, no entanto, que G contém uma aresta, por exemplo a aresta e , que não pertence ao circuito. Como G é conexo, existe um caminho entre algum vértice do circuito e alguma das extremidades da aresta e , por exemplo entre j , vértice do circuito, e k , extremidade de e . Sem perda de generalidade, este caminho não contém arestas de C . Comece a percorrer o grafo a partir de j continuando livremente, sem, no entanto, repetir arestas ou utilizar arestas de C . Como C é um circuito, mesmo "retirando" as arestas de C do grafo, os vértices continuam a ter grau par, portanto esta nova incursão pelo grafo só pode parar em j , completando um novo circuito, \tilde{C} . Note agora que podemos combinar os dois circuitos de modo a formar um só que contenha todas as arestas de C e \tilde{C} . Basta percorrer C começando em j (e não em i) e quando voltar a j percorrer \tilde{C} em seguida. Em resumo, temos um procedimento que nos permite: (i) construir um circuito C , sem repetição de arestas, (ii) se alguma

aresta e de G não pertence a C , obtemos um novo circuito, também sem repetição de arestas, que contém as arestas de C e o arco e . Como o número de arestas de G é finito, a repetição sucessiva de (ii) termina por produzir um circuito que contém todas as arestas de G , sem repetição, ou seja, um circuito euleriano. \square

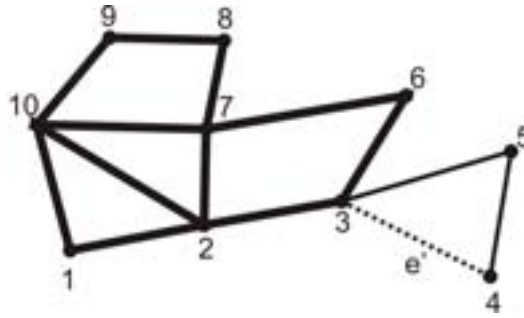
Exemplo 8.1 (Obtendo circuito euleriano). Aplique o algoritmo descrito na demonstração para construir o circuito euleriano do grafo abaixo:



Solução: A figura seguinte mostra o primeiro circuito obtido (1, 2, 7, 6, 3, 2, 10, 1) e mostra (tracejada) a aresta e que não pertence ao circuito. Podemos escolher ligar esta aresta ao circuito



pelas arestas f ou g . Escolhendo a primeira e começando a partir do vértice 10, obtemos o circuito (10, 1, 2, 7, 6, 3, 2, 10, 9, 8, 7, 10).



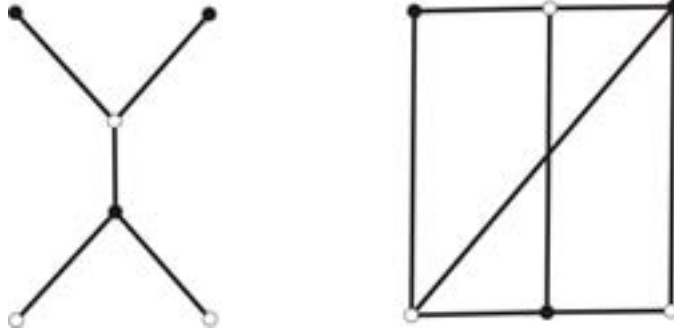
A situação atual é indicada pela figura onde indicamos (em tracejado) uma aresta que não pertence ao circuito e' . Como uma das extremidades, o vértice 3, já pertence ao circuito, o passeio que liga a aresta ao circuito é o próprio vértice 3. Começando no vértice 3, obtemos o circuito euleriano $(3, 2, 10, 9, 8, 7, 10, 1, 2, 7, 6, 3, 4, 5, 3)$. ◀

8.3 Grafos Bipartidos

Definição 8.2. Um grafo é dito bipartido se seu conjunto de vértices V podem ser particionados em dois conjuntos P, B de tal forma que toda aresta do grafo ligue um vértice de P a um vértice de B . A partição $V = P \cup B$ é chamada bipartição do conjunto de vértices.

Podemos interpretar P e B como preto e branco, veja que o grafo é bipartido quando os vértices podem ser coloridos usando duas cores tal que nenhuma aresta ligue vértices de mesma cor. Por essa razão, grafos bipartidos são algumas vezes chamados bicromáticos.

Exemplo 8.2 (Grafos Bipartidos). Cada vértice está colorido de branco ou de preto. Para verificar que os grafos são bipartidos, note que cada aresta liga um vértice preto a um vértice branco.



Teorema 8.2. *Um grafo conexo é bipartido se, e somente se, não contém ciclo de comprimento ímpar.*

Demonstração: *Se um grafo G contém um ciclo ímpar, então este ciclo, e portanto o próprio G , não pode ser bipartido. Reciprocamente, suponha que G não contém ciclo de comprimento ímpar; devemos mostrar como colorir seus vértices de P e B .*

Escolha qualquer vértice v de G , e a partição V como $P \cup B$ onde:

$$P = \{u \in V : \text{caminho mais curto de } u \text{ para } v \text{ tem comprimento par.}\}$$

$$B = \{u \in V : \text{caminho mais curto de } u \text{ para } v \text{ tem comprimento ímpar.}\}$$

Temos $v \in P$ desde que 0 é par; temos que checar se nenhuma aresta de G tem ambas extremidades em P ou ambas em B . Com efeito, suponha que exista uma aresta xy com $x \in P$ e $y \in P$. Então, denotando o comprimento do menor caminho do vértice v_1 para o vértice v_2 por $d(v_1, v_2)$, temos $d(v, x) = 2m$ e $d(v, y) = 2n$ para alguns inteiros m, n . Mas existe um caminho de v para y via x de comprimento $2m + 1$, então $2n \leq 2m + 1$. Similarmente, $2m \leq 2n + 1$, então $m = n$. Denote o caminho mais curto de v para x por $c(x)$ e de v para y de $c(y)$. Desde que $m = n$, $c(x)$ e $c(y)$ têm comprimento igual. Seja w o último vértice em $c(x)$ que também

está em $c(y)$ (possivelmente $w = v$). Então a parte de $c(x)$ de w para x e a parte de $c(y)$ de w para y deve ter comprimento igual, e desde que eles têm apenas w em comum, eles devem, com a aresta xy , formar um ciclo ímpar. Mas G não possui circuito ímpar, então a suposição feita sobre a aresta xy (que $x, y \in B$) é falsa. Então não existe aresta com ambos vértices em P . Similarmente não existe aresta com ambos vértices em B . \square

Definição 8.3. Um grafo bipartido com conjunto de vértices $V = P \cup B$ é completo se todo vértice de P estiver ligado a todos os vértices de B . Se $N(P) = m$ e $N(B) = n$, o grafo bipartido completo é denotado por $K_{m,n}$ ou $K_{n,m}$.

O grafo de fornecimento de serviços no exemplo (7.7) pode ser denotado por $K_{3,3}$. Claramente, $K_{m,n}$ tem $m + n$ vértices e mn arestas; m vértices têm grau n e n vértices têm grau m . Os grafos completos K_n e bipartidos completos $K_{n,m}$ desempenham um papel importante na teoria dos grafos, principalmente no estudo de planaridade como veremos na próxima aula.

8.4 Ciclo Hamiltoniano

A discussão anterior sobre grafos eulerianos enfatiza travessias de arestas; agora nos concentramos na visita aos vértices.

Definição 8.4. Um ciclo hamiltoniano em um grafo G é um caminho fechado que visita todos vértices de G exatamente uma vez. Se G admite um ciclo hamiltoniano, então G é chamado um grafo hamiltoniano.

Este problema de obter um ciclo hamiltoniano é muitas vezes



exemplificado pelo problema do caixeiro viajante. Neste problema, os vértices são cidades que devem ser visitadas pelo caixeiro e as arestas são as vias que ligam estas cidades. Pretende-se encontrar um percurso tal que o caixeiro viajante visite várias cidades e volte ao ponto de partida, quando possível, percorrendo a menor distância possível.

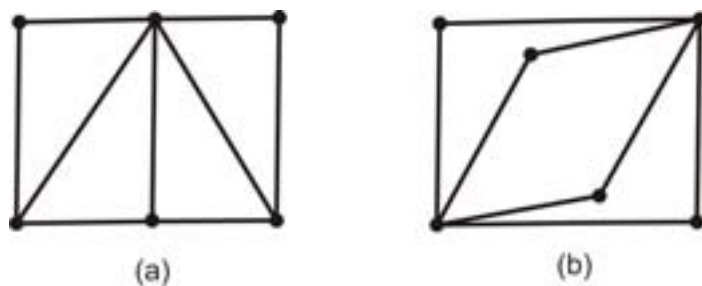


Figura 8.1: (a) Grafo hamiltoniano que não é euleriano. (b) Grafo euleriano que não é hamiltoniano.

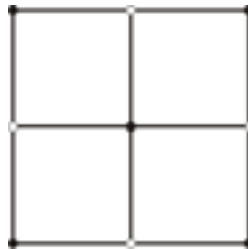
Note que um circuito euleriano atravessa cada aresta exatamente uma vez, mas pode repetir vértices, enquanto que um ciclo hamiltoniano visita cada vértice exatamente uma vez. Abaixo vemos exemplos de grafo hamiltoniano que não é euleriano e vice-versa.

Exemplo 8.3. O grafo octaedral é hamiltoniano.



Solução: Tome o ciclo $(1,2,3,4,5,6,1)$. ◀

Exemplo 8.4. O grafo abaixo não é hamiltoniano.



Solução: A forma mais fácil de ver isso é notar que possuindo 9 vértices se fosse hamiltoniano, deveria conter um ciclo de comprimento 9. Mas, sendo um grafo bipartido, ele contém apenas ciclos de comprimento par. ◀

Apesar de ser claro que apenas grafos conexos possam ser hamiltonianos; e ainda que, por argumento análogo ao exemplo anterior, todo grafo bipartido conexo com número ímpar de vértices não pode ser hamiltoniano; não existe um critério simples para nos dizer se o grafo é ou não hamiltoniano como existe para grafos eulerianos.

8.5 Problema do caminho mais curto

A cada aresta e de G seja $w(e)$ um número real associado a e , chamado seu peso. Então G , junto com esses pesos sobre suas arestas, é chamado grafo com pesos. Grafos com pesos ocorrem frequentemente em aplicações de teoria dos grafos. Num grafo de comunicação, por exemplo, ele pode representar o custo de construção ou manutenção de vários links de comunicação.

Se H é um subgrafo de um grafo com pesos, o peso $w(H)$ de H é a soma dos pesos $\sum_{e \in E(H)} w(e)$ sobre suas arestas. Muitos problemas de otimização buscam encontrar, num grafo com pesos, um subgrafo com peso máximo (ou mínimo). Um desses problemas é o *problema do caminho mais curto*: dada um mapa da malha rodoviária que liga várias cidades, determine a rota mais curta entre duas cidades específicas naquela malha.

Aqui precisamos encontrar, num grafo com pesos, um caminho de peso mínimo, conectando dois vértices específicos u_0 e v_0 ; os pesos representam as distâncias entre as cidades e são, portanto, não negativos. O caminho indicado no grafo da figura seguinte é um u_0v_0 -caminho de peso mínimo.

Agora apresentaremos um algoritmo para resolver o problema do caminho mais curto. Para ser mais claro, nos referimos ao peso de um caminho como seu comprimento; similarmente, o peso mínimo de um uv -caminho será chamado a distância entre u e v e denotada por $d(u, v)$. Essas definições coincidem com as noções usuais de comprimento e distância quando todos os pesos são iguais a um.

Assumiremos que G é um grafo simples e que os pesos são

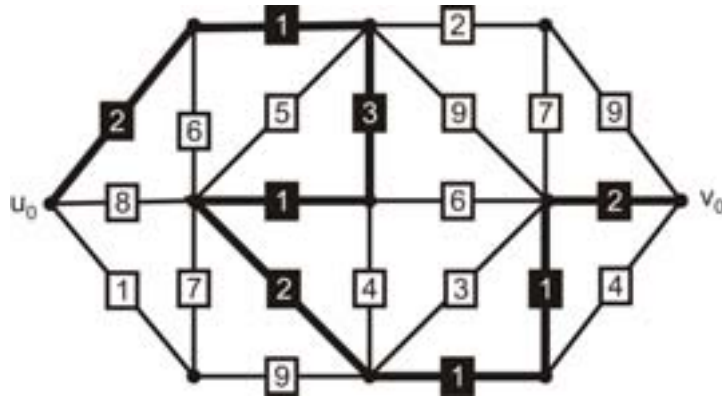


Figura 8.2: u_0v_0 -caminho de peso mínimo (13).

positivos. Se uma aresta $uv \notin E(G)$, adotaremos $w(uv) = \infty$. O algoritmo que será descrito foi descoberto por Dijkstra (1959) e, independentemente, por Whiting e Hillier (1960). Ele não encontra simplesmente o menor u_0v_0 -caminho, mas os menores caminhos de u_0 para todos os outros vértices de G . A idéia básica é a seguinte.

Suponha que S seja um subconjunto próprio de V tal que $u_0 \in S$, e denote $\bar{S} = V \setminus S$. Se $P = u_0 \dots \bar{u}\bar{v}$ é um menor caminho de u_0 para \bar{S} então

$$d(u_0, v) = d(u_0, \bar{u}) + w(\bar{u}\bar{v})$$

e a distância de u_0 para \bar{S} é dada pela fórmula

$$d(u_0, \bar{S}) = \min_{u \in S, v \in \bar{S}} \{d(u_0, u) + w(uv)\} \quad (8.6)$$

Essa fórmula é a base do algoritmo de Dijkstra. Iniciando com um conjunto $S_0 = \{u_0\}$, uma seqüência crescente S_0, S_1, \dots, S_{v-1} de subconjuntos de V é construída de tal forma que, no final do estágio i , os menores caminhos de u_0 para todos vértices de S_i são conhecidos.

O primeiro passo é determinar um vértice mais próximo a u_0 . Isso é obtido calculando-se $d(u_0, \overline{S_0})$ e selecionando um vértice $u_1 \in \overline{S_0}$ tal que $d(u_0, u_1) = d(u_0, \overline{S_0})$.

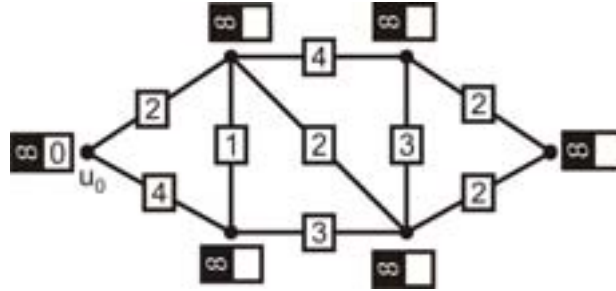
$$d(u_0, \overline{S_0}) = \min_{v \in \overline{S_0}} \{w(u_0v)\}$$

portanto $d(u_0, \overline{S_0})$ é facilmente calculado. Agora colocamos $S_1 = \{u_0, u_1\}$ e P_1 denota o caminho u_0u_1 ; esse é claramente um u_0u_1 -caminho mais curto. Em geral, se o conjunto $S_k = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}$, então os caminhos mais curtos correspondentes P_1, P_2, \dots, P_k já foram determinados e calculamos $d(u_0, \overline{S_k})$ usando (8.6) e selecionamos um vértice $u_{k+1} \in \overline{S_k}$ tal que $d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, \overline{S_k})$. Por (8.6), $d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, u_j) + w(u_ju_{k+1})$ para algum $j \leq k$; nós pegamos um u_0u_{k+1} -caminho mais curto adicionando a aresta u_ju_{k+1} ao caminho P_j .

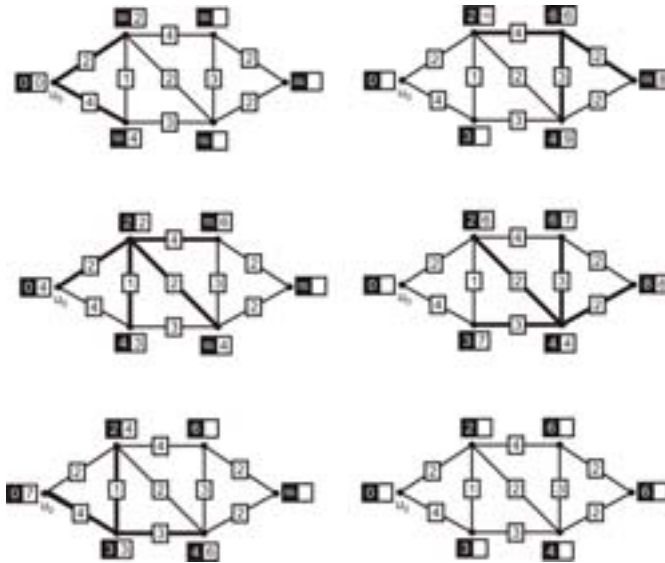
Em resumo, o algoritmo de Dijkstra é o seguinte:

1. Faça $l(u_0) = 0, l(v) = \infty$, para $v \neq u_0, S_0 = \{u_0\}, i = 0$.
2. Para cada $v \in \overline{S_i}$, troque $l(v)$ por $\min\{l(v), l(u_i) + w(u_iv)\}$. Calcule $\min_{v \in \overline{S_i}} \{l(v)\}$ e denote por u_{i+1} um vértice para o qual esse mínimo é atingido. Faça $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$.
3. Se $i = |V(G)| - 1$, pare. Se não, troque i por $i + 1$ e volte ao passo 2.

Exemplo 8.5 (Algoritmo de Dijkstra). Utilize o algoritmo de Dijkstra para determinar um menor caminho de u_0 para os vértices restantes do grafo abaixo.



Solução: Basta seguir os seis passos a seguir.



8.6 Conclusão

Nesta aula, notamos que enquanto a tarefa de determinar se um grafo é euleriano é simples, não ocorre o mesmo para grafos hamiltonianos. Caracterizamos grafos bipartidos como aqueles que não

contêm ciclo de comprimento ímpar. E para finalizar, fomos apresentados ao algoritmo de Dijkstra para resolver o problema do caminho mais curto entre dois vértices de um grafo.

RESUMO



Um passeio euleriano é aquele que contém cada aresta uma única vez. Um circuito euleriano é um passeio euleriano fechado. Um grafo é euleriano se admite circuito euleriano. O grafo conexo G é euleriano se, e somente se, os graus de todos os vértices de G são pares.

Um grafo conexo é bipartido se, e somente se, não contém ciclo de comprimento ímpar.

Um ciclo hamiltoniano em um grafo G é um caminho fechado que visita todos vértices de G exatamente uma vez. Se G admite um ciclo hamiltoniano, então G é chamado um grafo hamiltoniano.

Algoritmo de Dijkstra

1. Faça $l(u_0) = 0, l(v) = \infty$, para $v \neq u_0, S_0 = \{u_0\}, i = 0$.
2. Para cada $v \in \overline{S_i}$, troque $l(v)$ por $\min\{l(v), l(u_i) + w(u_i v)\}$. Calcule $\min_{v \in \overline{S_i}}\{l(v)\}$ e denote por u_{i+1} um vértice para o qual esse mínimo é atingido. Faça $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$.
3. Se $i = |V(G)| - 1$, pare. Se não, troque i por $i + 1$ e volte ao passo 2.



PRÓXIMA AULA

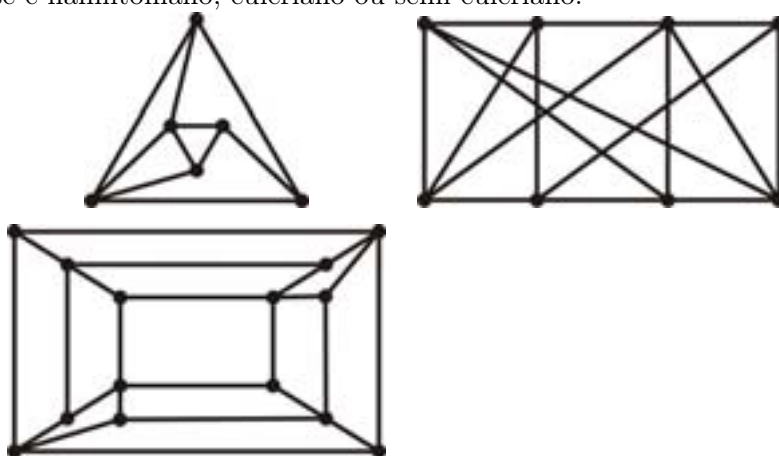
Na próxima aula, esturaremos o problema de planaridade de grafos. Surgindo qualquer dúvida conceitual, faça uma nova leitura da aula 7.



ATIVIDADES

ATIVIDADE 8.1. Um passeio euleriano é um passeio que contém todas arestas do grafo, mas não é fechado. Um grafo não euleriano que contém um passeio euleriano é dito semi-euleriano. Mostre que um grafo G é semi-euleriano se, e somente se, contém exatamente dois vértices de grau ímpar.

ATIVIDADE 8.2. Para cada um dos grafos abaixo, determine se é hamiltoniano, euleriano ou semi-euleriano.



ATIVIDADE 8.3. As distâncias entre cinco cidades é dada na tabela abaixo. Encontre o caminho mais curto entre elas.

	A	B	C	D	E
A	0	10	11	13	9
B	10	0	8	3	6
C	11	8	0	8	13
D	13	3	8	0	8
E	9	6	13	8	0

ATIVIDADE 8.4. Uma companhia aérea opera em seis cidades C_1, \dots, C_6 . O custo para um vôo direto da cidade C_i à cidade C_j é dado na entrada (i, j) da matriz a seguir, onde (∞) indica que não há vôo direto entre aquelas duas cidades):

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

A companhia está interessada em calcular uma tabela com as rotas mais baratas entre duas cidades. Prepare tal tabela.

ATIVIDADE 8.5. Um lobo, uma cabra e um repolho estão numa margem do rio. Um barqueiro deseja atravessar o rio com eles, mas, desde que seu barco é muito pequeno, ele pode levar apenas um deles de cada vez. Por razões óbvias, nem o lobo e a cabra, nem a cabra e o repolho podem ser deixados juntos. Como o barqueiro poderá atravessar o rio com eles?

ATIVIDADE 8.6. Dois homens têm uma jarra de 8 litros cheia de vinho e duas jarras vazias de 3 e 5 litros, respectivamente. Qual é a forma mais simples de dividir o vinho igualmente entre os dois homens utilizando as três jarras e sem desperdiçar nenhum litro de vinho?



REFERÊNCIAS

ANDERSON, I. *A First Course in Discrete Mathematics*. Springer: Londres, 2001.

BONDY, J.A., MURTY, U.S.R. *Graph Theory with Applications*. Elsevier: Nova Iorque, 1976.

SANTOS, J.P.O., et al. *Introdução à Análise Combinatória*. Moderna: Rio de Janeiro, 2007.

Planaridade

META

- Introduzir o problema da planaridade de grafos.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

- Distinguir grafo planar e plano;
- Determinar o dual de um grafo;
- Caracterizar grafos planares;
- Aplicar o algoritmo que determina se um grafo hamiltoniano é planar.

PRÉ-REQUISITOS

- Conceitos elementares da teoria dos grafos (aula 7).

9.1 Introdução

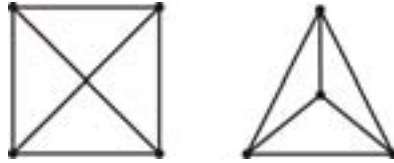
Caro aluno, essa é nossa penúltima aula do curso. Nela, definiremos grafos mergulháveis em superfícies, voltando nossa atenção ao caso de grafos mergulháveis no plano e veremos que estes são também mergulháveis na esfera. Definiremos o dual de um grafo planar. Apresentaremos a famosa fórmula de Euler que relaciona o número de vértices, arestas e regiões de um grafo. A utilizaremos para mostrar que não há solução para o famoso problema do fornecimento de serviços. Enunciaremos ainda o Teorema de Kuratowski, que caracteriza grafos planares. Por fim, apresentaremos um algoritmo que verifica se um grafo hamiltoniano é ou não planar.



9.2 Grafos Mergulháveis em Superfícies

Um grafo é dito mergulhável no plano, ou planar, se ele pode ser desenhado no plano de tal modo que suas arestas se intersectam apenas nos seus extremos. Um tal desenho de um grafo planar G é dito um mergulho planar de G . Um mergulho planar \tilde{G} de G é considerado isomorfo a G . Dizemos que um mergulho planar de um grafo planar é um grafo plano.

O conceito de grafo planar já apareceu no problema do exemplo (7.7), que pode ser resumido na pergunta: $K_{3,3}$ é planar? Por exemplo, K_4 é planar, como visto abaixo; onde o segundo desenho de K_4 é um grafo plano que estabelece seu mergulho no plano.



A noção de um mergulho planar se estende a outras superfícies. Um grafo G é dito mergulhável numa superfície S se pode ser desenhado em S tal que suas arestas se intersectem apenas nas suas extremidades; tal desenho, se existir, é dito um mergulho de G em S .



Figura 9.1: Mergulho do K_4 na esfera e do K_5 no toro.

No teorema que segue, mostraremos que grafos planares e grafos mergulháveis na esfera são os mesmos. Para mostrar isso, faremos uso de uma aplicação conhecida como projeção estereográfica. Considere uma esfera S tangente a um plano P , e denote por z o ponto de S que está oposto diagonalmente ao ponto de contato entre S e P . A aplicação $\pi : S \setminus \{z\} \rightarrow P$, definida por $\pi(s) = p$ se, e somente se, z, s, p são ponto colineares, é chamada projeção

estereográfica a partir de z .



Teorema 9.1. *Um grafo G é mergulhável no plano se, e somente se, é mergulhável na esfera.*

Demonstração: *Suponha que G possui um mergulho \tilde{G} na esfera. Escolha um ponto z da esfera que não esteja em \tilde{G} . Então a imagem de \tilde{G} sob a projeção estereográfica a partir de z é um mergulho de G no plano. A recíproca é provada analogamente. \square*

9.3 Grafo Dual

Um grafo plano G particiona o resto do plano em regiões conexas. Sendo que, para cada grafo plano, existe exatamente uma região ilimitada, chamada região exterior.

Teorema 9.2. *Seja v um vértice de um grafo planar G . Então G pode ser mergulhado no plano de tal modo que v esteja na região exterior do mergulho.*

Demonstração: *Considere um mergulho \tilde{G} de G na esfera. Seja z um ponto no interior de alguma região contendo v , e seja $\pi(\tilde{G})$ a imagem de \tilde{G} sob a projeção estereográfica a partir de z . Claramente, $\pi(\tilde{G})$ é um mergulho planar de G do tipo desejado. \square*

Dado um grafo plano G , podemos definir outro grafo G^* como segue: correspondendo a cada região r de G existe um vértice r^*

de G^* , e correspondendo a cada aresta e de G existe uma aresta e^* de G^* ; dois vértices f^*, g^* são unidos por uma aresta e^* em G^* se, e somente se, suas regiões correspondentes f, g são separadas por uma aresta e de G . O grafo G^* é dito o dual de G .

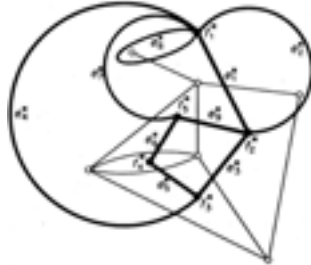


Figura 9.2: Grafo e seu dual.

Sejam $v(G), a(G), r(G)$ o número de vértices, de arestas e de regiões de um grafo G , respectivamente, e $d_G(f)$ o grau da região f no grafo G . Seja ainda $R(G)$ o conjunto das regiões de G . As relações seguintes são consequências diretas da definição de G^* :

$$v(G^*) = r(G)$$

$$a(G^*) = a(G)$$

$$d_{G^*}(f^*) = d_G(f), \text{ para todo } f \in R(G)$$

O teorema a seguir mostra que num grafo plano, a soma dos graus de suas regiões é igual ao dobro do número de arestas.

Teorema 9.3. *Se G é um grafo plano, então*

$$\sum_{f \in R(G)} d(f) = 2a(G)$$

Demonstração: Seja G^* o dual de G . Então

$$\begin{aligned} \sum_{f \in R(G)} d(f) &= \sum_{f^* \in V(G^*)} d(f^*) \\ &= 2a(G^*) \\ &= 2a(G) \end{aligned}$$

□

9.4 A Fórmula de Euler

O resultado básico sobre grafos planos é a fórmula de Euler, que relaciona o número de arestas, vértices e regiões de um grafo.

Teorema 9.4 (Fórmula de Euler). *Qualquer grafo conexo plano com v vértices e a arestas divide o plano em r regiões, onde*

$$v - a + r = 2$$

Demonstração: Se existe um ciclo, remova uma aresta dele. O efeito é reduzir o número de arestas e de regiões em 1 e não alterar o número de vértices v . Então o grafo resultante tem $v' = v$, $a' = a - 1$, $r' = r - 1$, onde $v' - a' + r' = v - a + r$. Repetindo esse procedimento até não restar mais nenhum ciclo, o grafo final torna-se uma árvore com $v - a'' + r'' = v - (v - 1) + 1 = 2$. □

Corolário 9.1. *Um grafo plano com $v \geq 3$ vértices tem no máximo $3v - 6$ arestas.*

Demonstração: É suficiente mostrar para grafos conexos. Seja G um grafo plano simples conexo com $v \geq 3$. Então $d(f) \geq 3$ para todo $f \in R(G)$, logo $\sum_{f \in R(G)} d(f) \geq 3r$. Assim, pelo teorema (9.3), $2a \geq 3r$. Segue pela fórmula de Euler que, $v - a + \frac{2a}{3} \geq 2$, ou seja, $a \leq 3v - 6$. □

Teorema 9.5. K_n é planar somente se $n \leq 4$.

Demonstração: É suficiente provar que K_5 não é planar, pois os demais casos contém K_5 como subgrafo. Como K_5 possui $v = 5$ vértices, para ser grafo plano deveria ter no máximo 9 arestas, mas K_5 possui 10 arestas, logo não pode ser planar. \square

Teorema 9.6. $K_{3,3}$ não é planar.

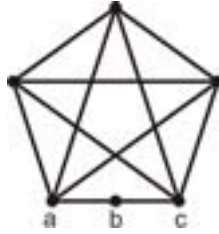
Demonstração: $K_{3,3}$ tem $v = 6$ vértices e $a = 9$ arestas. Então, se existisse uma representação planar de $K_{3,3}$, deveria ter $r = 2 - 6 + 9 = 5$ regiões. Desde que $K_{3,3}$ é bipartido, portanto sem ciclo de grau ímpar, cada região deve ter pelo menos grau 4. Então a soma dos graus das regiões é pelo menos 20, assim $2a = 18 \geq 20$, contradição. \square

9.5 Teorema de Kuratowski

O que torna um grafo não planar? Claramente, se ele contém K_5 ou $K_{3,3}$ como subgrafo, então não pode ser planar. Foi provado em 1930 pelo matemático polonês Kuratowski que é, essencialmente, apenas a presença de um K_5 ou um $K_{3,3}$ no grafo que faz com que ele deixe de ser planar.

Para melhorar o entendimento dessa afirmação, façamos inicialmente a seguinte observação: desde que K_5 não é planar, o grafo abaixo não pode ser planar. Se fosse, poderíamos fazer um desenho plano dele, apagar b da aresta ac , e obter um desenho plano de K_5 .

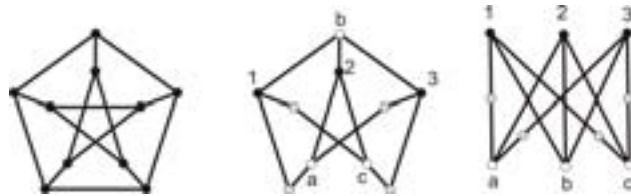
Definição 9.1. A adição de um novo vértice numa aresta existente é dita uma subdivisão de aresta, e uma ou mais subdivisões de arestas cria uma subdivisão do grafo original.



Teorema 9.7 (Teorema de Kuratowski). *Um grafo é planar se, e somente se, não contém subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ como subgrafo.*

A demonstração do Teorema de Kuratowski está acima do nível do presente texto. Para exibir a utilidade do resultado, o utilizaremos para provar que o grafo de Petersen não é planar.

Exemplo 9.1 (Grafo de Petersen). Na figura abaixo, o grafo à esquerda é o famoso grafo de Petersen. No centro, temos o mesmo grafo com duas arestas removidas. Esse subgrafo é uma subdivisão de $K_{3,3}$ como mostrado no grafo isomorfo à direita, o que mostra que o grafo de Petersen não é planar. ◀



9.6 Planaridade e Grafos Hamiltonianos

Existem algumas conexões interessantes entre grafos planares e hamiltonianos. Uma dessas conexões ocorrem no seguinte algoritmo, que pode ser usado para determinar se um grafo hamiltoniano é planar ou não. A idéia básica é que se um grafo G é

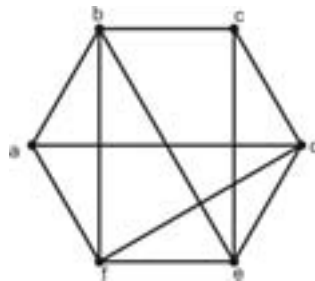
hamiltoniano e planar, então no desenho planar de G , as arestas de G que não estão no ciclo hamiltoniano H cairão em dois conjuntos: aquelas que estão no interior de H e aquelas que estão no exterior de H .

Teorema 9.8 (Algoritmo de planaridade para grafos hamiltonianos). *Seja G um grafo hamiltoniano e H um ciclo hamiltoniano.*

- (1) *Desenhe o grafo G tal que o ciclo hamiltoniano H seja a fronteira da região exterior (infinita);*
- (2) *Liste as arestas de G que não estão em H : e_1, e_2, \dots, e_r ;*
- (3) *Forme um novo grafo K no qual os vértices são rotulados por e_1, e_2, \dots, e_r e e_i, e_j são adjacentes se, e somente se, as arestas e_i e e_j se cruzam no grafo G (arestas incompatíveis);*
- (4) *Então G é planar se, e somente se, K é bipartido.*

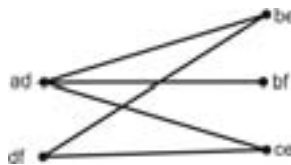
(Se K é bipartido, com bipartição $P \cup B$, então as arestas e_i de cor P podem ser desenhadas no interior de H e as B coloridas podem ser desenhadas no exterior de H .)

Exemplo 9.2. Verifique se o grafo a seguir é planar.

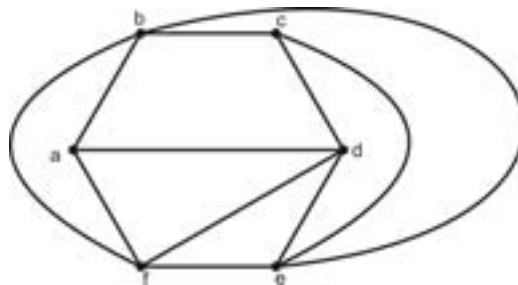


Solução: Vamos seguir o algoritmo dado.

- (1) O grafo G já está desenhado com o ciclo hamiltoniano $H = (a, b, c, d, e, f, a)$ sendo a fronteira da região exterior;
- (2) As arestas de G que não estão em H são: ad, be, bf, ce, df ;
- (3) A aresta ad é incompatível com be, bf, ce . Já be , é incompatível com ad, df . A aresta bf é incompatível apenas com ad ; ce é incompatível com ad, df ; e df é incompatível com be, ce . Assim, o grafo K fica



- (4) Como o grafo K obtido é bipartido, segue que G é planar, e podemos apresentar o grafo plano isomorfo a G desenhando ad, df no interior do ciclo H e be, bf, ce no exterior do ciclo.



9.7 Conclusão

Nesta aula, voltamos nossa atenção ao problema de grafos que podem ser mergulhados no plano. Definimos o dual de um grafo planar e apresentamos a fórmula de Euler que relaciona vértices,

arestas e regiões de um grafo. Vimos que $K_{3,3}$ e K_5 não são planares e em seguida apresentamos o Teorema de Kuratowski que caracteriza grafos planares. Para finalizar a aula, apresentamos um algoritmo que verifica a planaridade de grafos hamiltonianos.

RESUMO



Um grafo é planar se pode ser desenhado no plano de tal forma que suas arestas se intersectam apenas nos seus extremos. Tal desenho de um grafo planar é um grafo plano.

Um grafo G é mergulhável no plano se, e somente se, é mergulhável na esfera.

O dual de um grafo plano é definido como segue: a cada região de G existe um vértice do dual G^* , a cada aresta de G existe uma aresta de G^* ; dois vértices do dual são unidos por uma aresta se, e somente se, suas regiões correspondentes são separadas pela aresta correspondente.

Fórmula de Euler: $v - a + r = 2$.

Um grafo planar com mais de 2 vértices possui, no máximo, $3v - 6$ arestas.

$K_{3,3}$ e K_5 não são planares.

Uma subdivisão de aresta é a adição de um novo vértice numa aresta existente.

Teorema de Kuratowski: Um grafo é planar se, e somente se, não contém subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ como subgrafo.

Algoritmo de planaridade para grafos hamiltonianos: se G um grafo hamiltoniano e H um ciclo hamiltoniano, então:

- (1) Desenhe o grafo G tal que o ciclo hamiltoniano H seja a fronteira da região exterior (infinita);
- (2) Liste as arestas de G que não estão em H : e_1, e_2, \dots, e_r ;
- (3) Forme um novo grafo K no qual os vértices são rotulados por e_1, e_2, \dots, e_r e e_i, e_j são adjacentes se, e somente se, as arestas e_i e e_j se cruzam no grafo G (arestas incompatíveis);
- (4) Então G é planar se, e somente se, K é bipartido.

(Se K é bipartido, com bipartição $P \cup B$, então as arestas e_i de cor P podem ser desenhadas no interior de H e as B coloridas podem ser desenhadas no exterior de H .)



PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, estudaremos problemas de coloração de grafos. Será a aula de encerramento de nosso curso de matemática discreta. Nela aplicaremos mais uma vez o princípio da inclusão-exclusão (aula 2) no estudo de polinômios cromáticos. Será preciso conhecer alguns conceitos elementares da teoria dos grafos (aula 7) e lembrar a definição de regiões de um grafo mergulhado num plano dada nesta aula.

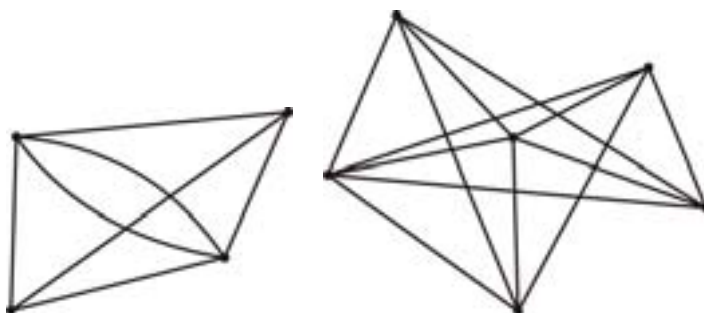
**ATIVIDADES**

ATIVIDADE 9.1. Considere o mapa abaixo

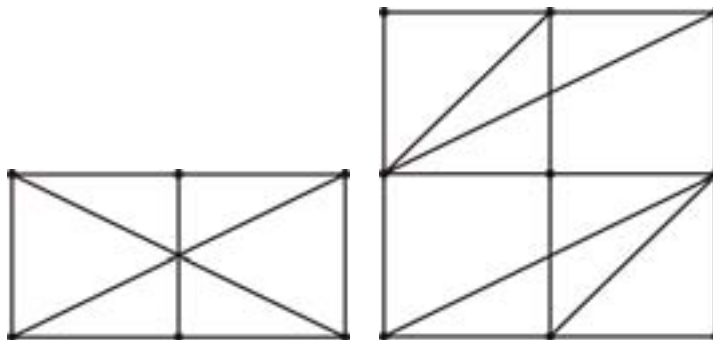


Defina o grafo associado ao mapa da seguinte maneira: para cada região do mapa, associe um vértice do grafo; dois vértices do grafo são ligados por uma aresta se as regiões associadas a eles fazem fronteira no mapa. Desenhe o grafo G associado a este mapa e depois determine seu grafo dual G^* .

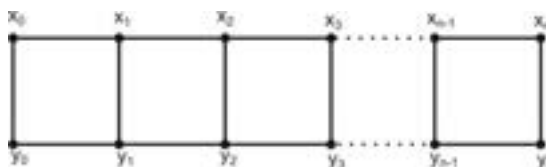
ATIVIDADE 9.2. Os grafos a seguir são planares?



ATIVIDADE 9.3. Um emparelhamento perfeito de um grafo com $2n$ vértices é um subgrafo com n arestas disjuntas. Quantos emparelhamentos perfeitos existem nos grafos abaixo?

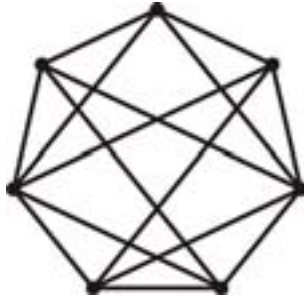


ATIVIDADE 9.4. O grafo G_n ($n \geq 1$) é mostrado abaixo:



1. G é bipartido? Planar?
2. Denote por a_n o número de emparelhamentos completos de G_n . Mostre que $a_1 = 3$ e $a_2 = 5$. Mostre que para $n > 2$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ e portanto obtenha uma fórmula para a_n .

ATIVIDADE 9.5. Use o algoritmo da planaridade para determinar se os grafos seguintes são planares.





REFERÊNCIAS

ANDERSON, I. A First Course in Discrete Mathematics. Springer: Londres, 2001.

BONDY, J.A., MURTY, U.S.R. Graph Theory with Applications. Elsevier: Nova Iorque, 1976.

SANTOS, W.F. Teorema de Geometrização para Girassóis de Grafos com Valência Mínima Três. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Pernambuco: Recife, 2008.

Coloração

META

- Apresentar problemas de coloração de grafos.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

- Obter o polinômio cromático de um grafo associado a um mapa;
- Distinguir e determinar número cromático e índice cromático de grafos;

PRÉ-REQUISITOS

- Princípio da inclusão-exclusão (aula 2);
- Conceitos elementares da teoria dos grafos (aula 7);
- Resultados sobre grafos planares (aula 9).

10.1 Introdução

Prezado aluno, bem vindo à nossa aula de encerramento do curso de matemática discreta. Nesta aula trataremos dois tipos de problemas: coloração de vértices e de arestas. Na primeira seção, voltaremos nossa atenção à coloração de vértices, dividindo-a em dois problemas clássicos: (1) determinar o número de maneiras diferentes de se colorir, com um número fixado de cores, as regiões de um mapa de modo que duas regiões vizinhas não tenham a mesma cor; (2) determinar número cromático de um grafo, isto é, o menor número de cores necessárias para se obter uma coloração de seus vértices. Nesta segunda subseção, apresentaremos o algoritmo guloso que obterá um limite superior para o número cromático. Na seção seguinte, trataremos o problema de obter o índice cromático de um grafo, isto é, o número mínimo de cores exigida em uma coloração de arestas de um grafo.

10.2 Coloração de Vértices

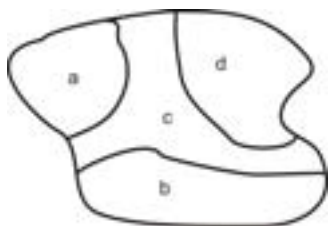
10.2.1 Polinômios Cromáticos

Prosseguindo com os problemas clássicos da teoria dos grafos, apresentaremos agora o de determinar o número de maneiras diferentes de se colorir, com um número fixado de cores, as regiões de um mapa de modo que duas regiões vizinhas não tenham a mesma cor. Para isso, utilizaremos os polinômios cromáticos ou polinômios de coloração.

Definição 10.1. Um polinômio da forma $P_M(\lambda) = \sum_{i=0}^k a_i \lambda^i$ é um polinômio cromático se e só se o valor numérico para um de-

terminado λ é o número de maneiras possíveis de se colorir o mapa M com λ cores.

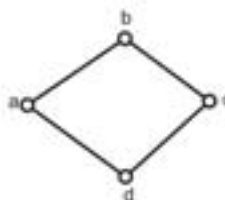
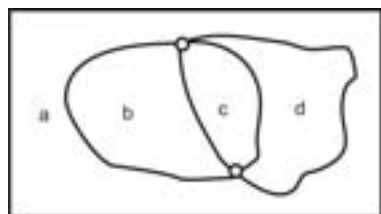
Exemplo 10.1 (Mapa simples). Determinar o polinômio cromático do mapa M a seguir.



Solução: Observe que para a região c temos λ escolhas, para cada uma das outras temos $\lambda - 1$ escolhas, portanto, $P_M(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^3$. Assim, podemos colorir M com 2 cores de 2 maneiras diferentes e com 3 cores de 24 formas. ◀

Esclarecemos que regiões com um só ponto comum não são consideradas vizinhas e portanto há vantagem em substituir o mapa por um grafo onde os vértices representam as regiões e as arestas a vizinhança entre duas regiões. Para mapas mais complicados é possível empregar o princípio da inclusão-exclusão, como veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 10.2 (Mapa 2). Determinar o polinômio cromático do mapa M que é apresentado abaixo junto ao grafo G_M a ele associado.



Solução: Indiquemos com:

- A_1 : o conjunto das colorações de a e b com cores iguais;
- A_2 : o conjunto das colorações de b e c com cores iguais;
- A_3 : o conjunto das colorações de c e d com cores iguais;
- A_4 : o conjunto das colorações de d e a com cores iguais.

Pelo princípio da inclusão-exclusão, temos:

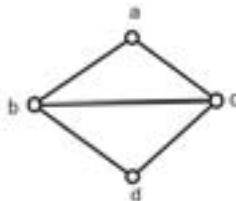
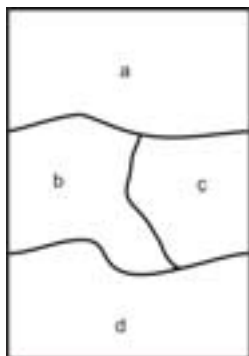
$$\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4} = U - \sum A_i + \sum A_i \cdot A_j - \sum A_i \cdot A_j \cdot A_k + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$$

Assim, para λ cores:

- $N(U) = \lambda^4$, pois cada vértice pode ser colorido com uma das λ cores;
- $N(A_i) = \lambda^3$, uma vez que λ cores podem ser empregadas para os dois vértices de cores iguais;
- $N(A_i \cdot A_j) = \lambda^2$, porque λ cores podem ser empregadas para os três vértices de cores iguais e novamente λ cores podem ser utilizadas para o vértice restante;
- $N(A_i \cdot A_j \cdot A_k) = \lambda$, pois todos terão a mesma cor;
- $N(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = \lambda$, todos terão a mesma cor, também.

Logo, $N(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}) = \lambda^4 - C_4^1 \lambda^3 + C_4^2 \lambda^2 - C_4^3 \lambda + \lambda$. Assim, $P_M(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda = (\lambda - 1)[(\lambda - 1)^3 + 1]$, e poderíamos, por exemplo, colorir M com 3 cores de 18 maneiras. ◀

Exemplo 10.3 (Mapa 3). Determine o polinômio cromático do mapa M com grafo associado G_M como abaixo.



Solução: Como antes, considere os conjuntos:

- A_1 : com a e b de cores iguais;
- A_2 : com b e c de cores iguais;
- A_3 : com c e d de cores iguais;
- A_4 : com b e d de cores iguais;
- A_5 : com a e c de cores iguais.

Pelo princípio da inclusão-exclusão, $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4} \cdot \overline{A_5}$ é igual a

$$U - \sum A_i + \sum A_i \cdot A_j - \sum A_i \cdot A_j \cdot A_k + \sum A_i \cdot A_j \cdot A_k \cdot A_l - A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5$$

Temos então: $N(U) = \lambda^4$, $N(A_i) = \lambda^3$, $N(A_i \cdot A_j) = \lambda^2$ e $N(A_i \cdot A_j \cdot A_k) = \lambda$, com exceção de $N(A_1 \cdot A_2 \cdot A_5) = N(A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = \lambda^2$. E ainda $N(A_i \cdot A_j \cdot A_k \cdot A_l) = \lambda$ e $N(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5) = \lambda$.

Substituindo, temos: $P_G(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 10\lambda^2 - (8\lambda + 2\lambda^2) + 5\lambda - \lambda = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda$. Assim, $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ e portanto $P_G(2) = 0$, isto é, não há como colorir M com apenas duas cores distintas. ◀

Teorema 10.1 (Teorema de Birkhoff). *Se G é um grafo conexo de k vértices, então o grau do polinômio cromático é k .*

Demonstração: Seleccionemos j cores das λ cores, em número de C_λ^j seleções. Indicando com $N_G(j)$ o número de maneiras de colorir G com exatamente j cores, então $N_G(j)C_\lambda^j$ é o número de maneiras de colorir G com exatamente j das λ cores, portanto variando j obtemos o polinômio cromático:

$$P_G(\lambda) = \sum_{j=1}^{\lambda} N_G(j)C_\lambda^j$$

Como j não pode ultrapassar k visto que não podemos usar mais cores que regiões podemos escrever:

$$P_G(\lambda) = \sum_{j=1}^k N_G(j)C_\lambda^j$$

O maior expoente de $P_G(\lambda)$ é dado por $N_G(k)C_\lambda^k$; portanto o maior expoente de λ é dado por $\lambda^{(k)} = \lambda(\lambda - 1) \dots [\lambda - (k - 1)]$. \square

Teorema 10.2. Se um grafo com n vértices é nulo (sem arestas) então seu polinômio cromático é λ^n .

Demonstração: De fato, se não existem arestas, cada vértice pode ter qualquer das λ cores, portanto, pelo princípio do produto, $P_G(\lambda) = \lambda^n$. \square

Teorema 10.3. O polinômio cromático de K_n é $\lambda^{(n)} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots [\lambda - (n - 1)]$.

Demonstração: De fato, escolhida uma cor para um vértice, então os outros não podem ter mais essa cor. Portanto, para o primeiro temos λ escolhas, para o segundo $\lambda - 1$, e assim sucessivamente, para o n -ésimo temos $\lambda - (n - 1)$ escolhas. Pelo princípio do produto $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) \dots [\lambda - (n - 1)] = \lambda^{(n)}$. \square

Teorema 10.4. Se o grafo é desconexo, constituído de duas componentes conexas, então seu polinômio cromático é igual ao produto dos polinômios cromáticos de cada componente.

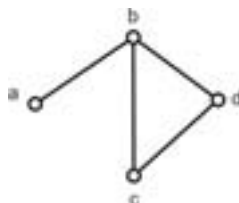
Demonstração: Sejam G_1, G_2 as duas componentes conexas de G . Como cada coloração de G_1 é independente da coloração da outra componente G_2 , segue do princípio do produto que $P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda)$. \square

Teorema 10.5. Se G_1 é subgrafo de G suprimindo-se uma aresta (x_i, x_j) , e G_2 é obtido de G suprimindo-se a aresta (x_i, x_j) e identificando os vértices x_i e x_j , então:

$$P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) - P_{G_2}(\lambda)$$

Demonstração: Com efeito, $P_{G_1}(\lambda)$ incluiu todas as maneiras de colorir G mais aquelas que os vértices x_i e x_j possuem a mesma cor, já que em G_1 isso é permitido pois não existe a aresta (x_i, x_j) . Mas a quantidade desta última é igual àquela para colorir G_2 pois os vértices x_i e x_j são identificados. Logo, $P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) - P_{G_2}(\lambda)$. \square

Exemplo 10.4 (Grafo 1). Determinar o polinômio cromático do grafo G_1 abaixo.



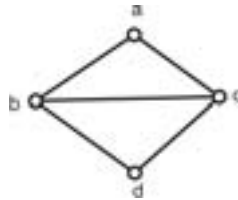
Solução:

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \triangle \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \triangle \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \triangle \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c} \triangle \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \triangle \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c} \triangle \end{array} \right) \left[\left(\begin{array}{c} \cdot \\ \end{array} \right) - 1 \right] \\
 &= \lambda^{(3)}(\lambda - 1)
 \end{aligned}$$

Portanto, $P_{G_1}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. ◀

Note que sendo válida a identidade $P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) - P_{G_2}(\lambda)$, onde G_1 e G_2 são como no teorema (10.5), segue que se G é obtido de G_1 aumentando-se a aresta (x_i, x_j) e G_2 identificando-se os vértices x_i e x_j de G_1 , então $P_{G_1}(\lambda) = P_G(\lambda) + P_{G_2}(\lambda)$. No exemplo que segue, utilizaremos esta observação.

Exemplo 10.5 (Grafo do mapa 3). Determinar o polinômio cromático do grafo G_2 abaixo.



Solução:

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{c} \triangle \\ \triangle \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} \triangle \\ \triangle \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \triangle \end{array} \right) \\
 &= \lambda^{(4)} + \lambda^{(3)} \\
 &= \lambda^{(3)}[(\lambda - 3) + 1] \\
 &= \lambda^{(3)}(\lambda - 2) \\
 &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2
 \end{aligned}$$

Portanto, $P_{G_2}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$, como obtido no exemplo (10.3). ◀

10.2.2 Número Cromático

No problema anterior, estávamos interessados em contar o número de maneiras diferentes de se colorir com um número fixado de cores as regiões de um mapa desde que duas vizinhas não tenham a mesma cor. Vimos nos exemplos anteriores, por exemplo, que existem mapas que não podem ser coloridos apenas com duas cores. O problema que nos focaremos nesta seção é o de obter o número mínimo de cores necessário para colorir os vértices de um grafo de tal forma que vértices adjacentes não tenham a mesma cor.

Definição 10.2. Uma coloração (de vértices) de um grafo é a atribuição de uma cor a cada vértice do grafo de tal forma que dois vértices adjacentes não tenham a mesma cor. O número cromático $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores necessárias para se obter uma coloração.

Teorema 10.6. (i) $\chi(K_n) = n$

(ii) $\chi(C_n) = 2$, se n é par; $\chi(C_n) = 3$, se n é ímpar.

Demonstração:

(i) Nenhum par de vértices pode receber a mesma cor desde que eles são adjacentes;

(ii) Se n é par, podemos alternar entre duas cores ao redor do ciclo; se n é ímpar, precisaremos de uma terceira cor para o "último" vértice. ◻

Exemplo 10.6. O grafo da figura abaixo tem número cromático 3. ◀

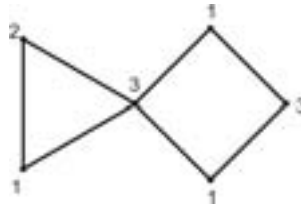


Figura 10.1: Número cromático.

Não há uma maneira fácil de encontrar $\chi(G)$ para um dado grafo G . O algoritmo guloso, que será descrito agora, nos dará um limite superior para $\chi(G)$ relacionado ao grau de vértice máximo. Nessa descrição, denotaremos as cores por C_1, C_2, \dots , onde C_i é a i -ésima cor.

Teorema 10.7 (Algoritmo Guloso para Coloração de Vértices).
Seja G um grafo.

- (1) *Liste os vértices de G em alguma ordem: v_1, \dots, v_p .*
- (2) *Associe a cor C_1 a v_1 .*
- (3) *No estágio $i + 1$, quando v_i acabou de ter uma cor associada, associe a v_{i+1} a cor C_j , onde j tão pequeno quanto possível tal que C_j ainda não tenha sido usada para colorir um vértice adjacente a v_{i+1} .*

Exemplo 10.7. Use o algoritmo guloso para colorir o grafo da figura seguinte para cada uma das rotulações de vértice mostrada.

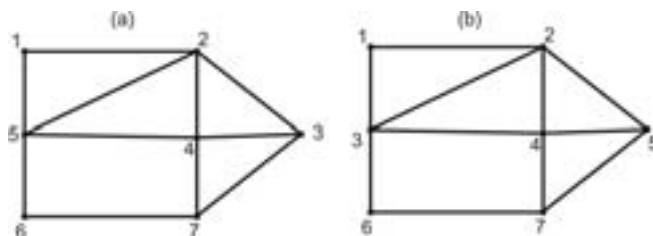


Figura 10.2: Mesmo grafo com rotulações distintas.

Solução: Com os vértices listados como em (a), associamos as cores seguintes:

$$v : 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

$$C : 1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 2$$

Essa coloração usa 4 cores. Contudo em (b), temos:

$$v : 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

$$C : 1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 2$$

Essa segunda coloração usa apenas 3 cores, isso mostra que $\chi(G) \leq 3$; na verdade $\chi(G) = 3$ desde que G não é bipartido. ◀

Claramente, o limite de $\chi(G)$ obtido pelo algoritmo guloso depende da ordem na qual os vértices são considerados. Mas note que, se um vértice v tem grau d então, quando vamos associar uma cor a v , no máximo d cores não poderão ser utilizadas, logo ele deve ser associado a alguma cor C_i , onde $i \leq d + 1$. Então temos o seguinte limite superior.

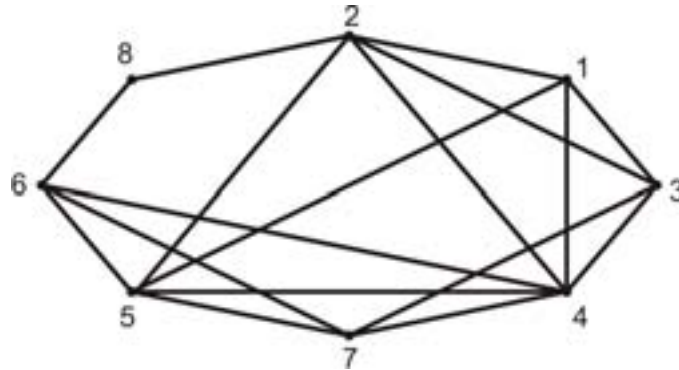
Teorema 10.8. *Se G tem grau de vértice máximo Δ , então o algoritmo guloso irá colorir os vértices de G usando no máximo $\Delta + 1$ cores, tal que $\chi(G) \leq \Delta + 1$.*

Exemplo 10.8. Uma determinada Universidade possui nove professores, A, B, \dots, I , que participam de oito comissões. Os membros de cada comitê são os seguintes:

- | | |
|-------------------|----------|
| Comitê 1: A,B,C,D | 5: A,H,J |
| 2: A,C,D,E | 6: H,I,J |
| 3: B,D,F,G | 7: G,H,J |
| 4: C,F,G,H | 8: E,I |

Cada comissão se reúne em um dia; duas comissões com um membro em comum não podem se reunir no mesmo dia. Encontre o menor número de dias em que as reuniões possam ser realizadas.

Solução: Represente cada comissão por um vértice e ligue duas comissões por uma aresta somente se as comissões correspondentes possuem membros em comum. Então o número mínimo de dias pedido é o número cromático do grafo G mostrado a seguir. Note



que os vértices 1, 2, 3, 4 formam um K_4 , então ao menos quatro cores (dias) serão necessárias. Mas são suficientes, por exemplo,

$$\{1, 7, 8\} \cup \{2, 6\} \cup \{3, 5\} \cup \{4\}$$

forma uma coloração que usa 4 cores. ◀

10.3 Coloração de Arestas

Uma coloração de arestas de um grafo G é uma associação de cores às arestas de G tal que duas arestas adjacentes não recebem

a mesma cor. O número mínimo de cores exigida em uma coloração de arestas de G é dito índice cromático de G e denotado por $\chi'(G)$.

Assim, uma coloração de arestas de um grafo particiona suas arestas em subconjuntos tais que arestas num mesmo subconjunto possuam cor comum, isto é, tal que todas arestas em qualquer parte da partição são disjuntas. Um conjunto de arestas disjuntas em um grafo é chamado emparelhamento. Claramente, numa coloração de arestas, todas arestas adjacentes a um vértice v devem receber cores distintas, então $\chi'(K_n) \geq n - 1$ para cada n .

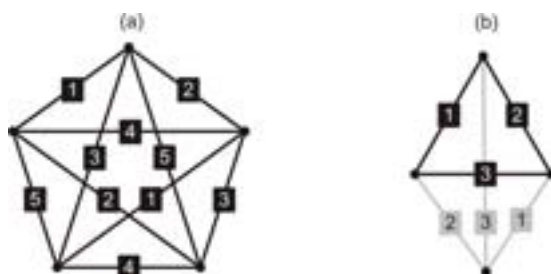


Figura 10.3: Exemplos de coloração de aresta em grafos completos.

Teorema 10.9. (i) Se n é ímpar, $\chi'(K_n) = n$;

(ii) Se n é par, $\chi'(K_n) = n - 1$;

Demonstração:

(i) Se n é ímpar, qualquer emparelhamento em K_n pode ter no máximo $\frac{1}{2}(n - 1)$ arestas. Então no máximo $\frac{1}{2}(n - 1)$ podem ter uma mesma cor. Mas existem $\frac{1}{2}n(n - 1)$ em K_n , então ao menos n cores são necessárias. Podemos colorir as arestas usando n cores da seguinte maneira. Represente K_n como um n -ágono, com todas diagonais desenhadas. Associe as arestas da fronteira às cores $1, \dots, n$; então associe cada

diagonal pela cor da aresta da fronteira paralela a ela. Isso dá uma coloração de arestas usando n cores. O caso $n = 5$ é mostrado na figura (10.3 a).

(ii) Suponha agora que n é par. Certamente $\chi'(K_n) \geq n - 1$; mostraremos como usar apenas $n - 1$ cores. Desde que $n - 1$ é ímpar, podemos colorir K_{n-1} usando $n - 1$ cores, como descrito anteriormente. Agora tome outro vértice v ligando cada vértice de K_{n-1} a v , obtendo assim K_n . Para cada vértice de K_{n-1} , uma cor não foi usada. As cores que faltam em cada vértice de K_{n-1} são diferentes, então podemos usar essas $n - 1$ cores para colorir as arestas adicionadas que se ligam a v . Isso dá uma coloração de aresta de K_n usando $n - 1$ cores. O caso $n = 4$ é mostrado na figura (10.3 b). \square

O aparecimento de $\Delta (= n - 1)$ e $\Delta + 1 (= n)$ como índices cromáticos de K_n , dependendo da paridade de n , está de acordo com o seguinte resultado, cuja demonstração será omitida.

Teorema 10.10 (Vizing). *Se G é um grafo simples com grau de vértice máximo Δ , então $\chi'(G) = \Delta$ ou $\Delta + 1$.*

Teorema 10.11 (König). *Para todo grafo bipartido G , $\chi'(G) = \Delta$.*

Demonstração: *A prova será por indução sobre o número de arestas a . O teorema é verdadeiro para grafos com $a = 1$ aresta; então suponha verdadeiro para grafos bipartidos com k arestas, e considere um grafo bipartido G com grau de vértice máximo Δ e $k + 1$ arestas. Escolha qualquer aresta vw de G e a remova, formando um novo grafo bipartido H . H tem k arestas e grau de vértice máximo $\leq \Delta$, então, pela hipótese de indução, H pode ter suas arestas coloridas usando no máximo Δ cores.*

Agora em H , v e w possuem grau $\leq \Delta - 1$, então existe ao menos uma cor faltando das arestas que passam por v e das que são adjacentes a w . Se a cor restante em v e w for a mesma, então ela poderá colorir a aresta vw em G . Caso contrário, suponha que seja C_1 a cor que falta ao vértice v e C_2 a restante em w . Então existe alguma aresta, digamos vu , que é C_2 -colorida; se existir uma aresta C_1 -colorida partindo de u , prossiga ao longo do caminho com cores alternantes C_2, C_1 o tanto que for possível. O caminho assim construído nunca alcançará w . De fato, se o alcançasse, a aresta incidente a w nesse caminho teria cor C_1 e portanto seria um vw -caminho de comprimento par, adicionando a arestas vw que havia sido removida, teríamos um ciclo de comprimento ímpar, que não existe, desde que G é bipartido. Então o grafo conexo K , constituído pelo vértice v e todos vértices e arestas de H que podem ser tomadas pelo caminho alternante C_1, C_2 colorido, não contém w . Assim, podemos trocar as cores C_1 e C_2 em K sem interferir nas cores no resto de H . Isso dá uma nova coloração de arestas de H na qual não incidem sobre v e w arestas C_2 -coloridas, e podemos então usar C_2 para colorir vw . \square

Exemplo 10.9. Oito estudantes desejam consultar certos livros na biblioteca. Cada livro é emprestado a cada estudante por 1 semana. Os livros B_j desejados por cada estudantes S_i são os seguintes:

$$S_1 : B_1, B_2, B_3 \quad S_2 : B_2, B_4, B_5, B_6 \quad S_3 : B_2, B_3, B_5, B_7$$

$$S_4 : B_3, B_5 \quad S_5 : B_1, B_6, B_7 \quad S_6 : B_2, B_4, B_6$$

$$S_7 : B_4, B_5, B_7 \quad S_8 : B_3, B_6$$

Qual é o número mínimo de semanas necessárias para que cada estudante possa tomar emprestado todos os livros que desejam?

Solução: Desenhe o grafo bipartido G com vértices S_1, \dots, S_8 e B_1, \dots, B_7 , onde S_i se liga a B_j somente se o estudante S_i deseja tomar o livro B_j emprestado. Então G tem grau de vértice máximo $\Delta = 4$, logo, pelo teorema de König, $\chi'(G) = 4$. Então 4 cores (semanas) são suficientes. ◀

10.4 Conclusão

Nesta aula, conhecemos alguns problemas clássicos de coloração de grafos. Tratamos tanto a coloração de vértices, conhecendo métodos de determinação do polinômio cromático e de um limite superior para o número cromático; como também a coloração de arestas, focando na determinação do índice cromático de um grafo.



RESUMO

Um polinômio cromático $P_M(\lambda) = \sum_{i=0}^k a_i \lambda^i$ é tal que seu valor numérico para um determinado λ indica o número de maneiras possíveis de se colorir o mapa M com λ cores.

Para obter o polinômio cromático de um mapa podemos aplicar o princípio da inclusão-exclusão ou aplicar os teoremas a seguir:

- Se G é um grafo conexo de k vértices, então o grau do polinômio cromático é k .
- Se o grafo com n vértices é nulo (não possui arestas) então seu polinômio cromático é λ^n .

- O polinômio cromático de K_n é $\lambda^{(n)} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots[\lambda-(n-1)]$.
- Se o grafo é desconexo, constituído de duas componentes conexas, então seu polinômio cromático é igual ao produto dos polinômios cromáticos de cada componente.
- Se G_1 é subgrafo de G suprimindo-se uma aresta (x_i, x_j) , e G_2 é obtido de G suprimindo-se a aresta (x_i, x_j) e identificando os vértices x_i e x_j , então $P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) - P_{G_2}(\lambda)$.

O número cromático $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores necessárias para se obter uma coloração. Assim, temos que: (i) $\chi(K_n) = n$ e (ii) $\chi(C_n) = 2$, se n é par; $\chi(C_n) = 3$, se n é ímpar.

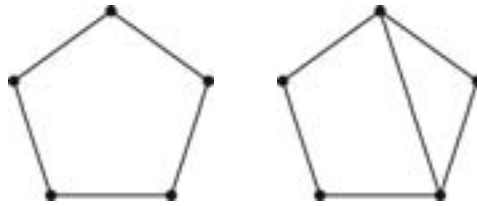
Algoritmo Guloso para Coloração de Vértices: seja G um grafo.

- (1) Liste os vértices de G em alguma ordem: v_1, \dots, v_p .
- (2) Associe a cor C_1 a v_1 .
- (3) No estágio $i+1$, quando v_i acabou de ter uma cor associada, associe a v_{i+1} a cor C_j , onde j tão pequeno quanto possível tal que C_j ainda não tenha sido usada para colorir um vértice adjacente a v_{i+1} .

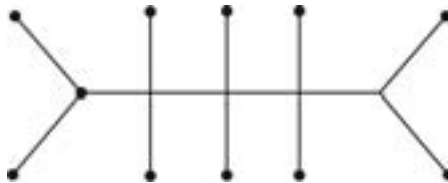
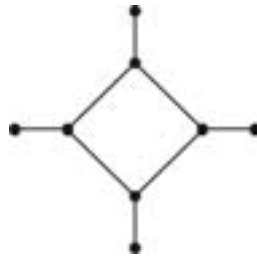
O número mínimo de cores exigida em uma coloração de arestas de G é dito índice cromático de G e denotado por $\chi'(G)$. Se n é ímpar, $\chi'(K_n) = n$; se n é par, $\chi'(K_n) = n - 1$. Se G é um grafo simples com grau de vértice máximo Δ , então $\chi'(G) = \Delta$ ou $\Delta + 1$. Para todo grafo bipartido G , $\chi'(G) = \Delta$.

ATIVIDADES

ATIVIDADE 10.1. Determine o polinômio cromático de cada grafo usando o princípio de inclusão-exclusão.



ATIVIDADE 10.2. Determine o polinômio cromático dos seguintes grafos.



ATIVIDADE 10.3. Obtenha uma coloração do mapa do Brasil que utiliza apenas quatro cores.



ATIVIDADE 10.4. Prove que o valor absoluto do segundo coeficiente do polinômio cromático é igual ao número de arestas.

ATIVIDADE 10.5. Prove que o polinômio cromático de uma árvore com n vértices é dado por: $\lambda(\lambda - 1)^{n-1}$.

ATIVIDADE 10.6. Determine o número cromático $\chi(G)$ e o índice cromático $\chi'(G)$ dos grafos G das atividades 8.2.

ATIVIDADE 10.7. Encontre o índice cromático de cada um dos cinco grafos sólidos Platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

ATIVIDADE 10.8. Determine o número cromático do mapa dado na atividade 9.1



REFERÊNCIAS

ANDERSON, I. A First Course in Discrete Mathematics. Springer: Londres, 2001.

BARBOSA, R.M. Combinatória e Grafos. vol.2. Nobel: São Paulo, 1975.

BONDY, J.A., MURTY, U.S.R. Graph Theory with Applications. Elsevier: Nova Iorque, 1976.