AULA 8

Roteamentos

META

- Introduzir alguns problemas de roteamento.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

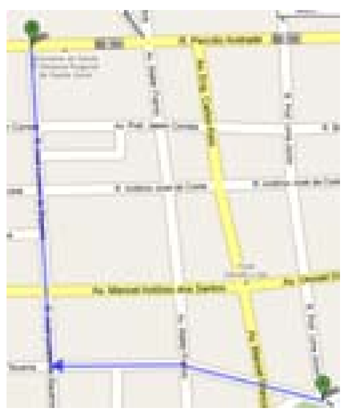
- Distinguir circuito euleriano e ciclo hamiltoniano;
- Obter um circuito euleriano de um grafo euleriano;
- Caracterizar grafos bipartidos;
- Obter um caminho mais curto entre vértices de grafos conexos.

PRÉ-REQUISITOS

- Conceitos elementares da teoria dos grafos (aula 7).

8.1 Introdução

Prezado aluno, nesta aula apresentaremos alguns problemas clássicos de roteamento. São eles o pro-blema do carteiro chinês, o problema do caixeiro viajante e o problema do caminho mais curto. Nela aprenderemos a diferença entre passeio euleriano e caminho hamiltoniano. Criaremos um algoritmo que obtém, quando existir, um circuito euleriano num grafo. Caracterizaremos grafos bipartidos como sendo aqueles que não possuem ciclos ímpares, e utilizaremos este resultado para mostrar que grafos bipartidos conexos com número ímpar de vértices não podem ser hamiltonianos. Para finalizar, resolveremos, aplicando o algoritmo de Dijkstra, um problema muito comum: qual o caminho mais curto que podemos percorrer partindo do ponto A do mapa abaixo e chegando no ponto B?



8.2 Circuito Euleriano

Os passeios eulerianos são assim designados pela sua relação com o problema das pontes de Königsberg que foi resolvido por Euler.

Definição 8.1. Um passeio é dito euleriano se for um passeio que contém cada aresta uma única vez. Um passeio euleriano fechado é dito circuito euleriano. Se G é um grafo que admite um circuito euleriano, então G é dito um grafo euleriano.

O problema das pontes de Königsberg é saber se o correspondente grafo possui ou não algum circuito euleriano. Um problema similar a este é o problema do carteiro chinês. Neste problema, as arestas do grafo representam trechos de ruas que o carteiro deve percorrer para entregar cartas. Admitindo que o carteiro procure realizar seu trabalho dispendendo o menor esforço possível, e que seu esforço seja proporcional à distância percorrida, temos um problema de otimização: encontrar um circuito que contenha todas arestas do grafo e cuja distância total (a soma das distâncias das arestas no circuito) seja mínima. Se o grafo for euleriano, a resposta é trivial, pois qualquer circuito euleriano fornece um procedimento simples para a construção de tal circuito. Se o grafo não for euleriano, o problema torna-se bem mais complexo, embora existam métodos eficientes para se achar uma solução ótima.

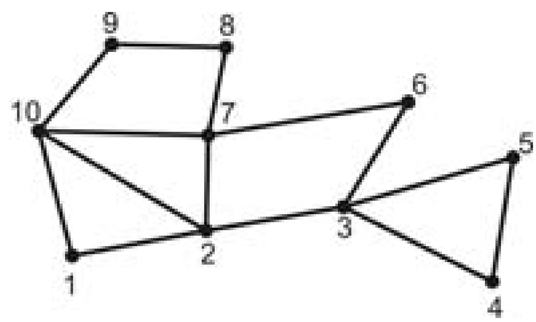
A resposta geral para esse tipo de problema é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 8.1 (Euler)**.** *O grafo conexo G é euleriano se, e somente se, os graus de todos os vértices de G são pares.*

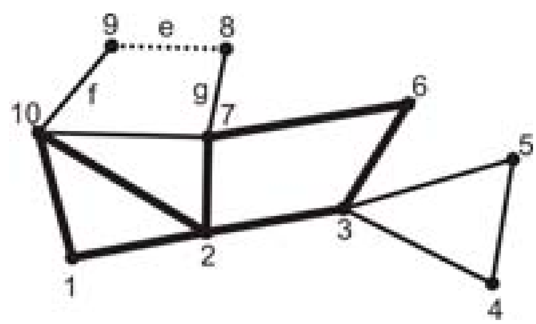
Demonstração: *Suponha que o grafo G seja euleriano, isto é, possui circuito euleriano. Observe que os graus dos vértices podem ser calculados enquanto percorremos o circuito euleriano, pois este contém todas as arestas. Para tanto, começamos em um vértice qualquer e percorremos o circuito, incrementando de uma unidade* *o contador associado a cada vértice (inicializado com valor zero) cada vez que saímos ou entramos do vértice. No final do percurso, os contadores conterão os graus dos vértices respectivos. Como se trata de um circuito, a cada entrada corresponde uma saída, portanto os graus dos vértices serão pares.*

Reciprocamente, suponha que todos os vértices de G tenham grau par. Tome um vértice qualquer de G, digamos o vértice i, e comece a percorrer o grafo a partir dele, sem repetir arestas, até não conseguir mais prosseguir, isto é, até alcançar um vértice tal que todas as arestas incidentes no vértice já tenham sido percorridos. Como todos os vértices têm grau par, este vértice tem que ser o vértice i. Se o circuito C assim construído contiver todas as arestas, a demonstração estará concluída. Suponha, no entanto, que G contém uma aresta, por exemplo a aresta e, que não pertence ao circuito. Como G é conexo, existe um caminho entre algum vértice do circuito e alguma das extremidades da aresta e, por exemplo entre j, vértice do circuito, e k, extremidade de e. Sem perda de generalidade, este caminho não contém arestas de C. Comece a percorrer o grafo a partir de j continuando livremente, sem, no entanto, repetir arestas ou utilizar arestas de C. Como C é um circuito, mesmo "retirando"as arestas de C do grafo, os vértices continuam a ter grau par, portanto esta nova incursão pelo grafo só pode parar em j, completando um novo circuito, $\tilde{C}$. Note agora que podemos combinar os dois circuitos de modo a formar um só que contenha todas as arestas de C e $\tilde{C}$. Basta percorrer C começando em j (e não em i) e quando voltar a j percorrer $\tilde{C}$ em seguida. Em resumo, temos um procedimento que nos permite: (i) construir um circuito C, sem repetição de arestas, (ii) se alguma *aresta e de G não pertence a C, obtemos um novo circuito, também sem repetição de arestas, que contém as arestas de C e o arco e. Como o número de arestas de G é finito, a repetição sucessiva de (ii) termina por produzir um circuito que contém todas as arestas de G, sem repetição, ou seja, um circuito euleriano.* $\square$

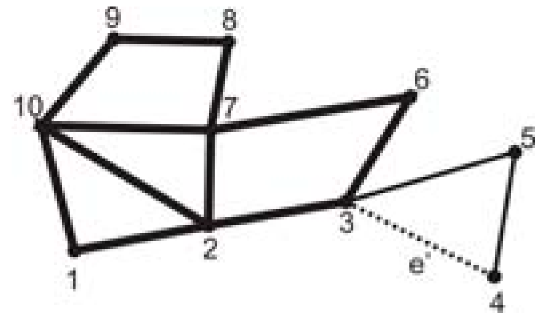
Exemplo 8.1 (Obtendo circuito euleriano)**.** Aplique o algoritmo descrito na demonstração para construir o circuito euleriano do grafo abaixo:



Solução: A figura seguinte mostra o primeiro circuito obtido $(1, 2, 7, 6, 3, 2, 10, 1)$ e mostra (tracejada) a aresta e que não pertence ao circuito. Podemos escolher ligar esta aresta ao circuito



pelas arestas f ou g. Escolhendo a primeira e começando a partir do vértice 10, obtemos o circuito $(10, 1, 2, 7, 6, 3, 2, 10, 9, 8, 7, 10)$.



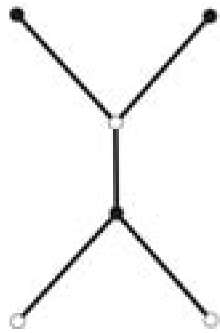
A situação atual é indicada pela figura onde indicamos (em tracejado) uma aresta que não pertence ao circuito e'. Como uma das extremidades, o vértice 3, já pertence ao circuito, o passeio que liga a aresta ao circuito é o próprio vértice 3. Começando no vértice 3, obtemos o circuito euleriano $(3, 2, 10, 9, 8, 7, 10, 1, 2, 7, 6, 3, 4, 5, 3)$.◀

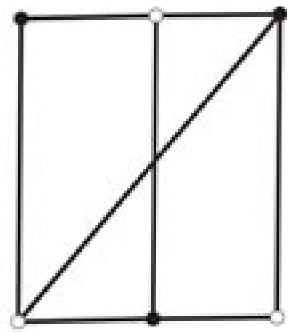
8.3 Grafos Bipartidos

Definição 8.2. Um grafo é dito bipartido se seu conjunto de vértices V podem ser particionados em dois conjuntos P, B de tal forma que toda aresta do grafo ligue um vértice de P a um vértice de B. A partição $V = P \cup B$ é chamada bipartição do conjunto de vértices.

Podemos interpretar P e B como preto e branco, veja que o grafo é bipartido quando os vértices podem ser coloridos usando duas cores tal que nenhuma aresta ligue vértices de mesma cor. Por essa razão, grafos bipartidos são algumas vezes chamados bicromáticos.

Exemplo 8.2 (Grafos Bipartidos)**.** Cada vértice está colorido de branco ou de preto. Para verificar que os grafos são bipartidos, note que cada aresta liga um vértice preto a um vértice branco.





Teorema 8.2. *Um grafo conexo é bipartido se, e somente se, não contém ciclo de comprimento ímpar.*

Demonstração: *Se um grafo G contém um ciclo ímpar, então este ciclo, e portanto o próprio G, não pode ser bipartido. Reciprocamente, suponha que G não contém ciclo de comprimento ímpar; devemos mostrar como colorir seus vértices de P e B.*

Escolha qualquer vértice v de G, e a partição V como $P \cup B$ onde:

$$P = \{u \in V : \textit{caminho mais curto de } u \textit{ para } v \textit{ tem comprimento par.}\}$$

$$B = \{u \in V : \textit{caminho mais curto de } u \textit{ para } v \textit{ tem comprimento ímpar.}\}$$

Temos $v \in P$ desde que 0 é par; temos que checar se nenhuma aresta de G tem ambas extremidades em P ou ambas em B. Com efeito, suponha que exista uma aresta xy com $x \in P$ e $y \in P$. Então, denotando o comprimento do menor caminho do vértice v_1 para o vértice v_2 por $d(v_1, v_2)$, temos $d(v, x) = 2m$ e $d(v, y) = 2n$ para alguns inteiros m, n. Mas existe um caminho de v para y via x de comprimento $2m + 1$, então $2n \leq 2m + 1$. Similarmente, $2m \leq 2n+1$, então $m = n$. Denote o caminho mais curto de v para x por $c(x)$ e de v para y de $c(y)$. Desde que $m = n$, $c(x)$ e $c(y)$ têm comprimento igual. Seja w o último vértice em $c(x)$ que também *está em $c(y)$ (possivelmente $w = v$). Então a parte de $c(x)$ de w para x e a parte de $c(y)$ de w para y deve ter comprimento igual, e desde que eles têm apenas w em comum, eles devem, com a aresta xy, formar um ciclo ímpar. Mas G não possui circuito ímpar, então a suposição feita sobre a aresta xy (que $x, y \in B$) é falsa. Então não existe aresta com ambos vértices em P. Similarmente não existe aresta com ambos vértices em B.* $\square$

Definição 8.3. Um grafo bipartido com conjunto de vértices $V = P \cup B$ é completo se todo vértice de P estiver ligado a todos os vértices de B. Se $N(P) = m$ e $N(B) = n$, o grafo bipartido completo é denotado por $K_{m,n}$ ou $K_{n,m}$.

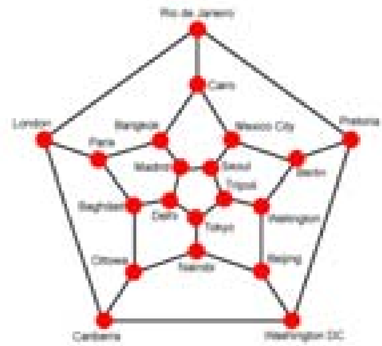
O grafo de fornecimento de serviços no exemplo (7.7) pode ser denotado por $K_{3,3}$. Claramente, $K_{m,n}$ tem $m + n$ vértices e mn arestas; m vértices têm grau n e n vértices têm grau m. Os grafos completos K_n e bipartidos completos $K_{n,m}$ desempenham um papel importante na teoria dos grafos, principalmente no estudo de planaridade como veremos na próxima aula.

8.4 Ciclo Hamiltoniano

A discussão anterior sobre grafos eulerianos enfatiza travessias de arestas; agora nos concentramos na visita aos vértices.

Definição 8.4. Um ciclo hamiltoniano em um grafo G é um caminho fechado que visita todos vértices de G exatamente uma vez. Se G admite um ciclo hamiltoniano, então G é chamado um grafo hamiltoniano.

Este problema de obter um ciclo hamiltoniano é muitas vezes



exemplificado pelo problema do caixeiro viajante. Neste problema, os vértices são cidades que devem ser visitadas pelo caixeiro e as arestas são as vias que ligam estas cidades. Pretende-se encontrar um percurso tal que o caixeiro viajante visite várias cidades e volte ao ponto de partida, quando possível, percorrendo a menor distância possível.

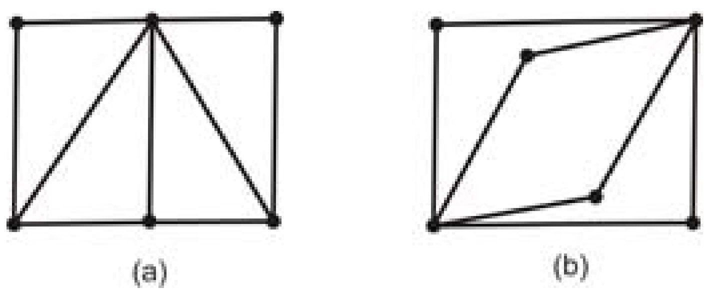
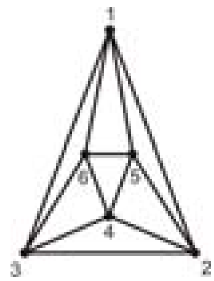


Figura 8.1: (a) Grafo hamiltoniano que não é euleriano. (b) Grafo euleriano que não é hamiltoniano.

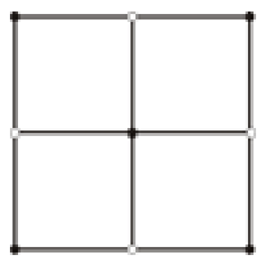
Note que um circuito euleriano atravessa cada aresta exatamente uma vez, mas pode repetir vértices, enquanto que um ciclo hamiltoniano visita cada vértice exatamente uma vez. Abaixo vemos exemplos de grafo hamiltoniano que não é euleriano e vice-versa.

Exemplo 8.3. O grafo octaedral é hamiltoniano.



Solução: Tome o ciclo (1,2,3,4,5,6,1). ◀

Exemplo 8.4. O grafo abaixo não é hamiltoniano.



Solução: A forma mais fácil de ver isso é notar que possuindo 9 vértices se fosse hamiltoniano, deveria conter um ciclo de comprimento 9. Mas, sendo um grafo bipartido, ele contém apenas ciclos de comprimento par. ◀

Apesar de ser claro que apenas grafos conexos possam ser hamiltonianos; e ainda que, por argumento análogo ao exemplo anterior, todo grafo bipartido conexo com número ímpar de vértices não pode ser hamiltoniano; não existe um critério simples para nos dizer se o grafo é ou não hamiltoniano como existe para grafos eulerianos.

8.5 Problema do caminho mais curto

A cada aresta e de G seja $w(e)$ um número real associado a e, chamado seu peso. Então G, junto com esses pesos sobre suas arestas, é chamado grafo com pesos. Grafos com pesos ocorrem frequentemente em aplicações de teoria dos grafos. Num grafo de comunicação, por exemplo, ele pode representar o custo de construção ou manutenção de vários links de comunicação.

Se H é um subgrafo de um grafo com pesos, o peso $w(H)$ de H é a soma dos pesos $\sum_{e \in E(H)} w(e)$ sobre suas arestas. Muitos problemas de otimização buscam encontrar, num grafo com pesos, um subgrafo com peso máximo (ou mínimo). Um desses problemas é o *problema do caminho mais curto*: dada um mapa da malha rodoviária que liga várias cidades, determine a rota mais curta entre duas cidades específicas naquela malha.

Aqui precisamos encontrar, num grafo com pesos, um caminho de peso mínimo, conectando dois vértices específicos u_0 e v_0; os pesos representam as distâncias entre as cidades e são, portanto, não negativos. O caminho indicado no grafo da figura seguinte é um u_0v_0-caminho de peso mínimo.

Agora apresentaremos um algoritmo para resolver o problema do caminho mais curto. Para ser mais claro, nos referimos ao peso de um caminho como seu comprimento; similarmente, o peso mínimo de um uv-caminho será chamado a distância entre u e v e denotada por $d(u, v)$. Essas definições coincidem com as noções usuais de comprimento e distância quando todos os pesos são iguais a um.

Assumiremos que G é um grafo simples e que os pesos são

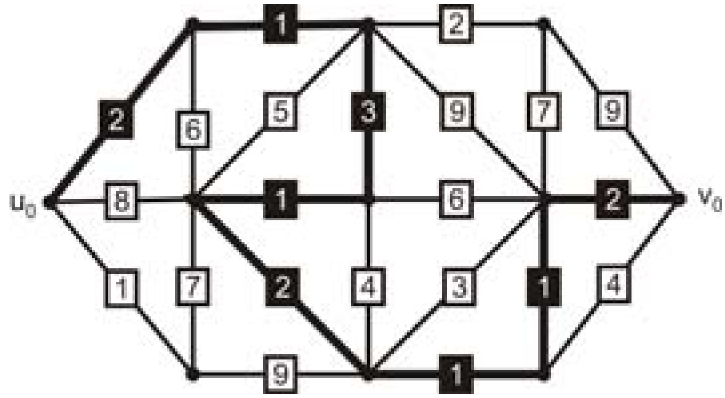


Figura 8.2: u_0v_0-caminho de peso mínimo (13).

positivos. Se uma aresta $uv \notin E(G)$, adotaremos $w(uv) = \infty$. O algoritmo que será descrito foi descoberto por Dijkstra (1959) e, independentemente, por Whiting e Hillier (1960). Ele não encontra simplesmente o menor u_0v_0-caminho, mas os menores caminhos de u_0 para todos os outros vértices de G. A idéia básica é a seguinte.

Suponha que S seja um subconjunto próprio de V tal que $u_0 \in S$, e denote $\overline{S} = V \setminus S$. Se $P = u_0 \dots \overline{uv}$ é um menor caminho de u_0 para $\overline{S}$ então

$$d(u_0, v) = d(u_0, \overline{u}) + w(\overline{uv})$$

e a distância de u_0 para $\overline{S}$ é dada pela fórmula

$$d(u_0, \overline{S}) = min_{u \in S, v \in \overline{S}}\{d(u_0, u) + w(uv)\} \tag{8.6}$$

Essa fórmula é a base do algoritmo de Dijkstra. Iniciando com um conjunto $S_0 = \{u_0\}$, uma sequência crescente $S_0, S_1, \dots, S_{v-1}$ de subconjuntos de V é construída de tal forma que, no final do estágio i, os menores caminhos de u_0 para todos vértices de S_i são conhecidos.

O primeiro passo é determinar um vértice mais próximo a u_0. Isso é obtido calculando-se $d(u_0, \overline{S_0})$ e selecionando um vértice $u_1 \in \overline{S_0}$ tal que $d(u_0, u_1) = d(u_0, \overline{S_0})$.

$$d(u_0, \overline{S_0}) = min_{v \in \overline{S_0}}\{w(u_0 v)\}$$

portanto $d(u_0, \overline{S_0})$ é facilmente calculado. Agora colocamos $S_1 = \{u_0, u_1\}$ e P_1 denota o caminho $u_0 u_1$; esse é claramente um $u_0 u_1$-caminho mais curto. Em geral, se o conjunto $S_k = \{u_0, u_1, \ldots, u_k\}$, então os caminhos mais curtos correspondentes $P_1, P_2, \ldots, P_k$ já foram determinados e calculamos $d(u_0, \overline{S_k})$ usando (8.6) e selecionamos um vértice $u_{k+1} \in \overline{S_k}$ tal que $d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, \overline{S_k})$. Por (8.6), $d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, u_j) + w(u_j u_{k+1})$ para algum $j \leq k$; nós pegamos um $u_0 u_{k+1}$-caminho mais curto adcionando a aresta $u_j u_{k+1}$ ao caminho P_j.

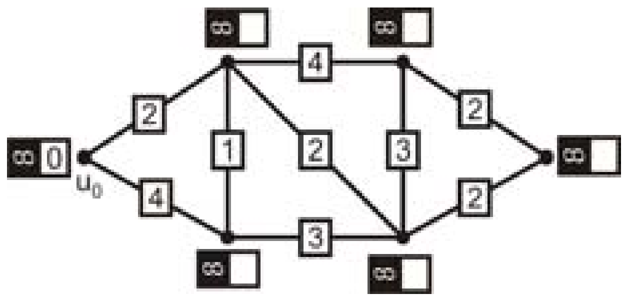
Em resumo, o algoritmo de Dijkstra é o seguinte:

1. Faça $l(u_0) = 0, l(v) = \infty$, para $v \neq u_0, S_0 = \{u_0\}, i = 0$.

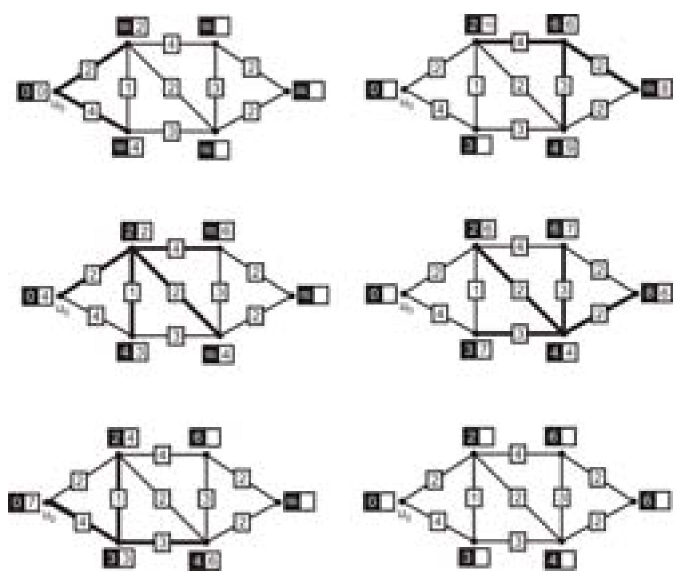
2. Para cada $v \in \overline{S_i}$, troque $l(v)$ por $min\{l(v), l(u_i) + w(u_i v)\}$. Calcule $min_{v \in \overline{S_i}}\{l(v)\}$ e denote por u_{i+1} um vértice para o qual esse mínimo é atingido. Faça $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$.

3. Se $i = |V(G)| - 1$, pare. Se não, troque i por $i + 1$ e volte ao passo 2.

Exemplo 8.5 (Algoritmo de Dijkstra)**.** Utilize o algoritmo de Dijkstra para determinar um menor caminho de u_0 para os vértices restantes do grafo abaixo.



Solução: Basta seguir os seis passos a seguir.



8.6 Conclusão

Nesta aula, notamos que enquanto a tarefa de determinar se um grafo é euleriano é simples, não ocorre o mesmo para grafos hamiltonianos. Caracterizamos grafos bipartidos como aqueles que não contêm ciclo de comprimento ímpar. E para finalizar, fomos apresentados ao algoritmo de Dijkstra para resolver o problema do caminho mais curto entre dois vértices de um grafo.

RESUMO

Um passeio euleriano é aquele que contém cada aresta uma única vez. Um circuito euleriano é um passeio euleriano fechado. Um grafo é euleriano se admite circuito euleriano. O grafo conexo G é euleriano se, e somente se, os graus de todos os vértices de G são pares.

Um grafo conexo é bipartido se, e somente se, não contém ciclo de comprimento ímpar.

Um ciclo hamiltoniano em um grafo G é um caminho fechado que visita todos vértices de G exatamente uma vez. Se G admite um ciclo hamiltoniano, então G é chamado um grafo hamiltoniano.

Algoritmo de Dijkstra

1. Faça $l(u_0) = 0, l(v) = \infty$, para $v \neq u_0, S_0 = \{u_0\}, i = 0$.

2. Para cada $v \in \overline{S_i}$, troque $l(v)$ por $min\{l(v), l(u_i) + w(u_i v)\}$. Calcule $min_{v \in \overline{S_i}}\{l(v)\}$ e denote por u_{i+1} um vértice para o qual esse mínimo é atingido. Faça $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$.

3. Se $i = |V(G)| - 1$, pare. Se não, troque i por $i + 1$ e volte ao passo 2.

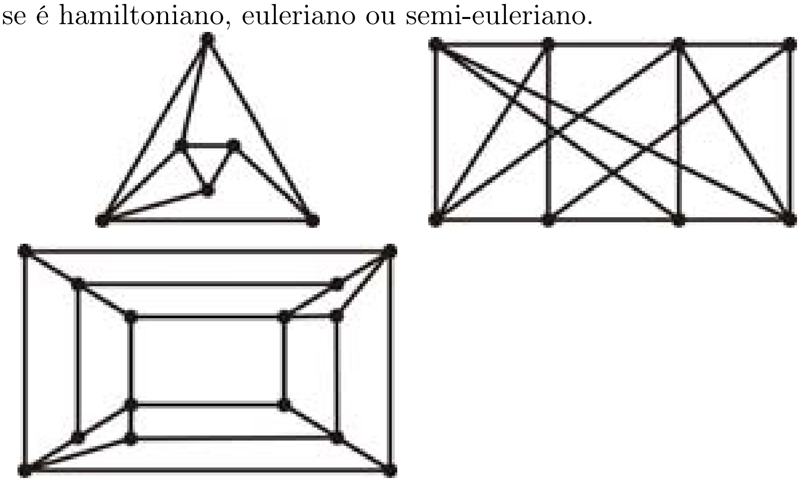
PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, esturaremos o problema de planaridade de grafos. Surgindo qualquer dúvida conceitual, faça uma nova leitura da aula 7.

ATIVIDADES

ATIVIDADE 8.1. Um passeio euleriano é um passeio que contém todas arestas do grafo, mas não é fechado. Um grafo não euleriano que contém um passeio euleriano é dito semi-euleriano. Mostre que um grafo G é semi-euleriano se, e somente se, contém exatamente dois vértices de grau ímpar.

ATIVIDADE 8.2. Para cada um dos grafos abaixo, determine se é hamiltoniano, euleriano ou semi-euleriano.



ATIVIDADE 8.3. As distâncias entre cinco cidades é dada na tabela abaixo. Encontre o caminho mais curto entre elas.

	A	B	C	D	E
A	0	10	11	13	9
B	10	0	8	3	6
C	11	8	0	8	13
D	13	3	8	0	8
E	9	6	13	8	0

ATIVIDADE 8.4. Uma companhia aérea opera em seis cidades $C_1, \ldots, C_6$. O custo para um vôo direto da cidade C_i à cidade C_j é dado na entrada (i, j) da matriz a seguir, onde (∞ indica que não há vôo direto entre aquelas duas cidades):

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

A compania está interessada em calcular uma tabela com as rotas mais baratas entre duas cidades. Prepare tal tabela.

ATIVIDADE 8.5. Um lobo, uma cabra e um repolho estão numa margem do rio. Um barqueiro deseja atravessar o rio com eles, mas, desde que seu barco é muito pequeno, ele pode levar apenas um deles de cada vez. Por razões óbvias, nem o lobo e a cabra, nem a cabra e o repolho podem ser deixados juntos. Como o barqueiro poderá atravessar o rio com eles?

ATIVIDADE 8.6. Dois homens têm uma jarra de 8 litros cheia de vinho e duas jarras vazias de 3 e 5 litros, respectivamente. Qual é a forma mais simples de dividir o vinho igualmente entre os dois homens utilizando as três jarras e sem desperdiçar nenhum litro de vinho?

REFERÊNCIAS

ANDERSON, I. A First Course in Discrete Mathematics. Springer: Londres, 2001.

BONDY, J.A., MURTY, U.S.R. Graph Theory with Applications. Elsevier: Nova Iorque, 1976.

SANTOS, J.P.O., et al. Introdução à Análise Combinatória. Moderna: Rio de Janeiro, 2007.