AULA 9

Planaridade

META

- Introduzir o problema da planaridade de grafos.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

- Distinguir grafo planar e plano;
- Determinar o dual de um grafo;
- Caracterizar grafos planares;
- Aplicar o algoritmo que determina se um grafo hamiltoniano é planar.

PRÉ-REQUISITOS

- Conceitos elementares da teoria dos grafos (aula 7).

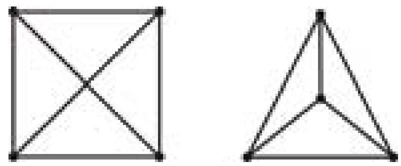
9.1 Introdução

Caro aluno, essa é nossa penúltima aula do curso. Nela, definiremos grafos mergulháveis em superfícies, voltando nossa atenção ao caso de grafos mergulhávis no plano e veremos que estes são também mergulháveis na esfera. Definiremos o dual de um grafo planar. Apresentaremos a famosa fórmula de Euler que relaciona o número de vértices, arestas e regiões de um grafo. A utilizaremos para mostrar que não há solução para o famoso problema do fornecimento de serviços. Enunciaremos ainda o Teorema de Kuratowski, que caracteriza grafos planares. Por fim, apresentaremos um algoritmo que verifica se um grafo hamiltoniano é ou não planar.

9.2 Grafos Mergulháveis em Superfícies

Um grafo é dito mergulhável no plano, ou planar, se ele pode ser desenhado no plano de tal modo que suas arestas se intersectam apenas nos seus extremos. Um tal desenho de um grafo planar G é dito um mergulho planar de G. Um mergulho planar $\widetilde{G}$ de G é considerado isomorfo a G. Dizemos que um mergulho planar de um grafo planar é um grafo plano.

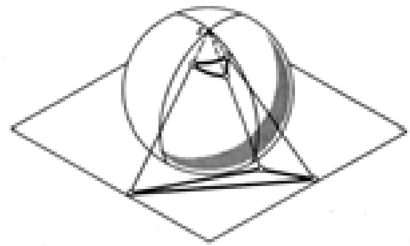
O conceito de grafo planar já apareceu no problema do exemplo (7.7), que pode ser resumido na pergunta: $K_{3,3}$ é planar? Por exemplo, K_4 é planar, como visto abaixo; onde o segundo desenho de K_4 é um grafo plano que estabelece seu mergulho no plano.



A noção de um mergulho planar se extende a outras superfícies. Um grafo G é dito mergulhável numa superfície S se pode ser desenhado em S tal que suas arestas se intersectem apenas nas suas extremidades; tal desenho, se existir, é dito um mergulho de G em S.

Figura 9.1: Mergulho do K_4 na esfera e do K_5 no toro.

No teorema que segue, mostraremos que grafos planares e grafos mergulháveis na esfera são os mesmos. Para mostrar isso, faremos uso de uma aplicação conhecida como projeção estereográfica. Considere uma esfera S tangente a um plano P, e denote por z o ponto de S que está oposto diagonalmente ao ponto de contato entre S e P. A aplicação $\pi : S \setminus \{z\} \rightarrow P$, definida por $\pi(s) = p$ se, e somente se, z, s, p são ponto colineares, é chamada projeção estereográfica a partir de z.



Teorema 9.1. *Um grafo G é mergulhável no plano se, e somente se, é mergulhável na esfera.*

Demonstração: *Suponha que G possui um mergulho $\widetilde{G}$ na esfera. Escolha um ponto z da esfera que não esteja em $\widetilde{G}$. Então a imagem de $\widetilde{G}$ sob a projeção estereográfica a partir de z é um mergulho de G no plano. A recíproca é provada analogamente.* □

9.3 Grafo Dual

Um grafo plano G particiona o resto do plano em regiões conexas. Sendo que, para cada grafo plano, existe exatamente uma região ilimitada, chamada região exterior.

Teorema 9.2. *Seja v um vértice de um grafo planar G. Então G pode ser mergulhado no plano de tal modo que v esteja na região exterior do mergulho.*

Demonstração: *Considere um mergulho $\widetilde{G}$ de G na esfera. Seja z um ponto no interior de alguma região contendo v, e seja $\pi(\widetilde{G})$ a imagem de $\widetilde{G}$ sob a projeção estereográfica a partir de z. Claramente, $\pi(\widetilde{G})$ é um mergulho planar de G do tipo desejado.* □

Dado um grafo plano G, podemos definir outro grafo G^* como segue: correspondendo a cada região r de G existe um vértice r^*

de G^*, e correspondendo a cada aresta e de G existe uma aresta e^* de G^*; dois vértices f^*, g^* são unidos por uma aresta e^* em G^* se, e somente se, suas regiões correspondentes f, g são separadas por uma aresta e de G. O grafo G^* é dito o <u>dual</u> de G.

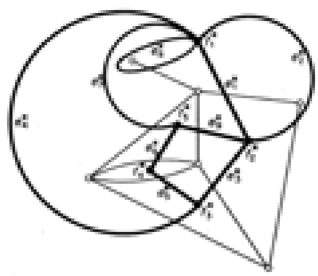


Figura 9.2: Grafo e seu dual.

Sejam $v(G), a(G), r(G)$ o número de vértices, de arestas e de regiões de um grafo G, respectivamente, e $d_G(f)$ o grau da região f no grafo G. Seja ainda $R(G)$ o conjunto das regiões de G. As relações seguintes são consequências diretas da definição de G^*:

$$\begin{aligned} v(G^*) &= r(G) \\ a(G^*) &= a(G) \\ d_{G^*}(f^*) &= d_G(f), \text{ para todo } f \in R(G) \end{aligned}$$

O teorema a seguir mostra que num grafo plano, a soma dos graus de suas regiões é igual ao dobro do número de arestas.

Teorema 9.3. *Se G é um grafo plano, então*

$$\sum_{f \in R(G)} d(f) = 2a(G)$$

Demonstração: *Seja G^* o dual de G. Então*

$$\begin{aligned}\sum_{f\in R(G)} d(f) &= \sum_{f^*\in V(G^*)} d(f^*)\\ &= 2a(G^*)\\ &= 2a(G)\end{aligned}$$

$\square$

9.4 A Fórmula de Euler

O resultado básico sobre grafos planos é a fórmula de Euler, que relaciona o número de arestas, vértices e regiões de um grafo.

Teorema 9.4 (Fórmula de Euler)**.** *Qualquer grafo conexo plano com v vértices e a arestas divide o plano em r regiões, onde*

$$v - a + r = 2$$

Demonstração: *Se existe um ciclo, remova uma aresta dele. O efeito é reduzir o número de arestas e de regiões em 1 e não alterar o número de vértices v. Então o grafo resultante tem $v' = v, a' = a - 1, r' = r - 1$, onde $v' - a' + r' = v - a + r$. Repetindo esse procedimento até não restar mais nenhum ciclo, o grafo final torna-se uma árvore com $v - a" + r" = v - (v - 1) + 1 = 2$.* $\square$

Corolário 9.1. *Um grafo plano com $v \geq 3$ vértices tem no máximo $3v - 6$ arestas.*

Demonstração: *É suficiente mostrar para grafos conexos. Seja G um grafo plano simples conexo com $v \geq 3$. Então $d(f) \geq 3$ para todo $f \in R(G)$, logo $\sum_{f\in R(G)} d(f) \geq 3r$. Assim, pelo teorema (9.3), $2a \geq 3r$. Segue pela fórmula de Euler que, $v - a + \frac{2a}{3} \geq 2$, ou seja, $a \leq 3v - 6$.* $\square$

Teorema 9.5. *K_n é planar somente se $n \leq 4$.*

Demonstração: *É suficiente provar que K_5 não é planar, pois os demais casos contém K_5 como subgrafo. Como K_5 possui $v = 5$ vértices, para ser grafo plano deveria ter no máximo 9 arestas, mas K_5 possui 10 arestas, logo não pode ser planar.* $\square$

Teorema 9.6. *$K_{3,3}$ não é planar.*

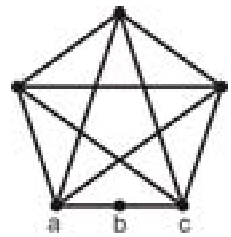
Demonstração: *$K_{3,3}$ tem $v = 6$ vértices e $a = 9$ arestas. Então, se existisse uma representação planar de $K_{3,3}$, deveria ter $r = 2 - 6 + 9 = 5$ regiões. Desde que $K_{3,3}$ é bipartido, portanto sem ciclo de grau ímpar, cada região deve ter pelo menos grau 4. Então a soma dos graus das regiões é pelo menos 20, assim $2a = 18 \geq 20$, contradição.* $\square$

9.5 Teorema de Kuratowski

O que torna um grafo não planar? Claramente, se ele contém K_5 ou $K_{3,3}$ como subgrafo, então não pode ser planar. Foi provado em 1930 pelo matemático polonês Kuratowski que é, essencialmente, apenas a presença de um K_5 ou um $K_{3,3}$ no grafo que faz com que ele deixe de ser planar.

Para melhorar o entendimento dessa afirmação, façamos inicialmente a seguinte observação: desde que K_5 não é planar, o grafo abaixo não pode ser planar. Se fosse, poderíamos fazer um desenho plano dele, apagar b da aresta ac, e obter um desenho plano de K_5.

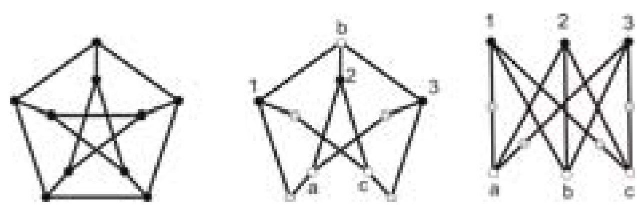
Definição 9.1. A adição de um novo vértice numa aresta existente é dita uma subdivisão de aresta, e uma ou mais subdivisões de arestas cria uma subdivisão do grafo original.



Teorema 9.7 (Teorema de Kuratowski)**.** *Um grafo é planar se, e somente se, não contém subdivisão de* K_5 *ou* $K_{3,3}$ *como subgrafo.*

A demonstração do Teorema de Kuratowski está acima do nível do presente texto. Para exibir a utilidade do resultado, o utilizaremos para provar que o grafo de Petersen não é planar.

Exemplo 9.1 (Grafo de Petersen)**.** Na figura abaixo, o grafo à esquerda é o famoso grafo de Petersen. No centro, temos o mesmo grafo com duas arestas removidas. Esse subgrafo é uma subdivisão de $K_{3,3}$ como mostrado no grafo isomorfo à direita, o que mostra que o grafo de Petersen não é planar. ◄



9.6 Planaridade e Grafos Hamiltonianos

Existem algumas conexões interessantes entre grafos planares e hamiltonianos. Uma dessas conexões ocorrem no seguinte algoritmo, que pode ser usado para determinar se um grafo hamiltoniano é planar ou não. A idéia básica é que se um grafo G é hamiltoniano e planar, então no desenho planar de G, as arestas de G que não estão no ciclo hamiltoniano H cairão em dois conjuntos: aquelas que estão no interior de H e aquelas que estão no exterior de H.

Teorema 9.8 (Algoritmo de planaridade para grafos hamiltonianos)**.** *Seja G um grafo hamiltoniano e H um ciclo hamiltoniano.*

(1) Desenhe o grafo G tal que o ciclo hamiltoniano H seja a fronteira da região exterior (infinita);

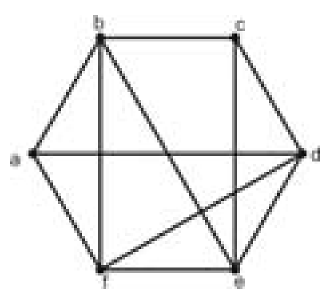
(2) Liste as arestas de G que não estão em H: $e_1, e_2, \ldots, e_r$;

(3) Forme um novo grafo K no qual os vértices são rotulados por $e_1, e_2, \ldots, e_r$ e e_i, e_j são adjacentes se, e somente se, as arestas e_i e e_j se cruzam no grafo G (arestas incompatíveis);

(4) Então G é planar se, e somente se, K é bipartido.

(Se K é bipartido, com bipartição $P \cup B$, então as arestas e_i de cor P podem ser desenhadas no interior de H e as B coloridas podem ser desenhadas no exterior de H.)

Exemplo 9.2. Verifique se o grafo a seguir é planar.

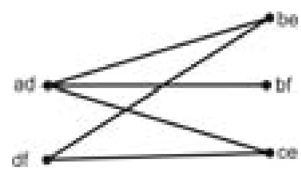


Solução: Vamos seguir o algoritmo dado.

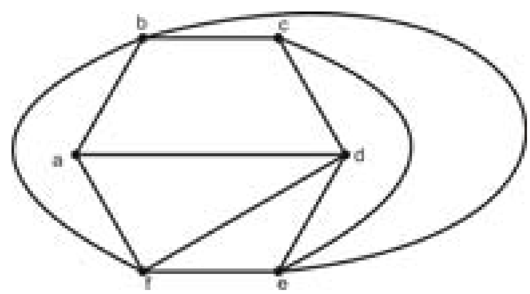
(1) O grafo G já está desenhado com o ciclo hamiltoniano $H = (a, b, c, d, e, f, a)$ sendo a fronteira da região exterior;

(2) As arestas de G que não estão em H são: ad, be, bf, ce, df;

(3) A aresta ad é incompatível com be, bf, ce. Já be, é incompatível com ad, df. A aresta bf é incompatível apenas com ad; ce é incompatível com ad, df; e df é incompatível com be, ce. Assim, o grafo K fica



(4) Como o grafo K obtido é bipartido, segue que G é planar, e podemos apresentar o grafo plano isomorfo a G desenhando ad, df no interior do ciclo H e be, bf, ce no exterior do ciclo.



9.7 Conclusão

Nesta aula, voltamos nossa atenção ao problema de grafos que podem ser mergulhados no plano. Definimos o dual de um grafo planar e apresentamos a fórmula de Euler que relaciona vértices, arestas e regiões de um grafo. Vimos que $K_{3,3}$ e K_5 não são planares e em seguida apresentamos o Teorema de Kuratowski que caracteriza grafos planares. Para finalizar a aula, apresentamos um algoritmo que verifica a planaridade de grafos hamiltonianos.

RESUMO

Um grafo é planar se pode ser desenhado no plano de tal forma que suas arestas se intersectam apenas nos seus extremos. Tal desenho de um grafo planar é um grafo plano.

Um grafo G é mergulhável no plano se, e somente se, é mergulhável na esfera.

O dual de um grafo plano é definido como segue: a cada região de G existe um vértice do dual G^*, a cada aresta de G existe uma aresta de G^*; dois vértices do dual são unidos por uma aresta se, e somente se, suas regiões correspondentes são separadas pela aresta correspondente.

Fórmula de Euler: $v - a + r = 2$.

Um grafo planar com mais de 2 vértices possui, no máximo, $3v - 6$ arestas.

$K_{3,3}$ e K_5 não são planares.

Uma subdivisão de aresta é a adição de um novo vértice numa aresta existente.

Teorema de Kuratowski: Um grafo é planar se, e somente se, não contém subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ como subgrafo.

Algoritmo de planaridade para grafos hamiltonianos: se G um grafo hamiltoniano e H um ciclo hamiltoniano, então:

(1) Desenhe o grafo G tal que o ciclo hamiltoniano H seja a fronteira da região exterior (infinita);

(2) Liste as arestas de G que não estão em H: $e_1, e_2, \ldots, e_r$;

(3) Forme um novo grafo K no qual os vértices são rotulados por $e_1, e_2, \ldots, e_r$ e e_i, e_j são adjacentes se, e somente se, as arestas e_i e e_j se cruzam no grafo G (arestas incompatíveis);

(4) Então G é planar se, e somente se, K é bipartido.

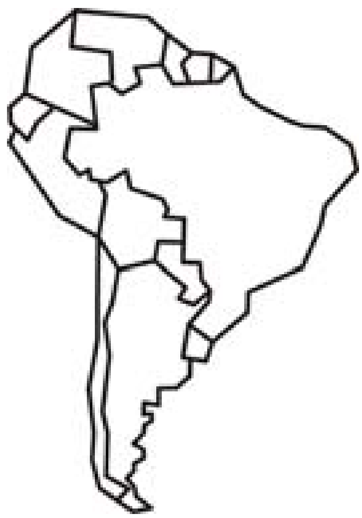
(Se K é bipartido, com bipartição $P \cup B$, então as arestas e_i de cor P podem ser desenhadas no interior de H e as B coloridas podem ser desenhadas no exterior de H.)

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, estudaremos problemas de coloração de grafos. Será a aula de encerramento de nosso curso de matemática discreta. Nela aplicaremos mais uma vez o princípio da inclusão-exclusão (aula 2) no estudo de polinômios cromáticos. Será preciso conhecer alguns conceitos elementares da teoria dos grafos (aula 7) e lembrar a definição de regiões de um grafo mergulhado num plano dada nesta aula.

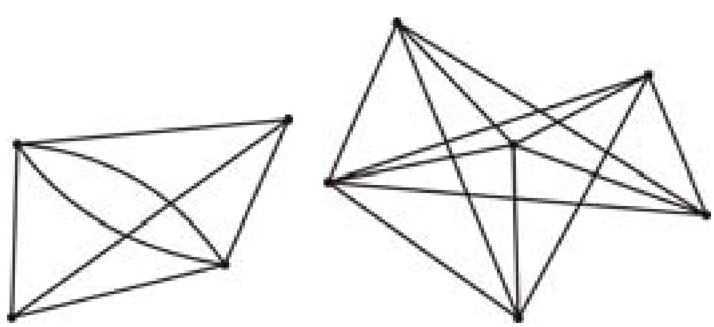
ATIVIDADES

ATIVIDADE 9.1. Considere o mapa abaixo

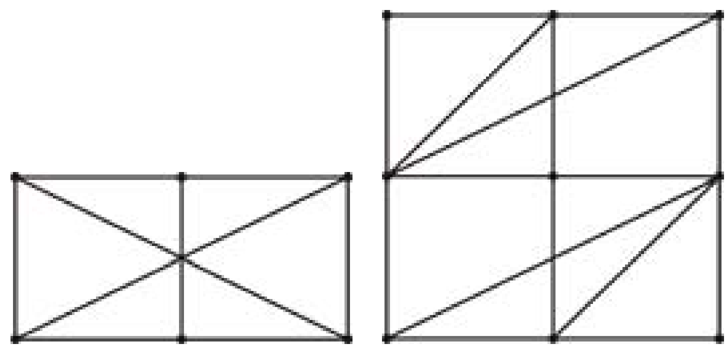


Defina o grafo associado ao mapa da seguinte maneira: para cada região do mapa, associe um vértice do grafo; dois vértices do grafo são ligados por uma aresta se as regiões associadas a eles fazem fronteira no mapa. Desenhe o grafo G associado a este mapa e depois determine seu grafo dual G^*.

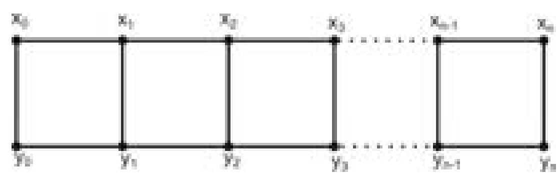
ATIVIDADE 9.2. Os grafos a seguir são planares?



ATIVIDADE 9.3. Um emparelhamento perfeito de um grafo com $2n$ vértices é um subgrafo com n arestas disjuntas. Quantos emparelhamentos perfeitos existem nos grafos abaixo?



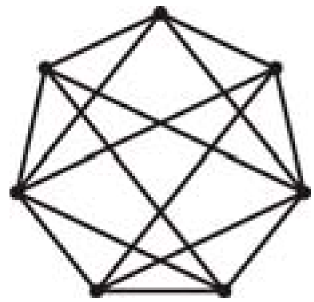
ATIVIDADE 9.4. O grafo G_n $(n \geq 1)$ é mostrado abaixo:

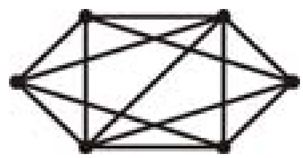


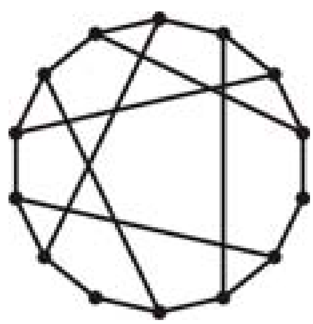
1. G é bipartido? Planar?

2. Denote por a_n o número de emparelhamentos completos de G_n. Mostre que $a_1 = 3$ e $a_2 = 5$. Mostre que para $n > 2, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ e portanto obtenha uma fórmula para a_n.

ATIVIDADE 9.5. Use o algoritmo da planaridade para determinar se os grafos seguintes são planares.







REFERÊNCIAS

ANDERSON, I. A First Course in Discrete Mathematics. Springer: Londres, 2001.

BONDY, J.A., MURTY, U.S.R. Graph Theory with Applications. Elsevier: Nova Iorque, 1976.

SANTOS, W.F. Teorema de Geometrização para Girassóis de Grafos com Valência Mínima Três. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Pernambuco: Recife, 2008.