AULA 10

Coloração

META

- Apresentar problemas de coloração de grafos.

OBJETIVOS

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

- Obter o polinômio cromático de um grafo associado a um mapa;
- Distinguir e determinar número cromático e índice cromático de grafos;

PRÉ-REQUISITOS

- Princípio da inclusão-exclusão (aula 2);
- Conceitos elementares da teoria dos grafos (aula 7);
- Resultados sobre grafos planares (aula 9).

10.1 Introdução

Prezado aluno, bem vindo à nossa aula de encerramento do curso de matemática discreta. Nesta aula trataremos dois tipos de problemas: coloração de vértices e de arestas. Na primeira seção, voltaremos nossa atenção à coloração de vértices, dividindo-a em dois problemas clássicos: (1) determinar o número de maneiras diferentes de se colorir, com um número fixado de cores, as regiões de um mapa de modo que duas regiões vizinhas não tenham a mesma cor; (2) determinar número cromático de um grafo, isto é, o menor número de cores necessárias para se obter uma coloração de seus vértices. Nesta segunda subseção, apresentaremos o algoritmo guloso que obterá um limite superior para o número cromático. Na seção seguinte, trataremos o problema de obter o índice cromático de um grafo, isto é, o número mínimo de cores exigida em uma coloração de arestas de um grafo.

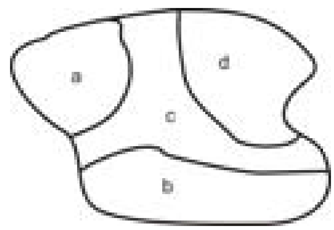
10.2 Coloração de Vértices

10.2.1 Polinômios Cromáticos

Prosseguindo com os problemas clássicos da teoria dos grafos, apresentaremos agora o de determinar o número de maneiras diferentes de se colorir, com um número fixado de cores, as regiões de um mapa de modo que duas regiões vizinhas não tenham a mesma cor. Para isso, utilizaremos os polinômios cromáticos ou polinômios de coloração.

Definição 10.1. Um polinômio da forma $P_M(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i$ é um polinômio cromático se e só se o valor numérico para um determinado λ é o número de maneiras possíveis de se colorir o mapa M com λ cores.

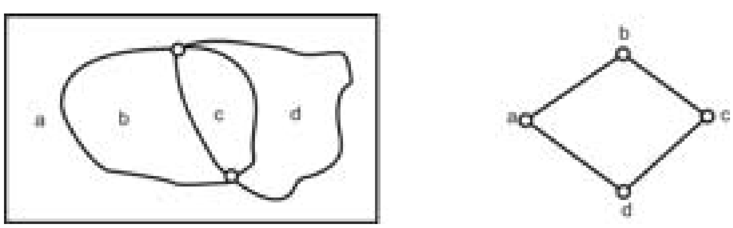
Exemplo 10.1 (Mapa simples)**.** Determinar o polinômio cromático do mapa M a seguir.



Solução: Observe que para a região c temos λ escolhas, para cada uma das outras temos $\lambda - 1$ escolhas, portanto, $P_M(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^3$. Assim, podemos colorir M com 2 cores de 2 maneiras diferentes e com 3 cores de 24 formas. ◄

Esclarecemos que regiões com um só ponto comum não são consideradas vizinhas e portanto há vantagem em substituir o mapa por um grafo onde os vértices representam as regiões e as arestas a vizinhança entre duas regiões. Para mapas mais complicados é possível empregar o princípio da inclusão-exclusão, como veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 10.2 (Mapa 2)**.** Determinar o polinômio cromático do mapa M que é apresentado abaixo junto ao grafo G_M a ele associado.



Solução: Indiquemos com:

- A_1: o conjunto das colorações de a e b com cores iguais;
- A_2: o conjunto das colorações de b e c com cores iguais;
- A_3: o conjunto das colorações de c e d com cores iguais;
- A_4: o conjunto das colorações de d e a com cores iguais.

Pelo princípio da inclusão-exclusão, temos:

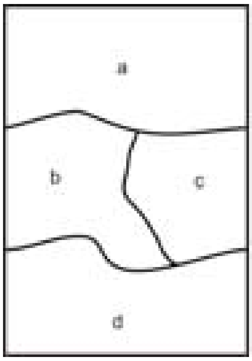
$$\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}.\overline{A_4} = U - \sum A_i + \sum A_i.A_j - \sum A_i.A_j.A_k + A_1.A_2.A_3.A_4$$

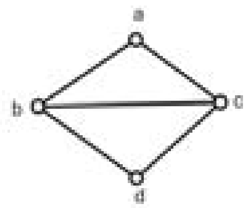
Assim, para λ cores:

- $N(U) = \lambda^4$, pois cada vértice pode ser colorido com uma das λ cores;
- $N(A_i) = \lambda^3$, uma vez que λ cores podem ser empregadas para os dois vértices de cores iguais;
- $N(A_i.A_j) = \lambda^2$, porque λ cores podem ser empregadas para os três vértices de cores iguais e novamente λ cores podem ser utilizadas para o vértice restante;
- $N(A_i.A_j.A_k) = \lambda$, pois todos terão a mesma cor;
- $N(A_1.A_2.A_3.A_4) = \lambda$, todos terão a mesma cor, também.

Logo, $N(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}.\overline{A_4}) = \lambda^4 - C_4^1\lambda^3 + C_4^2\lambda^2 - C_4^3\lambda + \lambda$. Assim, $P_M(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda = (\lambda-1)[(\lambda-1)^3+1]$, e poderíamos, por exemplo, colorir M com 3 cores de 18 maneiras. ◀

Exemplo 10.3 (Mapa 3)**.** Determine o polinômio cromático do mapa M com grafo associado G_M como abaixo.





Solução: Como antes, considere os conjuntos:

- A_1: com a e b de cores iguais;
- A_2: com b e c de cores iguais;
- A_3: com c e d de cores iguais;
- A_4: com b e d de cores iguais;
- A_5: com a e c de cores iguais.

Pelo princípio da inclusão-exclusão, $\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}.\overline{A_4}.\overline{A_5}$ é igual a

$$U - \sum A_i + \sum A_i.A_j - \sum A_i.A_j.A_k + \sum A_i.A_j.A_k.A_l - A_1.A_2.A_3.A_4.A_5$$

Temos então: $N(U) = \lambda^4, N(A_i) = \lambda^3, N(A_i.A_j) = \lambda^2$ e $N(A_i.A_j.A_k) = \lambda$, com exceção de $N(A_1.A_2.A_5) = N(A_2.A_3.A_4) = \lambda^2$. E ainda $N(A_i.A_j.A_k.A_l) = \lambda$ e $N(A_1.A_2.A_3.A_4.A_5) = \lambda$.

Substituindo, temos: $P_G(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 10\lambda^2 - (8\lambda + 2\lambda^2) + 5\lambda - \lambda = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda$. Assim, $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ e portanto $P_G(2) = 0$, isto é, não há como colorir M com apenas duas cores distintas. ◀

Teorema 10.1 (Teorema de Birkhoff). *Se G é um grafo conexo de k vértices, então o grau do polinômio cromático é k.*

Demonstração: *Selecionemos j cores das λ cores, em número de C_λ^j seleções. Indicando com $N_G(j)$ o número de maneiras de colorir G com exatamente j cores, então $N_G(j)C_\lambda^j$ é o número de maneiras de colorir G com exatamente j das λ cores, portanto variando j obtemos o polinômio cromático:*

$$P_G(\lambda) = \sum_{j=1}^{\lambda} N_G(j)C_\lambda^j$$

Como j não pode ultrapassar k visto que não podemos usar mais cores que regiões podemos escrever:

$$P_G(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} N_G(j)C_\lambda^j$$

O maior expoente de $P_G(\lambda)$ é dado por $N_G(k)C_\lambda^k$; portanto o maior expoente de λ é dado por $\lambda^{(k)} = \lambda(\lambda-1)\ldots[\lambda-(k-1)]$. □

Teorema 10.2. *Se um grafo com n vértices é nulo (sem arestas) então seu polinômio cromático é λ^n.*

Demonstração: *De fato, se não existem arestas, cada vértice pode ter qualquer das λ cores, portanto, pelo princípio do produto, $P_G(\lambda) = \lambda^n$.* □

Teorema 10.3. *O polinômio cromático de K_n é $\lambda^{(n)} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots[\lambda-(n-1)]$.*

Demonstração: *De fato, escolhida uma cor para um vértice, então os outros não podem ter mais essa cor. Portanto, para o primeiro temos λ escolhas, para o segundo $\lambda-1$, e assim sucessivamente, para o n-ésimo temos $\lambda-(n-1)$ escolhas. Pelo princípio do produto $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)\ldots[\lambda-(n-1)] = \lambda^{(n)}$.* □

Teorema 10.4. *Se o grafo é desconexo, constituído de duas componentes conexas, então seu polinômio cromático é igual ao produto dos polinômios cromáticos de cada componente.*

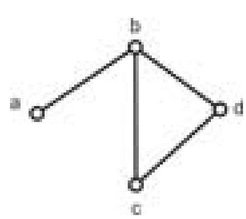
Demonstração: *Sejam* G_1, G_2 *as duas componentes conexas de* G. *Como cada coloração de* G_1 *é independente da coloração da outra componente* G_2, *segue do princípio do produto que* $P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda).P_{G_2}(\lambda)$. □

Teorema 10.5. *Se* G_1 *é subgrafo de* G *suprimindo-se uma aresta* (x_i, x_j), *e* G_2 *é obtido de* G *suprimindo-se a aresta* (x_i, x_j) *e identificando os vértices* x_i *e* x_j, *então:*

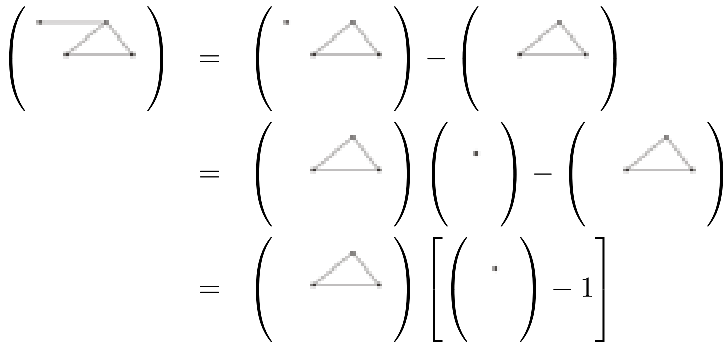
$$P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) - P_{G_2}(\lambda)$$

Demonstração: *Com efeito,* $P_{G_1}(\lambda)$ *incluiu todas as maneiras de colorir* G *mais aquelas que os vértices* x_i *e* x_j *possuem a mesma cor, já que em* G_1 *isso é permitido pois não existe a aresta* (x_i, x_j). *Mas a quantidade desta última é igual àquela para colorir* G_2 *pois os vértices* x_i *e* x_j *são identificados. Logo,* $P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) - P_{G_2}(\lambda)$. □

Exemplo 10.4 (Grafo 1)**.** Determinar o polinômio cromático do grafo G_1 abaixo.



Solução:

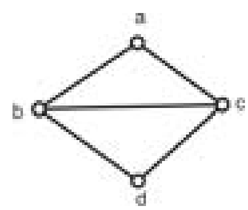


$$= \lambda^{(3)}(\lambda - 1)$$

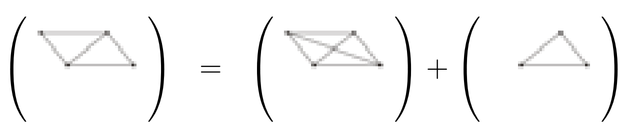
Portanto, $P_{G_1}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. ◀

Note que sendo válida a identidade $P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) - P_{G_2}(\lambda)$, onde G_1 e G_2 são como no teorema (10.5), segue que se G é obtido de G_1 aumentando-se a aresta (x_i, x_j) e G_2 identificando-se os vértices x_i e x_j de G_1, então $P_{G_1}(\lambda) = P_G(\lambda) + P_{G_2}(\lambda)$. No exemplo que segue, utilizaremos esta observação.

Exemplo 10.5 (Grafo do mapa 3)**.** Determinar o polinômio cromático do grafo G_2 abaixo.



Solução:



$$\begin{aligned} &= \lambda^{(4)} + \lambda^{(3)} \\ &= \lambda^{(3)}[(\lambda-3)+1] \\ &= \lambda^{(3)}(\lambda-2) \\ &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2 \end{aligned}$$

Portanto, $P_{G_2}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, como obtido no exemplo (10.3). ◀

10.2.2 Número Cromático

No problema anterior, estávamos interessantos em contar o número de maneiras diferentes de se colorir com um número fixado de cores as regiões de um mapa desde que duas vizinhas não tenham a mesma cor. Vimos nos exemplos anteriores, por exemplo, que existem mapas que não podem ser coloridos apenas com duas cores. O problema que nos focaremos nesta seção é o de obter o número mínimo de cores necessário para colorir os vértices de um grafo de tal forma que vértices adjacentes não tenham a mesma cor.

Definição 10.2. Uma coloração (de vértices) de um grafo é a atribui-ção de uma cor a cada vértice do grafo de tal forma que dois vértices adjacentes não tenham a mesma cor. O número cromático $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores necessárias para se obter uma coloração.

Teorema 10.6. *(i)* $\chi(K_n) = n$

(ii) $\chi(C_n) = 2$, *se* n *é par;* $\chi(C_n) = 3$, *se* n *é impar.*

Demonstração:

(i) Nenhum par de vértices pode receber a mesma cor desde que eles são adjacentes;

(ii) Se n *é par, podemos alternar entre duas cores ao redor do ciclo; se* n *é ímpar, precisaremos de uma terceira cor para o "último "vértice.* □

Exemplo 10.6. O grafo da figura abaixo tem número cromático 3. ◀

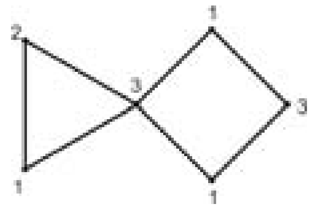


Figura 10.1: Número cromático.

Não há uma maneira fácil de encontrar $\chi(G)$ para um dado grafo G. O algoritmo guloso, que será descrito agora, nos dará um limite superior para $\chi(G)$ relacionado ao grau de vértice máximo. Nessa descrição, denotaremos as cores por $C_1, C_2, \ldots,$ onde C_i é a i-ésima cor.

Teorema 10.7 (Algoritmo Guloso para Coloração de Vértices)**.** *Seja G um grafo.*

(1) Liste os vértices de G em alguma ordem: $v_1, \ldots, v_p$.

(2) Associe a cor C_1 a v_1.

(3) No estágio $i+1$, quando v_i acabou de ter uma cor associada, associe a v_{i+1} a cor C_j, onde j tão pequeno quanto possível tal que C_j ainda não tenha sido usada para colorir um vértice adjacente a v_{i+1}.

Exemplo 10.7. Use o algoritmo guloso para colorir o grafo da figura seguinte para cada uma das rotulações de vértice mostrada.

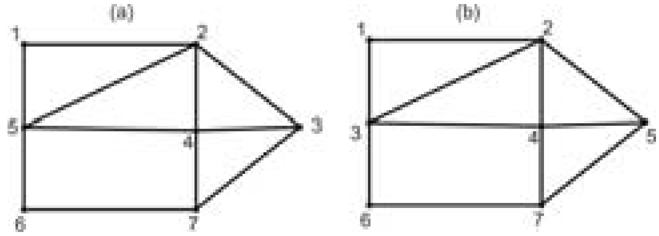


Figura 10.2: Mesmo grafo com rotulações distintas.

Solução: Com os vértices listados como em (a), associamos as cores seguintes:

$v:$	1	2	3	4	5	6	7
$C:$	1	2	1	3	4	1	2

Essa coloração usa 4 cores. Contudo em (b), temos:

$v:$	1	2	3	4	5	6	7
$C:$	1	2	3	1	3	1	2

Essa segunda coloração usa apenas 3 cores, isso mostra que $\chi(G) \leq 3$; na verdade $\chi(G) = 3$ desde que G não é bipartido. ◀

Claramente, o limite de $\chi(G)$ obtido pelo algoritmo guloso depende da ordem na qual os vértices são considerados. Mas note que, se um vértice v tem grau d então, quando vamos associar uma cor a v, no máximo d cores não poderão ser utilizadas, logo ele deve ser associado a alguma cor C_i, onde $i \leq d+1$. Então temos o seguinte limite superior.

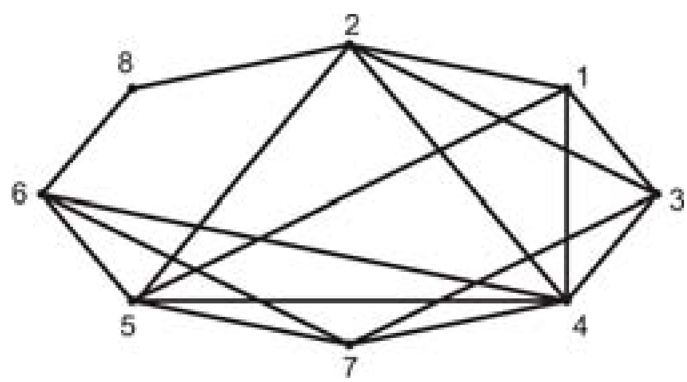
Teorema 10.8. *Se G tem grau de vértice máximo Δ, então o algoritmo guloso irá colorir os vértices de G usando no máximo $\Delta + 1$ cores, tal que $\chi(G) \leq \Delta + 1$.*

Exemplo 10.8. Uma determinada Universidade possui nove professores, $A, B, \ldots, I$, que participam de oito comissões. Os membros de cada comitê são os seguintes:

Comitê 1:	A,B,C,D	5:	A,H,J
2:	A,C,D,E	6:	H,I,J
3:	B,D,F,G	7:	G,H,J
4:	C,F,G,H	8:	E,I

Cada comissão se reúnem em um dia; duas comissões com um membro em comum não podem se reunir no mesmo dia. Encontre o menor número de dias em que as reuniões possam ser realizadas.

Solução: Represente cada comissão por um vértice e ligue duas comissões por uma aresta somente se as comissões correspondentes possuem membros em comum. Então o número mínimo de dias pedido é o número cromático do grafo G mostrado a seguir. Note



que os vértices $1, 2, 3, 4$ formam um K_4, então ao menos quatro cores (dias) serão necessárias. Mas são suficientes, por exemplo,

$$\{1, 7, 8\} \cup \{2, 6\} \cup \{3, 5\} \cup \{4\}$$

forma uma coloração que usa 4 cores. ◀

10.3 Coloração de Arestas

Uma coloração de arestas de um grafo G é uma associação de cores às arestas de G tal que duas arestas adjacentes não recebem a mesma cor. O número mínimo de cores exigida em uma coloração de arestas de G é dito índice cromático de G e denotado por $\chi'(G)$.

Assim, uma coloração de arestas de um grafo particiona suas arestas em subconjuntos tais que arestas num mesmo subconjunto possuam cor comum, isto é, tal que todas arestas em qualquer parte da partição são disjuntas. Um conjunto de arestas disjuntas em um grafo é chamado emparelhamento. Claramente, numa coloração de arestas, todas arestas adjacentes a um vértice v devem receber cores distintas, então $\chi'(K_n) \geq n-1$ para cada n.

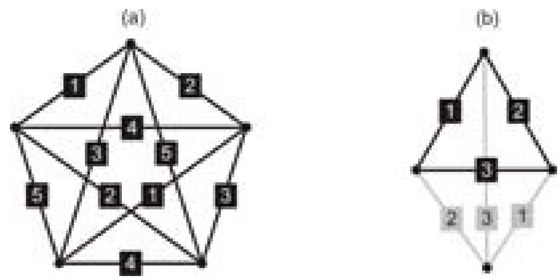


Figura 10.3: Exemplos de coloração de aresta em grafos completos.

Teorema 10.9. *(i) Se n é ímpar, $\chi'(K_n) = n$;*

(ii) Se n é par, $\chi'(K_n) = n-1$;

Demonstração:

(i) Se n é ímpar, qualquer emparelhamento em K_n pode ter no máximo $\frac{1}{2}(n-1)$ arestas. Então no máximo $\frac{1}{2}(n-1)$ podem ter uma mesma cor. Mas existem $\frac{1}{2}n(n-1)$ em K_n, então ao menos n cores são necessárias. Podemos colorir as arestas usando n cores da seguinte maneira. Represente K_n como um n-ágono, com todas diagonais desenhadas. Associe as arestas da fronteira às cores $1, \ldots, n$; então associe cada

diagonal pela cor da aresta da fronteira paralela a ela. Isso dá uma coloração de arestas usando n cores. O caso $n = 5$ é mostrado na figura (10.3 a).

(ii) *Suponha agora que n é par. Certamente $\chi'(K_n \geq n-1$; mostraremos como usar apenas $n-1$ cores. Desde que $n-1$ é ímpar, podemos colorir K_{n-1} usando $n-1$ cores, como descrito anteriormente. Agora tome outro vértice v ligando cada vértice de K_{n-1} a v, obtendo assim K_n. Para cada vértice de K_{n-1}, uma cor não foi usada. As cores que faltam em cada vértice de K_{n-1} são diferentes, então podemos usar essas $n-1$ cores para colorir as arestas adicionadas que se ligam a v. Isso dá uma coloração de aresta de K_n usando $n-1$ cores. O caso $n = 4$ é mostrado na figura (10.3 b).* □

O aparecimento de $\Delta(= n-1)$ e $\Delta + 1(= n)$ como índices cromáticos de K_n, dependendo da paridade de n, está de acordo com o seguinte resultado, cuja demonstração será omitida.

Teorema 10.10 (Vizing)**.** *Se G é um grafo simples com grau de vértice máximo Δ, então $\chi'(G) = \Delta$ ou $\Delta + 1$.*

Teorema 10.11 (König)**.** *Para todo grafo bipartido G, $\chi'(G) = \Delta$.*
Demonstração: *A prova será por indução sobre o número de arestas a. O teorema é verdadeiro para grafos com $a = 1$ aresta; então suponha verdadeiro para grafos bipartidos com k arestas, e considere um grafo bipartido G com grau de vértice máximo Δ e $k+1$ arestas. Escolha qualquer aresta vw de G e a remova, formando um novo grafo bipartido H. H tem k arestas e grau de vértice máximo $\leq \Delta$, então, pela hipótese de indução, H pode ter suas arestas coloridas usando no máximo Δ cores.*

Agora em H, v e w possuem grau $\leq \Delta - 1$, então existe ao menos uma cor faltando das arestas que passam por v e das que são adjacentes a w. Se a cor restante em v e w for a mesma, então ela poderá colorir a aresta vw em G. Caso contrário, suponha que seja C_1 a cor que falta ao vértice v e C_2 a restante em w. Então existe alguma aresta, digamos vu, que é C_2-colorida; se existir uma aresta C_1-colorida partindo de u, prossiga ao longo do caminho com cores alternantes C_2, C_1 o tanto que for possível. O caminho assim construído nunca alcançará w. De fato, se o alcançasse, a aresta incidente a w nesse caminho teria cor C_1 e portanto seria um vw-caminho de comprimento par, adicionando a arestas vw que havia sido removida, teríamos um ciclo de comprimento ímpar, que não existe, desde que G é bipartido. Então o grafo conexo K, constituído pelo vértice v e todos vértices e arestas de H que podem ser tomadas pelo caminho alternante C_1, C_2 colorido, não contém w. Assim, podemos trocar as cores C_1 e C_2 em K sem interferir nas cores no resto de H. Isso dá uma nova coloração de arestas de H na qual não incidem sobre v e w arestas C_2-coloridas, e podemos então usar C_2 para colorir vw. □

Exemplo 10.9. Oito estudantes desejam consultar certos livros na biblioteca. Cada livro é emprestado a cada estudante por 1 semana. Os livros B_j desejados por cada estudantes S_i são os seguintes:

$S_1 : B_1, B_2, B_3$ $\quad$ $S_2 : B_2, B_4, B_5, B_6$ $\quad$ $S_3 : B_2, B_3, B_5, B_7$

$S_4 : B_3, B_5$ $\quad$ $S_5 : B_1, B_6, B_7$ $\quad$ $S_6 : B_2, B_4, B_6$

$S_7 : B_4, B_5, B_7$ $\quad$ $S_8 : B_3, B_6$

Qual é o número mínimo de semanas necessárias para que cada estudante possa tomar emprestado todos os livros que desejam?

Solução: Desenhe o grafo bipartido G com vértices $S_1, \ldots, S_8$ e $B_1, \ldots, B_7$, onde S_i se liga a B_j somente se o estudante S_i deseja tomar o livro B_j emprestado. Então G tem grau de vértice máximo $\Delta = 4$, logo, pelo teorema de König, $\chi'(G) = 4$. Então 4 cores (semanas) são suficientes. ◀

10.4 Conclusão

Nesta aula, conhecemos alguns problemas clássicos de coloração de grafos. Tratamos tanto a coloração de vértices, conhecendo métodos de determinação do polinômio cromático e de um limite superior para o número cromático; como também a coloração de arestas, focando na determinação do índice cromático de um grafo.

RESUMO

Um polinômio cromático $P_M(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i$ é tal que seu valor numérico para um determinado λ indica o número de maneiras possíveis de se colorir o mapa M com λ cores.

Para obter o polinômio cromático de um mapa podemos aplicar o princípio da inclusão-exclusão ou aplicar os teoremas a seguir:

- Se G é um grafo conexo de k vértices, então o grau do polinômio cromático é k.

- Se o grafo com n vértices é nulo (não possui arestas) então seu polinômio cromático é λ^n.

- O polinômio cromático de K_n é $\lambda^{(n)} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots[\lambda-(n-1)]$.

- Se o grafo é desconexo, constituído de duas componentes conexas, então seu polinômio cromático é igual ao produto dos polinômios cromáticos de cada componente.

- Se G_1 é subgrafo de G suprimindo-se uma aresta $(x_i, x_j$, e G_2 é obtido de G suprimindo-se a aresta (x_i, x_j) e identificando os vértices x_i e x_j, então $P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) - P_{G_2}(\lambda)$.

O número cromático $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores necessárias para se obter uma coloração. Assim, temos que: (i) $\chi(K_n) = n$ e (ii) $\chi(C_n) = 2$, se n é par; $\chi(C_n) = 3$, se n é impar.

<u>Algoritmo Guloso para Coloração de Vértices</u>: seja G um grafo.

(1) Liste os vértices de G em alguma ordem: $v_1, \ldots, v_p$.

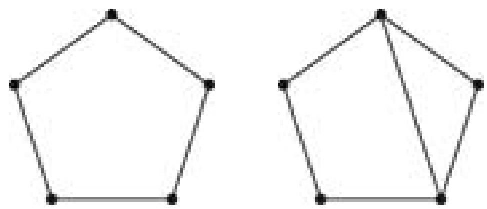
(2) Associe a cor C_1 a v_1.

(3) No estágio $i+1$, quando v_i acabou de ter uma cor associada, associe a v_{i+1} a cor C_j, onde j tão pequeno quanto possível tal que C_j ainda não tenha sido usada para colorir um vértice adjacente a v_{i+1}.

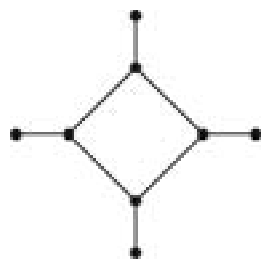
O número mínimo de cores exigida em uma coloração de arestas de G é dito índice cromático de G e denotado por $\chi'(G)$. Se n é ímpar, $\chi'(K_n) = n$; se n é par, $\chi'(K_n) = n - 1$. Se G é um grafo simples com grau de vértice máximo Δ, então $\chi'(G) = \Delta$ ou $\Delta+1$. Para todo grafo bipartido G, $\chi'(G) = \Delta$.

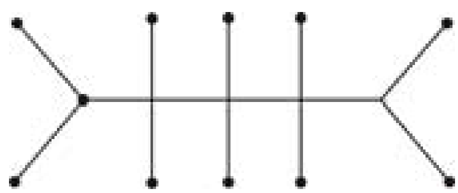
ATIVIDADES

ATIVIDADE 10.1. Determine o polinômio cromático de cada grafo usando o princípio de inclusão-exclusão.



ATIVIDADE 10.2. Determine o polinômio cromático dos seguintes grafos.





ATIVIDADE 10.3. Obtenha uma coloração do mapa do Brasil que utiliza apenas quatro cores.

ATIVIDADE 10.4. Prove que o valor absoluto do segundo coeficiente do polinômio cromático é igual ao número de arestas.

ATIVIDADE 10.5. Prove que o polinômio cromático de uma árvore com n vértices é dado por: $\lambda(\lambda - 1)^{n-1}$.

ATIVIDADE 10.6. Determine o número cromático $\chi(G)$ e o índice cromático $\chi'(G)$ dos grafos G das atividades 8.2.

ATIVIDADE 10.7. Encontre o índice cromático de cada um dos cinco grafos sólidos Platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

ATIVIDADE 10.8. Determine o número cromático do mapa dado na atividade 9.1

REFERÊNCIAS

ANDERSON, I. A First Course in Discrete Mathematics. Springer: Londres, 2001.

BARBOSA, R.M. Combinatória e Grafos. vol.2. Nobel: São Paulo, 1975.

BONDY, J.A., MURTY, U.S.R. Graph Theory with Applications. Elsevier: Nova Iorque, 1976.