Matemática

Matemática

Fernando Guerra
Inder Jeet Taneja

G934m Guerra, Fernando

Matemática / Fernando Guerra, Inder Jeet Taneja. – Florianópolis : SEAD/UFSC, 2007.

280p.

Curso de Graduação em Administração a Distância

Inclui bibliografia

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria analítica. 3. Cálculo diferencial. 4. Cálculo integral. I. Taneja, Inder Jeet. II. Título.

CDU: 51

Catalogação na publicação por: Onélia Silva Guimarães CRB-14/071

CONSELHO CIENTÍFICO

Luiz Salgado Klaes - Presidente

Liane Carli Hermes Zanella

Luis Moretto Neto

Raimundo Nonato de Oliveira Lima

ADAPTAÇÃO METODOLÓGICA PARA EAD

Denise Aparecida Bunn

PROJETO GRÁFICO

Annye Cristiny Tessaro

Mariana Lorenzetti

DIAGRAMAÇÃO

Diogo Henrique Ropelato

ORGANIZAÇÃO DE CONTEÚDO

Fernando Guerra

Inder Jeet Taneja

APRESENTAÇÃO

Este livro corresponde à disciplina de Matemática. É destinado aos estudantes que, pela primeira vez, estudam matemática envolvendo a Geometria Analítica, o Cálculo Diferencial e Integral de Funções, de uma ou várias variáveis. O material foi elaborado visando uma aprendizagem autônoma. Aborda temas especialmente selecionados, que se destinam a auxiliar na compreensão dos temas expostos e adota uma linguagem simples e clara, muitas vezes coloquial, o que facilite seu estudo a distância.

Por falar em distância, isso não significa que você estará sozinho. Não esqueça de que sua caminhada nesta disciplina será acompanhada, constantemente, pelo Sistema de Acompanhamento do Programa de EaD do Departamento de Ciências da Administração da Universidade Federal de Santa Catarina. Nossa equipe terá o maior prazer em atende-lo(a), pois sua aprendizagem é o nosso principal objetivo.

Escrevemos no total, nove unidades, divididos em quatro partes. A primeira parte está destinada ao conhecimento de Geometria Analítica e Matrizes. A segunda parte está dedicada ao Cálculo Diferencial. A terceira parte dedica-se ao Cálculo Integral. Na última parte damos conhecimento de Cálculo para Funções de várias Variáveis, incluindo Derivada Parcial e Integral Dupla. Veja a seguir os detalhes por unidade:

Na Unidade 1, abordaremos conceitos de Geometria Analítica. Inicialmente revisaremos os conjuntos numéricos, desigualdades e intervalos. Apresentaremos o Sistema de Coordenadas Cartesianas, Distância entre dois pontos, a Reta, Parábola, Elipse, Hipérbole e Seções Cônicas.

Você estudará na Unidade 2, os tipos de Matrizes, Operações com matrizes, matriz inversa, matriz escalonada e resolução de sistemas de equações lineares.

Já na Unidade 3 serão abordados: Funções e Gráficos, Funções Elementares, Exponenciais e Logarítmicas, Função Composta e Funções Trigonométricas e algumas aplicações de Funções.

Na Unidade 4 você será apresentando aos temas: Seqüências e a noção intuitiva de Limite de uma Função. Nesta, você trabalhará com teoremas sobre Limites, Limites Laterais e Funções Contínuas.

Estudaremos na Unidade 5, um dos principais conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, que é o da Derivada de uma Função, sua interpretação Geométrica, Cálculo de Derivadas, Derivada de uma Função Composta (ou regra da cadeia), Derivadas Sucessivas, a Diferencial e algumas Funções Marginais.

Na Unidade 6, apresentaremos algumas aplicações da Derivada, tais como: a Fórmula de Taylor, Regra de L'Hospital e Máximos e Mínimos de uma Função.

A Unidade 7 trata de uma outra ferramenta de grande importância no Cálculo Diferencial e Integral, que é o conceito de Integral. Será abordado o conceito de Integral Indefinida e Definida, suas propriedades e o Teorema Fundamental do Cálculo. Apresentaremos também as técnicas de integração por substituição e por partes e integrais indefinidas.

Na Unidade 8, você estudará sobre algumas aplicações da Integral Definida, tais como: Cálculo de Áreas entre duas Curvas, Volume de Sólido de Revolução e Comprimento de Arco.

Finalmente, na Unidade 9, apresentaremos algumas noções básicas de Funções de árias Variáveis, Limite e Continuidade de Funções de duas Variáveis, Derivadas Parciais, Máximos e Mínimos, e Integrais Duplas.

Desejamos a todos um bom estudo.

Fernando Guerra e Inder Jeet Taneja

Objetivos

- Fornecer elementos conceituais sobre matemática para administradores;
- Enumerar, sucintamente, conceitos de matemática aplicada ao campo da ciência da administração e suas principais características; e
- Definir, identificar e demonstrar ferramentas matemáticas como apoio em tomadas de decisões administrativas.

SUMÁRIO

UNIDADE 1 - Geometria Analítica

UNIDADE 2 - Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

UNIDADE 3 - Funções

UNIDADE 4 - Seqüências, Limite e Continuidade

UNIDADE 5 - Derivadas

UNIDADE 6 -Aplicações de Derivadas

Referências

UNIDADE

1

Geometria Analítica

Objetivo

Nesta unidade você vai recordar e aplicar conceitos sobre conjuntos numéricos e geometria analítica; e identificar e aplicar equações das curvas, tais como, da parábola, da circunferência, da elipse e da hipérbole.

Geometria Analítica

Números Reais

Faremos, nesta unidade, uma rápida apresentação dos números reais e suas propriedades, mas no sentido de recordar o que você, meu caro estudante, já aprendeu no ensino fundamental e no ensino médio.

Conjuntos Numéricos

- **Números naturais**

O conjunto $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ é denominado conjunto dos números naturais.

- **Números inteiros**

O conjunto $\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ é denominado conjunto dos números inteiros.

- **Números racionais**

São todos os números fracionários, que têm o numerador e o denominador (diferente de zero) pertencentes ao conjunto $\mathbb{Z}$. Simbolicamente

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ q \neq 0\right\}.$$

- **Números irracionais**

São os números que não são racionais, mas podem ser "encontrados na reta." Por exemplo:

$\sqrt{2} = 1{,}41421 \ldots$,
$\pi = 3{,}14159 \ldots$,
$e = 2{,}718282 \ldots$

Denotaremos por $\mathbb{Q}^c$, o conjunto dos números irracionais.

- **Números reais**

É a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, que será denotada por $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$. Como a matemática elementar envolve números reais, devemos estar familiarizados com algumas propriedades fundamentais do sistema de números reais. Observe, atentamente, cada uma dessas propriedades dadas a seguir:

P1. **Fechamento:** Se a , $b \in \mathbb{R}$, então existe um e somente um número real denotado por $a + b$, chamado soma de a e b e existe um e somente um número real, denotado por $a \times b$ chamado produto de a por b .

P2. **Comutatividade:** Se a , $b \in \mathbb{R}$ então:

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad a \times b = b \times a .$$

P3. **Associatividade:** Se a, b, $c \in \mathbb{R}$ então:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{e} \quad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c .$$

P4. **Distributividade:** Se a, b, $c \in \mathbb{R}$ então:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c .$$

P5. **Existência de elementos neutros**: Existem 0 e $1 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$a + 0 = a \quad \text{e} \quad a \times 1 = a , \forall a \in \mathbb{R} .$$

P6. **Existência de simétricos:** Todo $a \in \mathbb{R}$ tem um simétrico, denotado por $-a$, tal que:

$$a + (-a) = 0 .$$

P7. Existência de inversos: Todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tem um inverso, denotado por $\frac{1}{a}$, tal que:

$$a \times \frac{1}{a} = 1.$$

Usando as propriedades P6 e P7 podemos definir a subtração e a divisão de números reais.

P8. Subtração: Se a, $b \in \mathbb{R}$, a diferença entre a e b, denotada por $a - b$, é definida por:

$$a - b = a + (-b).$$

P9. Divisão: Se a, $b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, o quociente de a por b é definido por:

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

É importante observar que sempre que falarmos em número, sem qualquer qualificação, entenderemos tratar-se de um número real.

A reta real

O uso dos números reais para medição, tais como comprimento, área, volume, posição, tempo e velocidade, se reflete no costume bastante conveniente, de representar esses números graficamente por meio de pontos numa reta horizontal, chamada *reta real*.

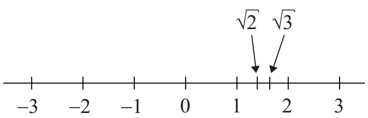

Figura 1.1

Observe que essa representação começa com a escolha de um ponto arbitrário, denominado origem ou ponto zero, e um outro ponto arbitrário a sua direita, o ponto 1. A distância entre esses pontos (distância unitária) serve como escala, por meio da qual é possível associar pontos da reta a números inteiros positivos ou negativos, como ilustrado na figura 1.1. Todos os números positivos estão à direta do Zero, no "sentido positivo", e todos os números negativos estão à sua esquerda.

Desigualdades

A sucessão de pontos na reta real, da esquerda para a direita, corresponde a uma parte importante da álgebra dos números reais, a que trata das desigualdades.

O significado geométrico da desigualdade $a < b$ (leia-se "a menor que b") é simplesmente que a está à esquerda de b; a desigualdade equivalente $b > a$ (leia-se "b maior que a") significa que b está à direta de a. Um número a é positivo ou negativo conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Se você quer dizer que a é positivo ou igual a zero, escreve-se $a \geq 0$ e lê-se "a maior ou igual a zero". Do mesmo modo, $a \geq b$ significa que $a > b$ ou $a = b$. Assim, $5 \geq 3$ e $5 \geq 5$ são desigualdades verdadeiras.

Assim como o conjunto dos Números Reais, as Desigualdades também apresentam propriedades fundamentais, dadas a seguir.

- **Propriedades das desigualdades**

Para quaisquer números reais *a, b, c* e *d*, valem as propriedades:

P1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, para qualquer real c. Por exemplo, $3 < 5 \Rightarrow 3 + 4 < 5 + 4$.

P2. $a < b$ e $c < d \Rightarrow a + c < b + d$. Por exemplo, $6 < 8$ e $5 < 7$ $\Rightarrow$ $6 + 5 < 8 + 7$.

P3. $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$. Por exemplo, $5 < 9$ e $9 < 11$ $\Rightarrow 5 < 11$.

P4. $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow a \times c < b \times c$. Por exemplo, $4 < 6$ e $3 > 0$ $\Rightarrow$ $4 \times 3 < 6 \times 3$.

P5. $a < b$ e $c < 0 \Rightarrow a \times c > b \times c$. Por exemplo, $4 < 6$ e $-3 < 0$ $\Rightarrow$ $4 \times (-3) > 6 \times (-3)$.

P6. $0 < a < b$ e $0 < c < d \Rightarrow a \times c < b \times d$. Por exemplo, $0 < 4 < 7$ e $0 < 5 < 8$ $\Rightarrow 4 \times 5 < 7 \times 8$.

Módulo ou valor absoluto

Dado um número real a, o módulo ou valor absoluto é definido por:

$$\left| a \right| = \begin{cases} a, & \text{se } a > 0 \\ 0, & \text{se } a = 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Por exemplo,

(i) $\left| 4 \right| = 4$;

(ii) $\left| -\frac{3}{4} \right| = -(-\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$;

(iii) $\left| -4 \right| = -(-4) = 4$;

(iv) $\left| 0 \right| = 0$;

(v) $\left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}$.

Podemos observar que

(a) para qualquer número real a *tem-se*

$$\left| a \right| \geq 0 \text{ e } \left| a \right| = 0 \Leftrightarrow a = 0;$$

(b) $\left| -a \right| = \left| a \right|$ *para qualquer real* a;

(c) geometricamente, o valor absoluto de um número real a, *é distância de* a *até zero;*

(d) para qualquer número real a *tem-se:* $\sqrt{a^2} = \left| a \right|$, *a raiz quadrada de qualquer número real, quando existe, é maior ou igual a zero. Logo,* $\left| a \right|^2 = a^2 = (-a)^2$.

- **Propriedades do Valor Absoluto**

Valem as seguintes propriedades do valor absoluto:

P1. $|x| \geq a$ se e somente se, $x \leq -a$ ou $x \geq a$;

P2. $|x| > a$ se e somente se, $x < -a$ ou $x > a$;

P3. $|x| \leq a$ se e somente se, $-a \leq x \leq a$ $(a > 0)$;

P4. $|x| < a$ se e somente se, $-a < x < a$, $(a > 0)$;

P5. $|x \times y| = |x| \times |y|$ para quaisquer x e $y \in \mathbb{R}$;

P6. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, para x e $y \in \mathbb{R}$, $(y \neq 0)$.

P7. Para quaisquer x e $y \in \mathbb{R}$ vale a desigualdade triangular: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Intervalos

Um conjunto I de números reais é denominado *intervalo* quando, dados $a, b \in I$ com $a < b$, valer a implicação $a < x < b \Rightarrow x \in I$. Os intervalos podem ser limitados ou ilimitados.

- **Intervalos limitados**

(i) Fechado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

(ii) Aberto: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

(iii) Semi-abertos: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ e

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

- **Intervalos ilimitados**

(i) Fechados: $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ e

$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

(ii) Abertos: $(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}$ e

$$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid x<b\}$$

(iii) Aberto e fechado: $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Veja a representação de intervalos na reta real:

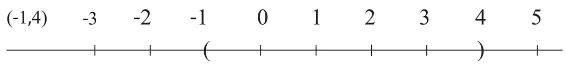

Figura 1.2

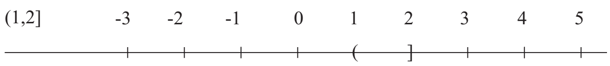

Figura 1.3

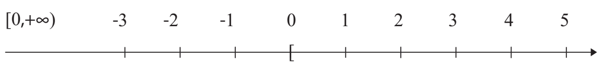

Figura 1.4

Resolver uma desigualdade consiste em determinar o conjunto dos números reais que tornam verdadeira a desigualdade proposta. Para isto, você usa as propriedades das desigualdades (e do módulo quando este estiver envolvido).

A partir de agora você irá acompanhar a resolução de alguns exercícios. Nosso intuito é que você compreenda a resolução de exercícios sobre desigualdades, e potencialize seu entendimento para os exercícios e/ou desafios propostos posteriormente.

Exemplo 1.1 *Resolver a desigualdade* $|x+4|\le 7$.

Resolução: Pela propriedade P3, do módulo, temos:

$-7\le x+4\le 7$, ou seja,

$$\begin{array}{lcl} -7\le x+4 & \text{e} & x+4\le 7 \\ -7-4\le x & \text{e} & x\le 7-4 \\ -11\le x & \text{e} & x\le 3. \end{array}$$

Portanto, $-11\le x\le 3$ ou ainda $[-11,3]$.

Exemplo 1.2 *Resolver a desigualdade* $|x-5|\ge 8$.

Resolução: Pela propriedade P1, do módulo, temos

$x-5 \le -8$ ou $x-5 \ge 8$

$x \le -8+5$ ou $x \ge 8+5$

$x \le -3$ ou $x \ge 13$.

Portanto, $x \le -3$ ou $x \ge 13$.

Exemplo 1.3 *Resolver a desigualdade* $|5-x| \le 9$.

Resolução: Pela propriedade P3, do módulo, temos

$-9 \le 5-x \le 9$, ou seja,

$-9 \le 5-x$ e $5-x \le 9$

$-9-5 \le -x$ e $-x \le 9-5$

$-14 \le -x$ e $-x \le 4$.

Agora, pela propriedade P5, da desigualdade, vem

$14 \ge x$ ou $x \le 14$ e $x \ge -4$ ou $-4 \le x$.

Portanto, $-4 \le x \le 14$ ou seja, $x \in [-4,14]$.

Exemplo 1.4 *Resolver a desigualdade* $7 \le 5x-3 < 17$.

Resolução: Resolvendo simultaneamente, vem:

$7 \le 5x-3 < 17$ ou $7+3 \le 5x-3+3 < 17+3$

(P1 da desigualdade)

$10 \le 5x < 20$, ou seja, $2 \le x < 4$.

O conjunto solução, *S*, da desigualdade proposta é

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x < 4\} = [2,4)$.

Exemplo 1.5 *Determine todos os números reais que satisfazem a equação* $|3x-5| = 4$.

Para resolver este exemplo, use os seguintes passos.

Passo 1: Pela definição de módulo você tem:

$$|3x-5| = 3x-5 \quad \text{se} \quad 3x-5 \geq 0 \text{ ou } 3x \geq 5 \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{5}{3}.$$

Admita então $x \geq \frac{5}{3}$ neste passo. Logo, $|3x-5| = 4 \Leftrightarrow$ $3x-5=4$ que resolvendo tem-se $x = 3$.

Como neste passo $x \geq \frac{5}{3}$, $x = 3$ é uma solução da equação dada.

Passo 2: Ainda pela definição de módulo, vem:

$$|3x-5| = -(3x-5) = -3x+5 \text{ se } 3x-5<0 \text{ ou } x < \frac{5}{3}.$$

Logo, $|3x-5| = 4 \Leftrightarrow -3x+5=4$ que resolvendo tem-se $x = \frac{1}{3}$.

Como $\frac{1}{3} < \frac{5}{3}$, $x = \frac{1}{3}$ é também, solução da equação dada.

Portanto, o conjunto solução de $|3x-5| = 4$ é $S = \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$.

Vamos conferir se você está acompanhando tudo até aqui! Para saber, procure, então, resolver os exercícios propostos a seguir, caso tenha dúvidas faça uma releitura cuidadosa dos conceitos ou resultados ainda não bem entendidos.

Exercícios propostos - 1

1) Determinar todos os números reais que satisfazem as desigualdades abaixo.

a) $|x| \geq 3$.

b) $\left|5x - \frac{1}{3}\right| < 2$.

c) $|3x-2| < 0$.

d) $|3-x| \geq 7$.

2) Determinar todos os números reais que satisfazem a equação: $|4x - 3| = 15$.

GLOSSÁRIO

Geometria analítica, também chamada **geometria de coordenadas** é o estudo da geometria através dos princípios da álgebra. Em geral, é usado o sistema de coordenadas cartesianas para manipular equações para planos, retas, curvas e círculos, geralmente em duas dimensões, também em três ou mais dimensões. **Fonte**: http://pt.wikipedia.org/wiki

O sistema de coordenadas cartesianas

O sistema de coordenadas cartesianas é constituído de duas retas perpendiculares ao plano. Uma é escolhida como sendo horizontal e a outra como vertical. Essas retas interceptam num ponto 0, chamado de origem. A reta horizontal é chamada eixo x, e a reta vertical é chamada eixo y. Uma escala numérica é colocada ao longo dos eixos x e y. Um ponto no plano pode ser representado de modo único no sistema de coordenadas por um par ordenado (x, y), onde x é o primeiro número e y é o segundo.

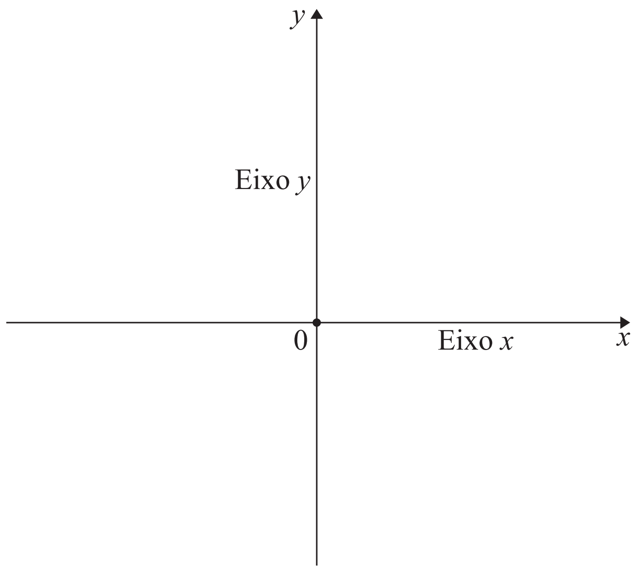

Figura 1.5 - O sistema de coordenadas cartesianas.

O primeiro número é representado no eixo x e o segundo no eixo y. No par ordenado (*x*, *y*), o x é chamado de **abscissa** ou coordenada x, o y é chamado de **ordenada** ou coordenada de y, x e y conjuntamente são chamados de coordenadas do ponto P. Veja os gráficos a seguir:

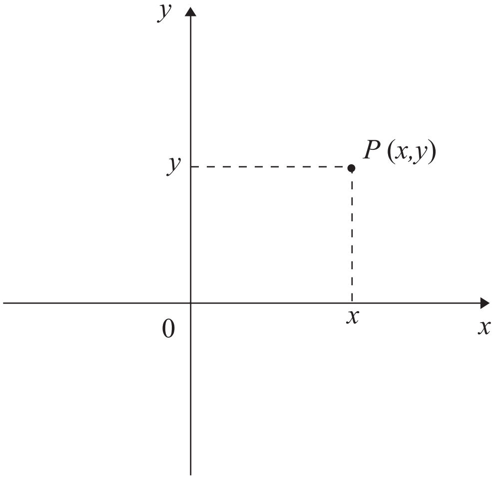

Figura 1.6 - Um par ordenado (x, y).

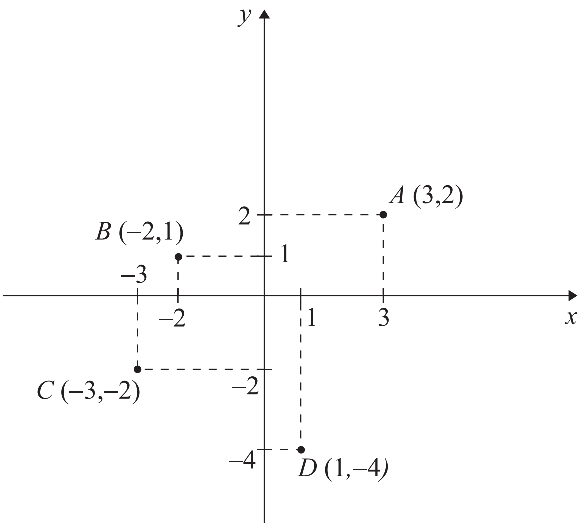

Figura 1.7 – Vários pontos do plano cartesiano.

Distância entre dois pontos

Definido um sistema de eixos coordenados, cada ponto do plano está associado a um par ordenado. Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Então, a distância entre esses dois pontos pode ser calculada mediante o uso da seguinte fórmula:

A distância d entre dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ no plano é dada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

Veja a figura abaixo:

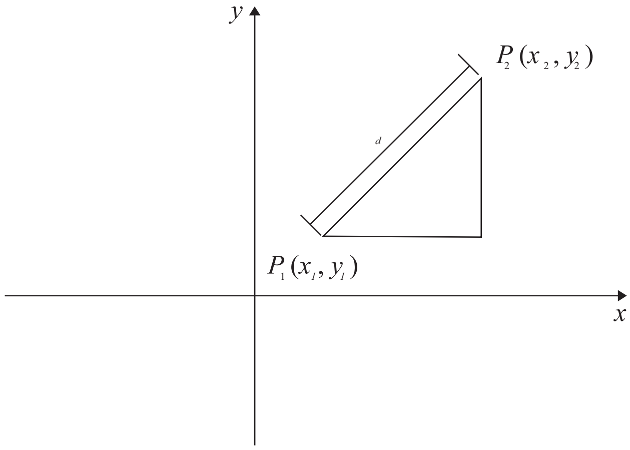

Figura 1.8

Exemplo 1.6 *Encontre a distância entre os pontos* $P_1(-3,4)$ *e* $P_2(2,-5)$.

Resolução: Temos
$x_1 = -3$, $y_1 = 4$, $x_2 = 2$ e $y_2 = -5$.

Pela fórmula (1), temos:

$$
\begin{aligned}
d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= \sqrt{(2-(-3))^2 + ((-5)-4)^2} \\
&= \sqrt{(5)^2 + (-9)^2} \\
&= \sqrt{25+81} \\
&= \sqrt{106}
\end{aligned}
$$

A reta

Já vimos anteriormente que a reta é o conjunto de pontos que seguem a mesma direção, ou seja, numa linha conhecida como reta. Veja como encontrar agora a equação da reta.

Vamos considerar uma reta que faça um ângulo α (radianos) com o eixo x (abscissa) e que passa pelo ponto $P_0\left(x_0, y_0\right)$. Denotamos por $m = \text{tg}\alpha$, que é conhecida como *inclinação da reta*. Seja $\left(x, y\right)$ qualquer ponto da reta (Figura 1.9). Aplicando, a trigonometria, podemos facilmente obter:

$$
\begin{aligned}
m = \frac{y - y_0}{x - x_0} &\Rightarrow y = y_0 + m\left(x - x_0\right) \\
&\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \\
&\Rightarrow y = y_0 + m(x - x_0) \\
&\Rightarrow y = mx + \left(y_0 - mx_0\right).
\end{aligned}
$$

Portanto, a equação da reta que passa pelo pontos $P_0\left(x_0, y_0\right)$ e tem inclinação m é dada por:

$$m = \text{tg}\,\alpha = \frac{PA}{P_0A} = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

ou seja,

$$y = mx + b, \tag{2}$$

onde $m = \text{tg}\alpha$ e $b = -mx_0 + y_0$ é uma constante.

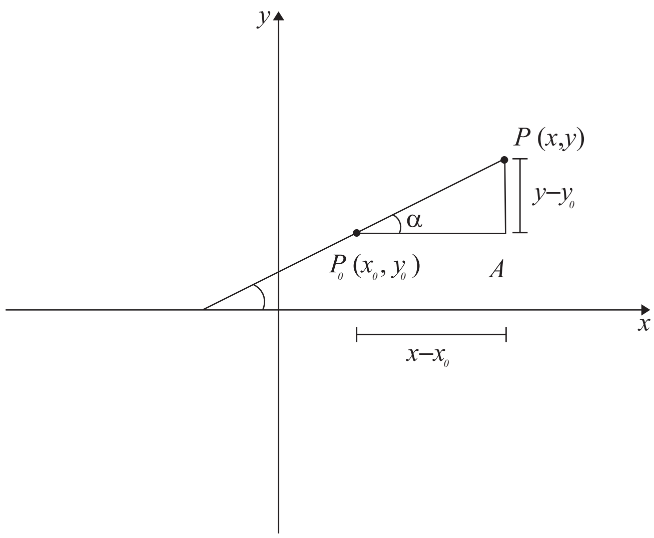

Figura 1.9

Exemplo 1.7 *Calcular a equação da reta que passa pelo ponto* $(2,1)$ *e tem inclinação* $m = 2$.

Resolução: É dado que $m = 2$ e $P_0\left(x_0, y_0\right) = \left(2,1\right)$. Substituindo esses valores na equação (2), obteremos:

$$1 = 2 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -3.$$

Logo, a equação da reta é:

$$y = 2x - 3.$$

Equação da reta que passa por dois pontos

Sejam $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ dois pontos de uma reta dada. A seguir obtemos a equação de uma reta que passa por esses pontos.

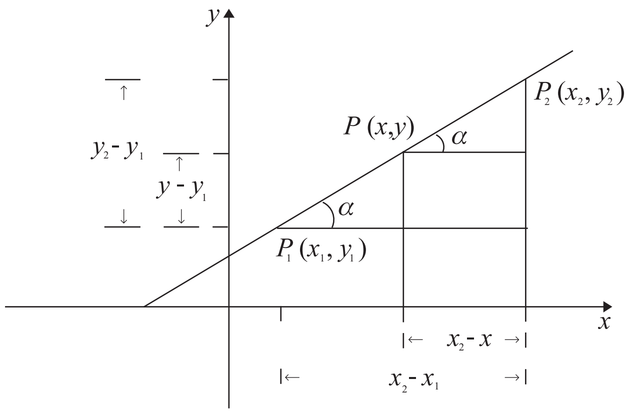

Figura 1.10

Da figura 1.10, obtemos:

$$m = tg\alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad (3)$$

Agora simplificando a expressão $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, obtemos

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1) \qquad (4)$$

que representa a equação da reta que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$.

Observação

(i) Pela expressão (3) *podemos observar que:*

$$m = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right),$$

ou seja, podemos sempre obter o valor da inclinação ou declividade através dos pontos dados.

(ii) Sejam m_1 *e* m_2 *declividade de duas retas, então:*

(a) As retas são paralelas quando $m_1 = m_2$.

(b) As retas são perpendiculares quando $m_1 \cdot m_2 = -1$.

(iii) A equação geral da reta é da forma

$$ax + by + c = 0,$$

onde a, b *e* c *são constantes e* a *e* b *são não nulos. Entre a e b, pelo menos um dos dois deve ser não nulo*

(iv) A equação de uma reta é uma equação linear, reciprocamente, toda equação linear representa uma reta.

Exemplo 1.8 *Determine a equação da reta que passa pelos pontos* $(1,2)$ *e* $(3,-4)$. *Encontre também a inclinação da reta.*

Resolução: Pela fórmula (4), temos:

$$y - 2 = \frac{-4-2}{3-1}(x-1)$$
$$\Rightarrow y - 2 = \frac{-6}{2}(x-1)$$
$$\Rightarrow y - 2 = -3(x-1)$$
$$\Rightarrow y = -3x + 3 + 2$$
$$\Rightarrow y = -3x + 5.$$

A inclinação é obtida pela fórmula (3), ou seja

$$m = tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-2}{3-1} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Ângulo entre duas retas

Sejam $L_1 : y = m_1 x + b_1$ e $L_2 : y = m_2 x + b_2$ duas retas dadas.

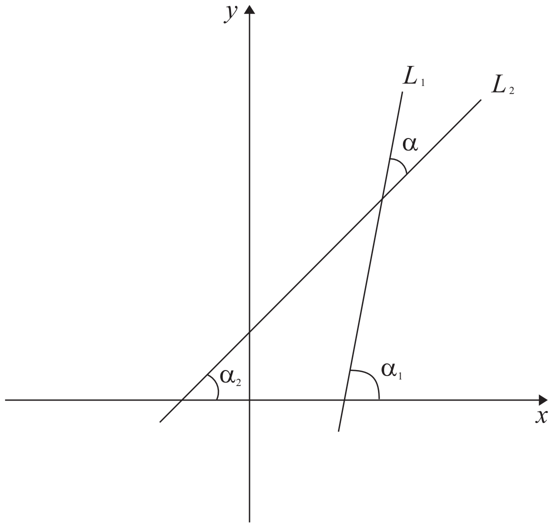

Figura 1.11

Seja α o ângulo formado entre duas retas L_1 e L_2. Então,

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)$$
$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} \qquad \text{(pela trigonometria)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}, \quad m_1 m_2 \neq -1. \tag{5}$$

Logo, o ângulo entre duas retas L_1 e L_2 é dado por

$$m = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}, \qquad m_1 m_2 \neq -1.$$

Observação *Já explicamos anteriormente que, quando $m_1 m_2 = -1$, então as duas retas são perpendiculares.*

Exemplo 1.9 *Determine o ângulo entre as retas $y = 2x - 3$ e $y = -3x + 4$.*

Resolução: Sabemos que $m_1 = 2$ e $m_2 = -3$. Logo, o ângulo é dado por:

$$m = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{2-(-3)}{1+(2)(-3)} = \frac{5}{1-6} = \frac{5}{-5} = -1.$$

$$\Rightarrow m = \operatorname{tg}\alpha = -1.$$

Exemplo 1.10 *Calcular a equação da reta que seja ortogonal (perpendicular) à reta* $y = -3x + 2$ *e que passa pelo ponto* $(2,-4)$.

Resolução: Sabemos que se duas retas são perpendiculares então $m_1 m_2 = -1$.

É dado que:

$$m_1 = -3 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{(-3)} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{3}.$$

Aplicando a fórmula (2), temos

$$y = mx + b \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + b.$$

Como a reta $y = \frac{1}{3}x + b$ passa pelo ponto $(2,-4)$, então:

$$-4 = \frac{1}{3}(2) + b \Rightarrow -4 - \frac{2}{3} = b \Rightarrow b = \frac{-14}{3}.$$

Logo, a equação da reta é:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{14}{3} \Rightarrow 3y = x - 14.$$

Distância de um ponto a uma reta

Dada a reta $y = mx + b$ e o ponto $P_0(x_0, y_0)$ que não passa pela reta. Precisamos encontrar a distância do ponto $P_0(x_0, y_0)$ à reta $y = mx + b$. Veja figura 1.12.

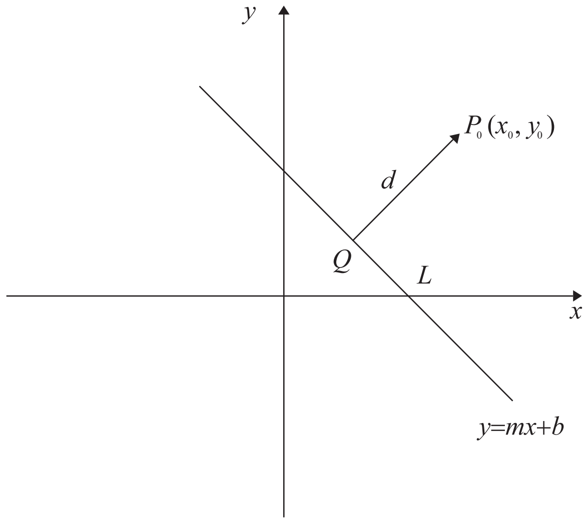

Figura 1.12

A distância do ponto $P_0(x_0, y_0)$ até à reta L, é dada por

$$d(P_0, L) = \frac{|y_0 - m x_0 - b|}{\sqrt{1+m^2}}. \qquad (6)$$

Exemplo 1.11 *Calcular a distância do ponto* $P(3, -2)$ *a reta* $y = -4x + 1$.

Resolução: Temos que $m = -4$, $x_0 = 3$ e $y_0 = -2$.
Logo,

$$d(P, L) = \frac{|-2-(-4)3-1|}{\sqrt{1+(-4)^2}} = \frac{|-2+12-1|}{\sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{17}}.$$

Interseção entre duas retas

Sejam $L_1 : y = m_1 x + b_1$ e $L_2 : y = m_2 x + b_2$ duas retas com $m_1 \neq m_2$. Vamos supor que estas retas interceptam-se no ponto Q.

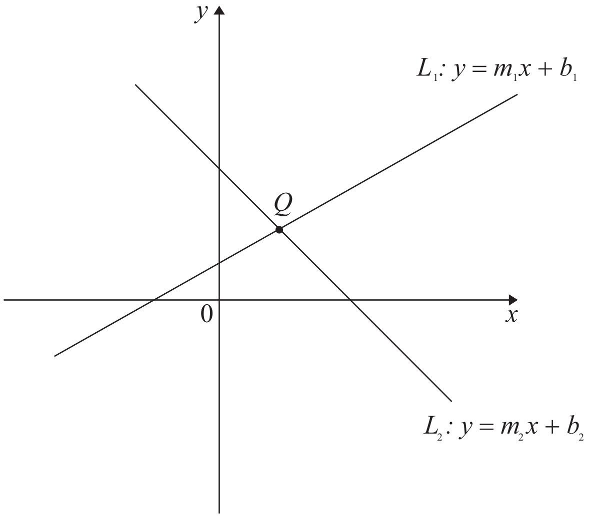

Figura 1.13

Para encontrar as coordenadas do ponto Q, simplesmente precisamos resolver as equações:

$$\begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ y = m_2 x + b_2. \end{cases}$$

Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 1.12 *Encontrar os pontos de interseção das retas*

$$\begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = 2x - 1. \end{cases}$$

Resolução: Veja o gráfico abaixo:

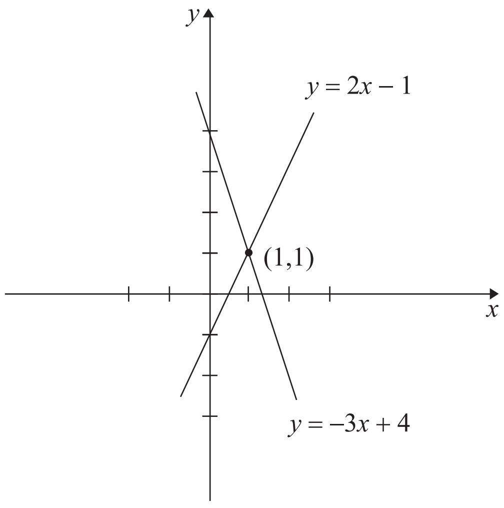

Figura 1.14

Resolvendo as equações dadas obteremos

$$-3x + 4 = 2x - 1$$
$$\Rightarrow -5x = -5$$
$$\Rightarrow x = 1.$$

Agora,

$$y = 2x - 1 \Rightarrow y = 2(1) - 1 \Rightarrow y = 1.$$

Logo, o ponto de interseção é dado por (1,1).

Exercícios propostos – 2

1) Determine a equação da reta usando os seguintes dados:
   a) que passa pelo ponto $(2,1)$ e tem inclinação de –2.
   b) que passa pelo ponto $(3,-2)$ e tem inclinação de 3.
   c) que passa pelos pontos $(3,4)$ e $(2,-3)$.
   d) que passa pelos pontos $(-2,3)$ e $(1,5)$.

2) Encontre a distância entre ponto e reta:
   a) $y = 4x - 3$; ponto $(2,-3)$.
   b) $y = 2x + 5$; ponto $(4,-2)$.
   c) $y - 2x + 1 = 0$; ponto $(2,4)$.

3) Encontre a inclinação das seguintes retas:
   a) $2y + 4x + 3 = 0$.
   b) $4x - 3y + 2 = 0$.

4) Calcule o ângulo entre as duas retas:
   a) $y = 4x + 3$ e $y = 3x$.
   b) $y = -2x + 1$ e $y = x + 3$.

5) Encontre os pontos de interseção das seguintes retas:
   a) $2x - 3y + 1 = 0$ e $y = 3x + 5$.
   b) $3x - 2y - 3 = 0$ e $4x - 2y + 1 = 0$.

Parábola

Parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano, eqüi-distantes de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano.

Consideremos uma reta L e um ponto F não pertencente a reta L. Qualquer ponto P pertencente à parábola, se e somente se

$$d(P,F) = d(P,P'),$$

onde P' é o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta L.

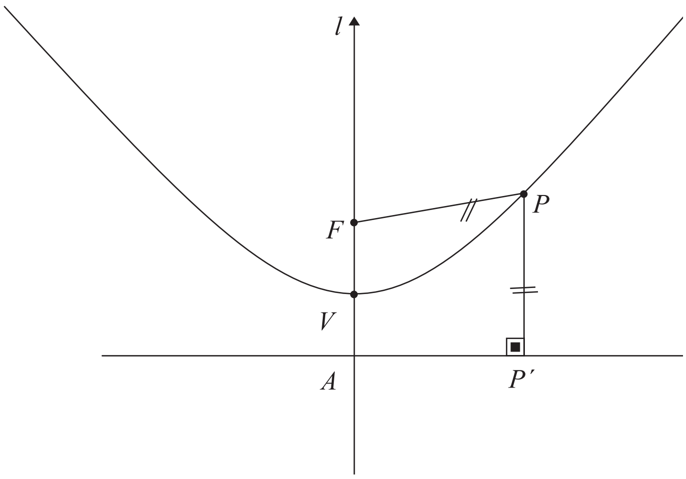

Figura 1.15

- **Elementos da Parábola**

Conforme a figura 1.15, temos os seguintes elementos da parábola:

Foco: é o ponto F.

Diretriz: é a reta L.

Eixo: é a reta que passa por F e é perpendicular a L. É fácil ver, pela própria definição de parábola, que esta curva é simétrica em relação ao seu eixo.

Vértice: é o ponto V de interseção da parábola com o seu eixo.

Equação reduzida da parábola

Seja F o foco e $L = NM$ a diretriz da parábola. Traçar FN perpendicular de F sobre a diretriz. Considere FN, o eixo da parábola como sendo eixo x. Seja V o ponto médio de NF. Como $NV = VF$, pela definição V pertence a parábola. Considere V como origem e a linha VY perpendicular a NF como sendo eixo de y.

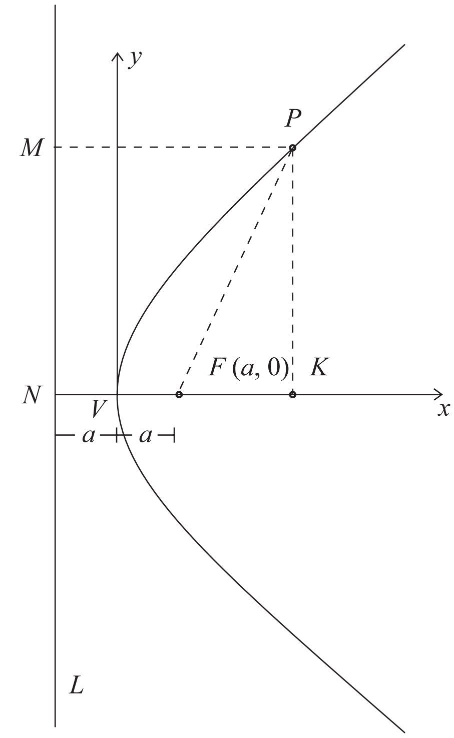

Figura 1.16

Seja $NF = 2a$, logo $VF = a$ e $F = (a, 0)$, e a equação de diretriz NM é $x = -a$.

Seja $P(x, y)$ um ponto de parábola. Então

$$PM = NK = NV + VK = a + x.$$

Pela definição,

$$MP = PF$$
$$\Rightarrow MP^2 = PF^2 = FK^2 + PK^2$$
$$\Rightarrow (a + x)^2 = (x - a)^2 + (y - 0)^2$$
$$\Rightarrow a^2 + x^2 + 2ax = x^2 + a^2 - 2ax + y^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4ax$$

Logo, $y^2 = 4ax$ é a equação da parábola, onde

- (0,0) é **vértice** e $(a,0)$ é o foco da parábola;
- $x = -a$ é a **equação da diretriz** da parábola;
- o eixo dos x sendo **eixo da parábola**.

Quando o eixo da parábola é o eixo dos y, temos a seguinte figura:

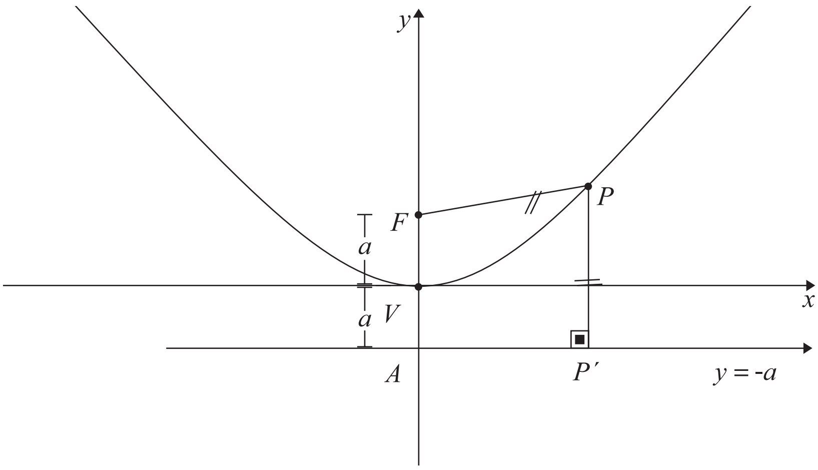

Figura 1.17

Sendo $P(x,y)$ um ponto qualquer da parábola de foco $F(0,a)$ e diretriz $y = -a$ obteremos, de forma análoga ao caso anterior, a equação reduzida da parábola

$$x^2 = 4ay\,.$$

Observação

(i) O número real $a \neq 0$ *nas equações reduzidas da parábola é chamado parâmetro da parábola.*

(ii) Da equação $y^2 = 4ax$ *podemos observar que* $a\,x \geq 0$*, o parâmetro* a *e* x *abscissa de* P *tem sinais iguais (* $a\,x = 0$ *se* $x = 0$ *) e conseqüentemente, se* $a > 0$ *a parábola tem abertura ao lado direito e se* $a < 0$ *a parábola tem abertura ao lado esquerdo. Veja as figuras abaixo.*

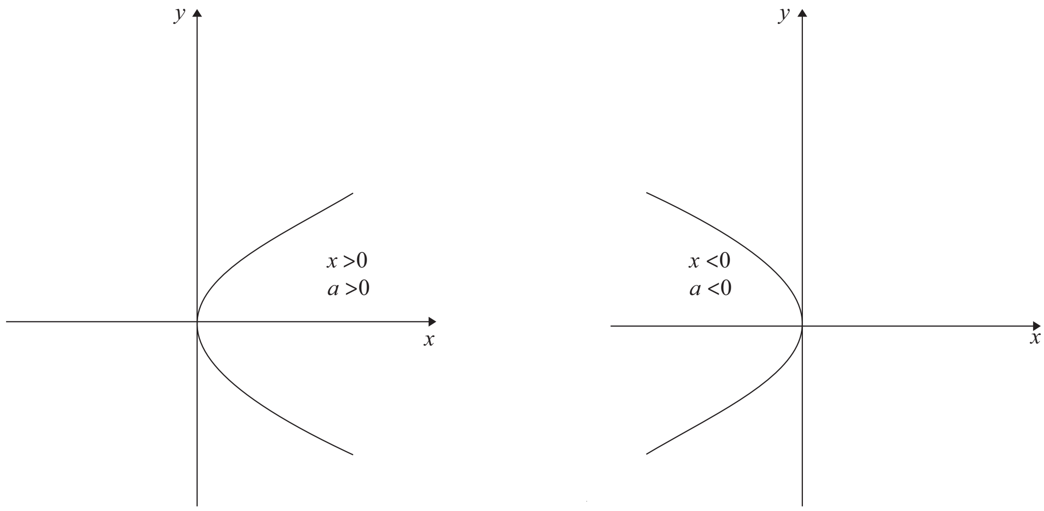

Figura 1.18: Gráficos da parábola quando $y^2 = 4ax$.

(iii) O gráfico da equação $x^2 = 4ay$ *é simétrico em relação ao eixo dos* y*, pois substituindo* x *por* $-x$ *a equação não se altera, isto é, se o ponto* (x, y) *pertence ao gráfico, o ponto* $(-x, y)$ *também pertence. Da análise do gráfico* $x^2 = 4ay$ *concluímos que se* $a > 0$*, a parábola tem abertura para cima e se* $a < 0$ *a parábola tem abertura para baixo. Veja a figura a seguir:*

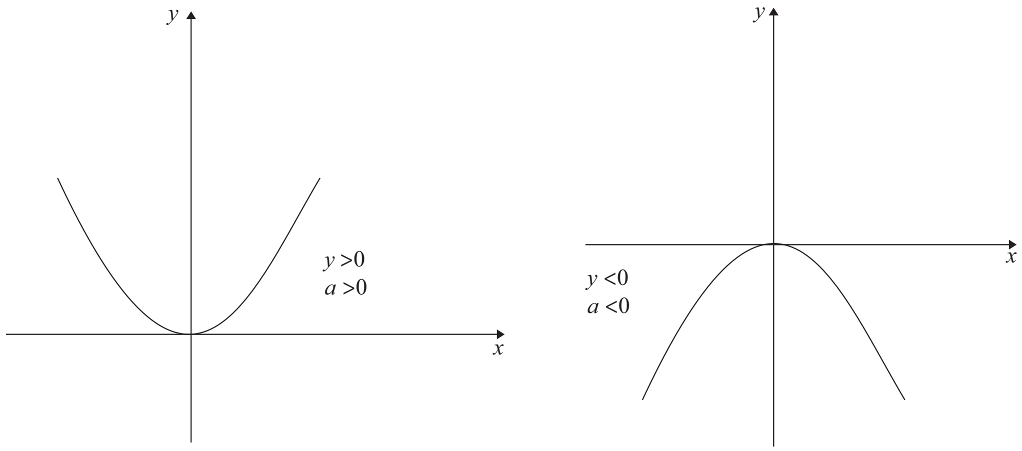

Figura 1.19: Gráficos da parábola quando $x^2 = 4ay$.

Observação *Quando V = (0,0), dizemos que a parábola está na posição padrão. Nesse caso a equação da parábola é conhecida como* ***equação reduzida***.

Equação geral da parábola

Supondo que $V = (x_0, y_0) \neq (0,0)$, temos dois casos a ser analisadas.

1º Caso: *Quando o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos* x.

Neste caso a equação da parábola padrão é dada por

$$(y - y_0)^2 = 4a(x - x_0).$$

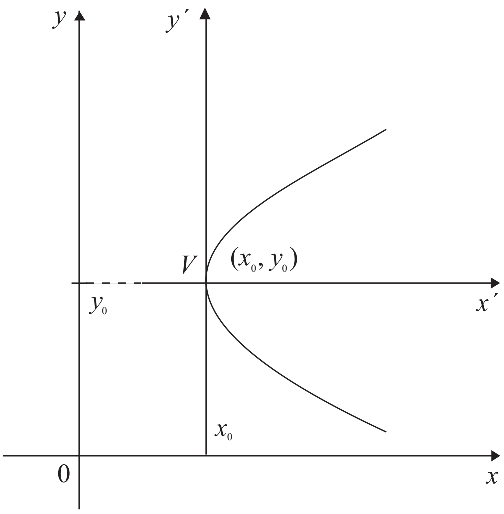

Figura 1.20

Simplificando a equação $(y - y_0)^2 = 4a(x - x_0)$, obtemos

$$y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = 4ax - 4ax_0$$

$$\Rightarrow y^2 + 4ax + (-2y_0)y + (y_0^2 + 4ax_0) = 0$$

Ajustando os coeficientes, podemos escrever a equação, acima de uma forma simplificada,

$$y^2 + bx + cy + d = 0,$$

que é ***a equação geral da parábola***

Observação *A equação geral da parábola também pode ser escrita numa forma implícita, dada por*

$$x = py^2 + qy + r, \quad p \neq 0$$

2º Caso: *Quando o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y*

Neste caso a equação da parábola padrão é dada por

$$(x - x_0)^2 = 4a(y - y_0).$$

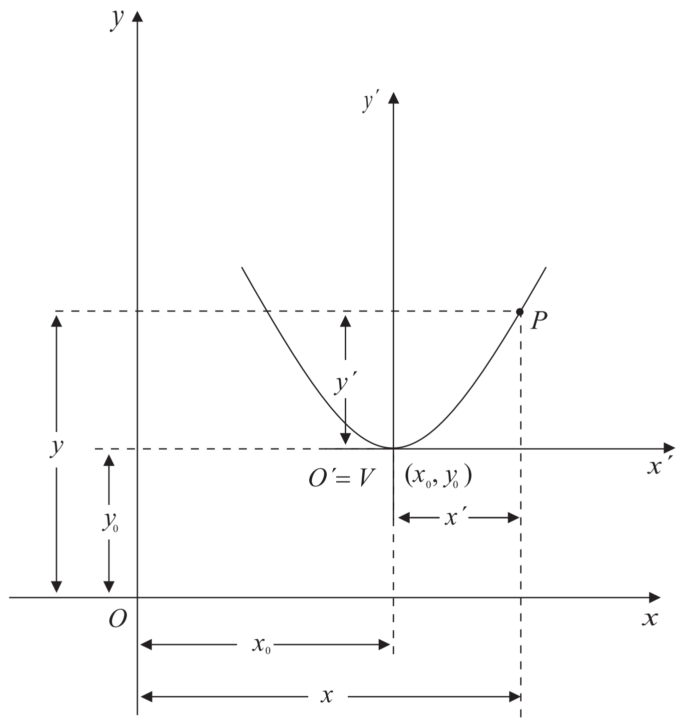

Figura 1.21

Analogamente, simplificando a equação $(x - x_0)^2 = 4a(y - y_0)$, e ajustando os coeficientes, podemos escrever a ***equação geral da parábola***

$$x^2 + bx + cy + d = 0.$$

Observação *Neste caso, a forma implícita da equação geral da parábola é dada por*

$$y = px^2 + qx + r, \quad p \neq 0$$

Exemplo 1.13 *Determinar a equação da parábola de vértice* $V(2,-1)$, *sabendo que* $y - 2 = 0$ *é a equação da sua diretriz.*

Resolução: Sabemos que a equação da parábola é dada por

$$(x - x_0)^2 = 4a(y - y_0).$$

Neste caso temos $(x_0, y_0) = (2, -1)$ e $a = -3$. A diretriz é acima do vértice da parábola. Veja o gráfico abaixo:

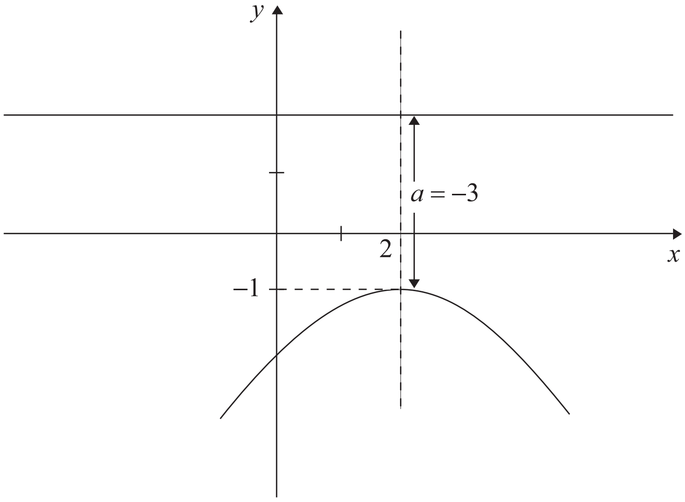

Figura 1.22

Logo, a equação da parábola é dada por

$$
\begin{aligned}
& (x-2)^2 = -4 \cdot 3(y+1) \\
\Rightarrow \quad & x^2 - 4x + 4 = -12y - 12 \\
\Rightarrow \quad & x^2 + 12y - 4x + 16 = 0.
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.14 *Determinar a equação da parábola de foco* $F(-1,1)$ *e* $x = 3$ *a equação da diretriz.*

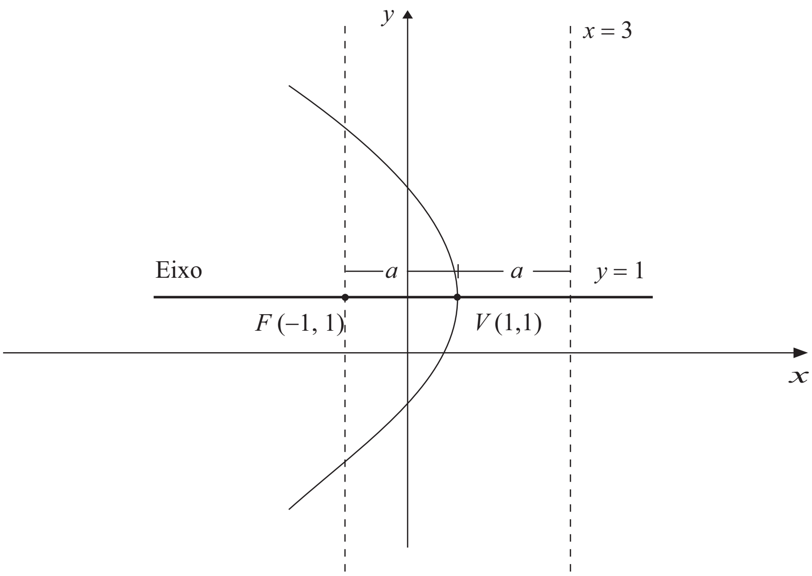

Figura 1.23

Resolução: Dado foco $F(-1,1)$ e diretriz $x = 3$, podemos encontrar o vértice, que é $V\left(x_0, y_0\right) = \left(1,1\right)$. Logo, a equação da parábola é dada por

$$
\begin{aligned}
& (y - y_0)^2 = 4a(x - x_0), \quad (a < 0) \\
\Rightarrow \quad & (y - 1)^2 = 4(-2)(x - 1) \\
\Rightarrow \quad & y^2 - 2y + 1 = -8x + 8 \\
\Rightarrow \quad & y^2 + 8x - 2y - 7 = 0
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.15 *Estabelecer a equação da parábola sabendo que vértice $V\left(2,1\right)$ é eixo paralelo ao eixo dos x, passando pelo ponto $P\left(-1,-2\right)$.*

Resolução: Veja o gráfico abaixo:

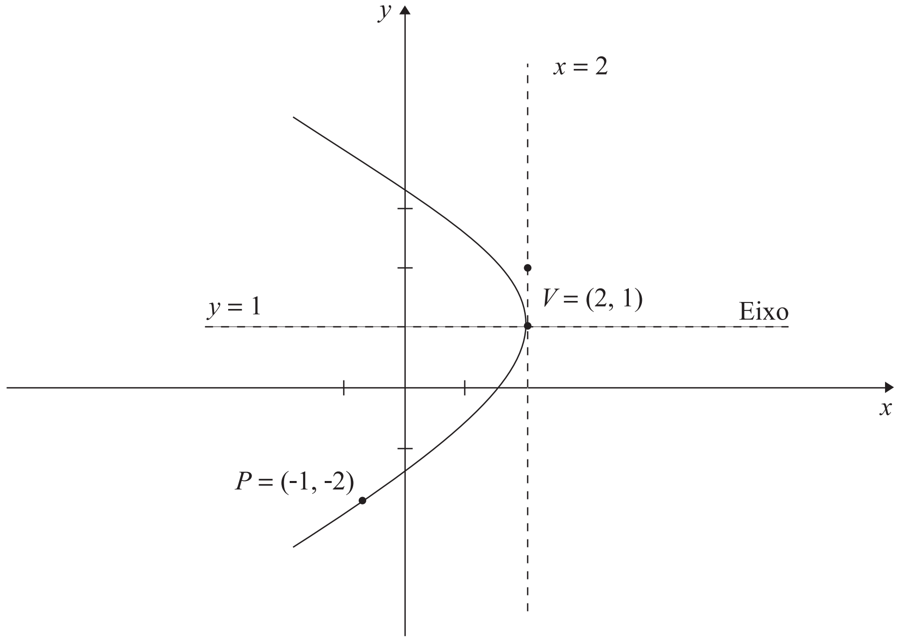

Figura 1.24

Como o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x, então a equação é dada por

$$
\begin{aligned}
& (y - y_0)^2 = 4a(x - x_0), \quad (a < 0) \\
\Rightarrow \quad & (y - 1)^2 = 4a\,(x - 1)
\end{aligned}
$$

Como a parábola passa pelo ponto $P\left(-1,-2\right)$, então

$$(-2-1)^2 = 4a(-1-2), \quad (a<0)$$
$$\Rightarrow \quad 9 = 4a(-3)$$
$$\Rightarrow \quad a = -\frac{3}{4}.$$

Logo, a equação é dada por

$$(y-1)^2 = 4\left(\frac{-3}{4}\right)(x-2)$$
$$\Rightarrow \quad y^2 - 2y + 1 = -3x + 6$$
$$\Rightarrow \quad y^2 + 3x - 2y - 5 = 0.$$

Exemplo 1.16 *Determinar o vértice, um esboço do gráfico, o foco e a equação da diretriz da parábola* $y^2 + 4y - 2x + 2 = 0$.

Resolução: É dado que

$$y^2 + 4y - 2x + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad y^2 + 4y + 4 - 4 - 2x + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (y+2)^2 - 2 - 2x = 0$$
$$\Rightarrow \quad (y+2)^2 = 2(x+1)$$
$$\Rightarrow \quad (y+2)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)(x+1).$$

Vértice $= V(-1,-2)$, $a = \frac{1}{2}$, foco $= F\left(-\frac{1}{2},-3\right)$ e diretriz $x = -\frac{3}{2}$.

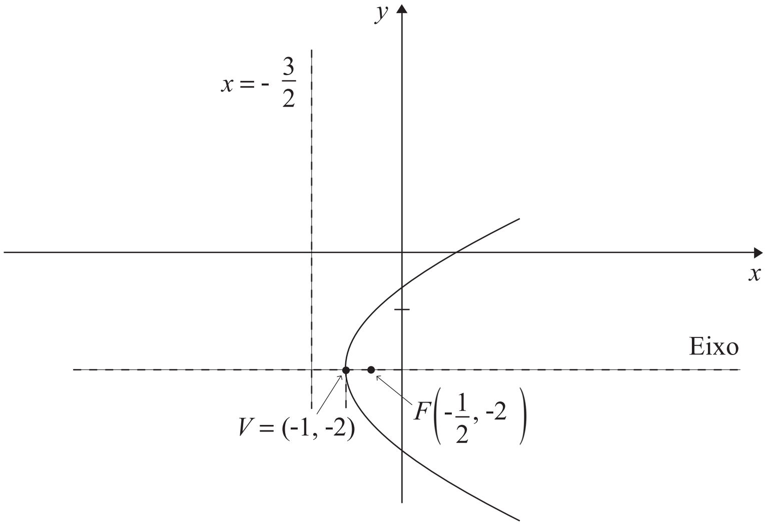

Figura 1.25

Exercícios propostos – 3

1) Para cada uma das parábolas, construir o gráfico e encontrar o foco e uma equação da diretriz:

a) $x^2 = 4y$

b) $x^2 - 8y = 0$

c) $y^2 = -8x$

d) $y^2 = x$

2) Traçar um esboço do gráfico e obter uma equação da parábola que satisfaça as condições:

a) Vértice $V(0,0)$; diretriz $y = -1$.

b) Vértice $V(-2,3)$; diretriz $x = -3$.

c) Foco $F(-7,3)$; diretriz $x = -2$.

d) Foco $F(3,-1)$; diretriz $y = 1$.

3) Determinar a equação reduzida, o vértice, o focoe uma equação da diretriz. Esboçar o gráfico.

a) $x^2 + 4x + 4y + 8 = 0$.

b) $y^2 - 16y + 8x + 44 = 0$.

c) $x^2 - 12y + 20 = 0$.

d) $2x^2 - 4x - y + 2 = 0$.

Elipse

Elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano, cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos no plano dois pontos F_1 e F_2 tal que a distância $d(F_1,F_2)=2c$. Vamos considerar P qualquer ponto da elipse, então chamando de $2a$ a constante de definição, um ponto P pertence à elipse se, e somente se

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$

onde a é um número real positivo. Obviamente $2a>2c$ pela propriedade de triângulo.

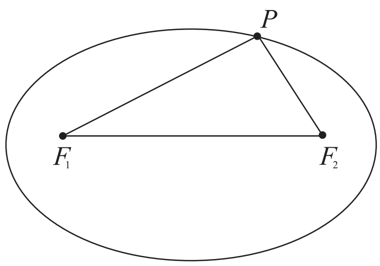

Figura 1.26

- **Elementos da Elipse**

Vamos considerar a figura abaixo com suas respectivas notações.

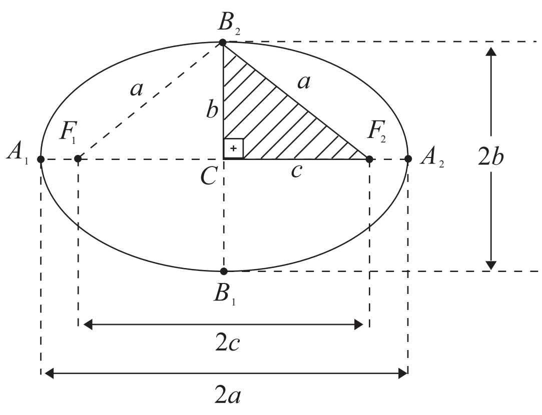

Figura 1.27

Conforme figura anterior, temos os seguintes elementos:

Focos: são os pontos F_1 e F_2.
Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos.
Centro: é o ponto médio C do segmento $\overline{F_1F_2}$.

Eixo maior: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ (este segmento contém os focos).

Eixo menor: é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ e perpendicular a A_1A_2 no seu ponto médio.

Vértice: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2.

Pela figura 1.27 é imediato que $B_2F_2 = a$, pois $B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$ (definição da elipse) e $B_2F_1 = B_2F_2$. Logo, do triângulo retângulo B_2CF_2 vem: $a^2 = b^2 + c^2$.

Esta igualdade mostra que $b < a$ e $c < a$.

Equação da elipse

Seja a elipse de centro $C(0,0)$. Consideremos dois casos:

1º Caso. *O eixo maior está sobre o eixo dos x*

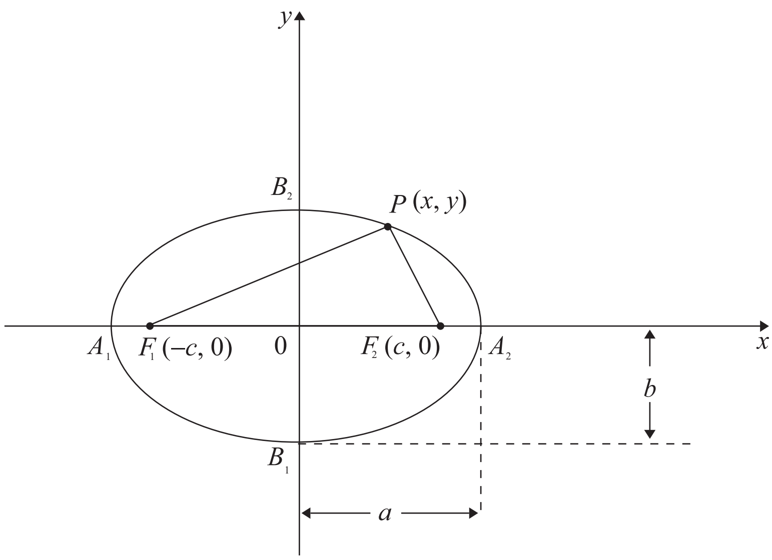

Figura 1.28

Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer de uma elipse de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$. Pela definição da elipse, tem-se

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a,$$

ou,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + 2xc + c^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + 2xc + c^2} = 2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xc + c^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}\right)^2$$

Após, várias simplificações, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$, então

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2, vem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação reduzida para este caso.

2º Caso. *O eixo maior está sobre o eixo dos y*

Observando abaixo, com procedimento análogo ao primeiro caso, obtemos a equação reduzida

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

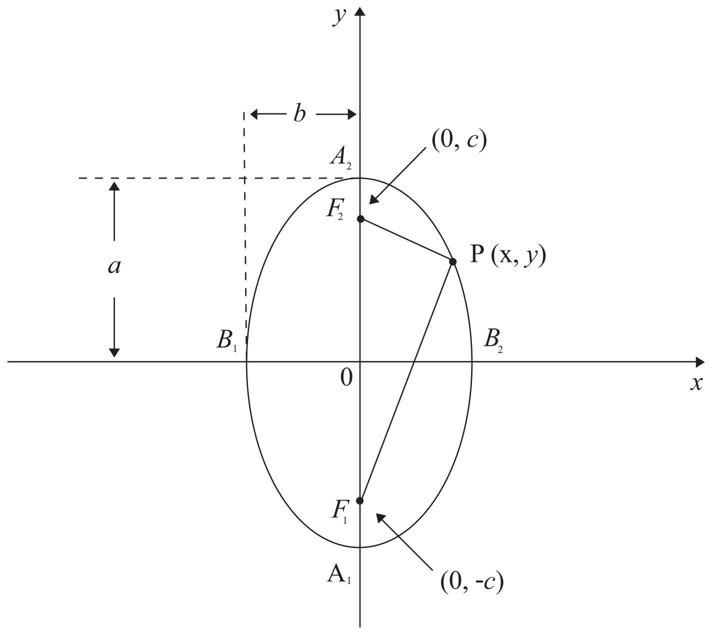

Figura 1.29

Observações

(i) Como em toda elipse tem $a > b$ *(ou* $a^2 > b^2$*), para saber se a elipse tem seu eixo maior sobre Ox ou sobre Oy, basta observar onde está o maior denominador (*a^2*) na sua equação reduzida. Se esse for denominador de* x^2*, ou eixo maior está sobre Ox, caso contrário, estará sobre Oy.*

(ii) Considere uma elipse de centro, fora da posição padrão, isto é, $C = (x_0, y_0)$*. Neste caso, a equação geral da elipse é dada por*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

onde os eixos da elipse são paralelos os eixos x *e* y*.*

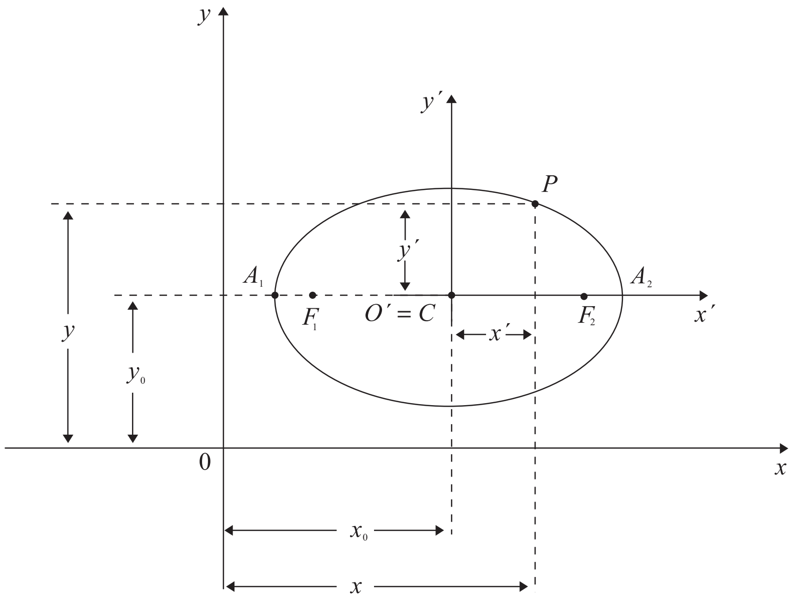

Figura 1.30

(iii) Qualquer elipse cujos eixos estão sobre os eixos coordenados ou são paralelos a eles, sempre pode ser representada por uma equação geral, dada por

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0,$$

com a *e* b *de mesmo sinal.*

Exemplo 1.17 *Uma elipse de centro na origem tem um foco no ponto* $(2,0)$ *e a medida do eixo maior é* 6. *Determinar a sua equação.*

Resolução: Como foco dado é no eixo dos x e $C(0,0)$, então a equação desta elipse é da forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

É dada a medida do eixo maior: $6=2a \Rightarrow a=3$. Também é dado que $c=2$. Agora, $a^2=b^2+c^2$ implica que $9=b^2+4$, ou seja, $b=\pm\sqrt{5}$.

Logo,

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

é a equação desejada da elipse. Veja figura a seguir.

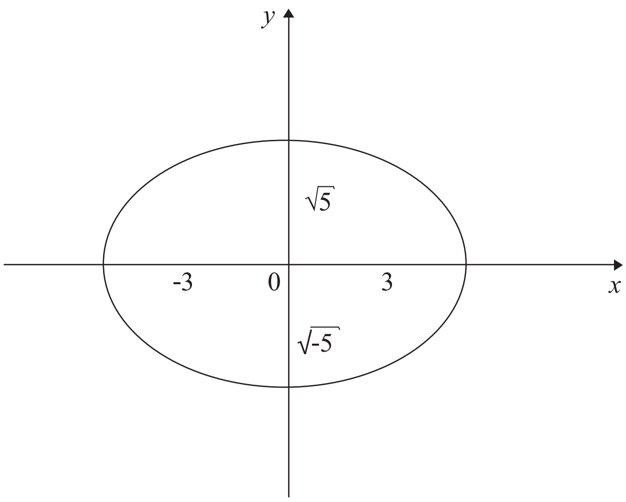

Figura 1.31

Exemplo 1.18 *Determinar o centro, os vértices e os focos da elipse de equação*

$$9x^2+16y^2-36x+96y+36=0\,.$$

Resolução: Agora,

$$
\begin{aligned}
& 9x^2+16y^2-36x+96y+36=0 \\
\Rightarrow\ & 9\left(x^2-4x+4-4\right)+16\left(y^2+6y+9-9\right)+36=0 \\
\Rightarrow\ & 9\left(x-2\right)^2-36+16\left(y+3\right)^2-144+36=0 \\
\Rightarrow\ & 9\left(x-2\right)^2+16\left(y+3\right)^2=144 \\
\Rightarrow\ & 9\left(x-2\right)^2+16\left(y+3\right)^2=12^2 \\
\Rightarrow\ & \frac{\left(x-2\right)^2}{16}+\frac{\left(y+3\right)^2}{9}=1,
\end{aligned}
$$

que é a forma padrão da elipse do eixo maior paralelo ao eixo dos x .

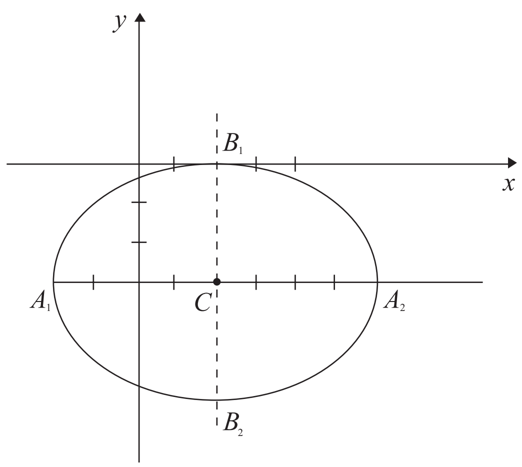

Figura 1.32

Isto implica que o centro da elipse é (2,-3),
$a^2=16\Rightarrow a=4$ e $b^2=9\Rightarrow b=3$. Agora,
$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 16=9+c^2\Rightarrow c^2=7\Rightarrow c=\pm\sqrt{7}$. Daí concluímos que os focos da elipse são $F_1\left(4-\sqrt{7},-3\right)$ e $F_2\left(4+\sqrt{7},-3\right)$.

Exemplo 1.19 *Encontre a equação da elipse com semi eixos,* $a=3$ *e* $b=2$ *com centro no ponto* $\left(1,2\right)$.

Resolução: A equação da elipse com centro em $\left(x_0, y_0\right)$ é dada por

$$\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x-1\right)^2}{3^2}+\frac{\left(y-2\right)^2}{2^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x+1}{9}+\frac{y^2-4y+4}{4}=1$$

$$\Rightarrow 4\left(x^2-2x+1\right)+9\left(y^2-4y+4\right)=36$$

$$\Rightarrow 4x^2+9y^2-8x-36y+4+36=36$$

$$\Rightarrow 4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$$

é a equação da elipse.

Circunferência ou círculo

Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo desse plano é constante. Esse ponto fixo é chamado, ***centro****, e a distância fixa é chamada,* ***raio*** *da circunferência.*

Circunferência é um caso particular da elipse. Quando $a = b$, todas as equações da elipse passam ser equações da circunferência.

Equação da circunferência ou círculo

- **Centro na origem:** $C(0,0)$, $a = b = r$

Neste caso a equação da circunferência é dada por

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

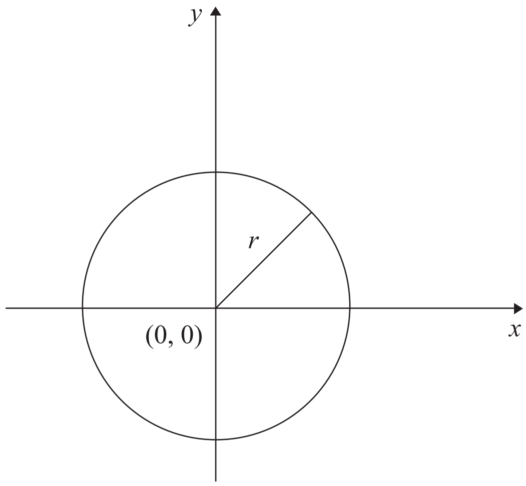

Figura 1.33

- **Centro da circunferência:** $C(x_0, y_0)$, $a = b = r$

Neste caso a equação da circunferência é dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 .$$

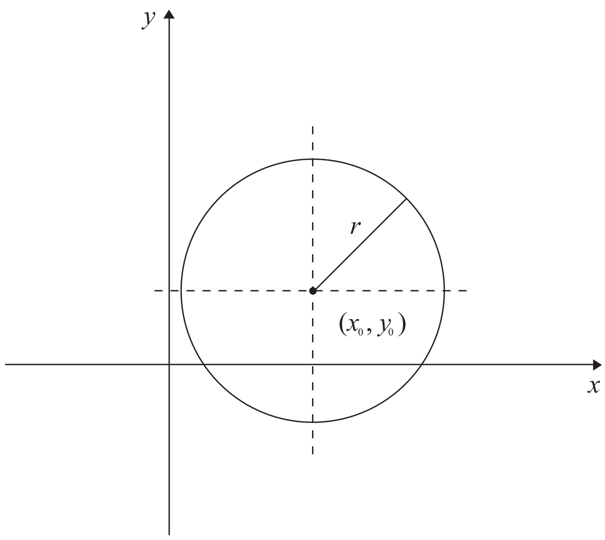

Figura 1.34

Observação *Após simplificação, a equação dada acima pode ser escrita da seguinte forma:*

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

*que é a **equação geral da circunferência** ou **círculo**.*

Exemplo 1.20 *Determinar a equação do círculo com centro no ponto de interseção das retas* $y = 2x - 1$ *e* $y = x + 1$ *e raio* $r = 2$.

Resolução: Inicialmente, precisamos encontrar o ponto de interseção das retas dadas

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$2x - 1 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

$$y = 2x - 1 \quad \Rightarrow y = 2(2) - 1 \quad \Rightarrow y = 3.$$

Logo, o centro do círculo é o ponto de interseção das retas, ou seja, $C(2,3)$.

Sabemos que a equação da circunferência no centro (x_0, y_0) e raio r é dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \quad (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 4$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$$

que é a equação do círculo.

Exercícios propostos – 4

1) Determinar a equação do círculo com centro no ponto $(1,2)$ e raio igual a $r = 3$.

2) Determinar os pontos de interseção entre as seguintes curvas:
a) A reta $y = 2x$ e o círculo $x^2 + y^2 = 4$.
b) A parábola $x^2 = 4y$ e o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

3) Encontrar a equação do círculo com centro no ponto de interseção das retas $y = x + 2$ e $y = 2x + 1$ e raio $r = 2$.

4) Encontre a equação do círculo que passa pelos pontos $(1,2)$, $(2,1)$ e $(1,3)$.

5) Esboçar o gráfico das seguintes curvas e determinar os vértices e os focos:

a) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

b) $9x^2 + 4y^2 = 36$.

c) $x^2 + 4y^2 = 4$.

6) Determinar uma equação da elipse que satisfaça as condições dadas. Esboçar o gráfico:

a) Focos $F_1(-3,0)$ e $F_2(3,0)$, eixo maior igual a 8.

b) Focos $F_1(0,-2)$ e $F_2(0,2)$, eixo menor igual a 6.

c) Focos $F(0,\pm 2)$ e vértices $A(0,\pm 3)$.

d) Vértices $A(0,\pm 4)$ e passando pelo ponto $P(1,2)$.

7) Determinar a equação reduzida, o centro, os vértices A_1 e A_2, os focos. Esboçar o gráfico.

a) $9x^2 + 4y^2 - 54x + 16y + 61 = 0$.

b) $16x^2 + y^2 + 64x - 4y + 52 = 0$.

c) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$.

Hipérbole

Hipérbole é o conjunto de todos os pontos do plano cuja ***diferença das distâncias****, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.*

Consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2, tal que a distância $d(F_1,F_2) = 2c$ e um número real positivo a, de modo que, $2a < 2c$.

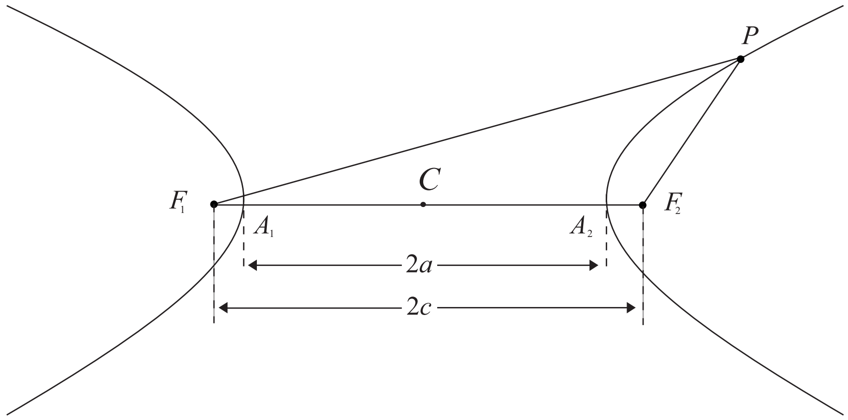

Figura 1.35

Chamamos de $2a$ a constante de definição, um ponto P pertence à hipérbole se, e somente se,

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a \tag{7}$$

Como se vê, a hipérbole é uma curva com dois ramos. Na verdade, pela equação (7), um ponto P está na hipérbole se, e somente se,

$$d(P,F_1)-d(P,F_2)=\pm 2a\,. \tag{8}$$

- **Elementos da hipérbole**

Focos: são os pontos F_1 e F_2.
Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos.
Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2.
Vértices: são os pontos A_1 e A_2.

Equação reduzida da hipérbole

Seja a hipérbole de centro $C(0,0)$. Consideremos dois casos:

1º Caso. *O eixo real está sobre o eixo dos x*

Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer de uma hipérbole de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$. Pela definição 1.4, tem-se

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a\,,$$

ou, em coordenadas

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right|=2a\,.$$

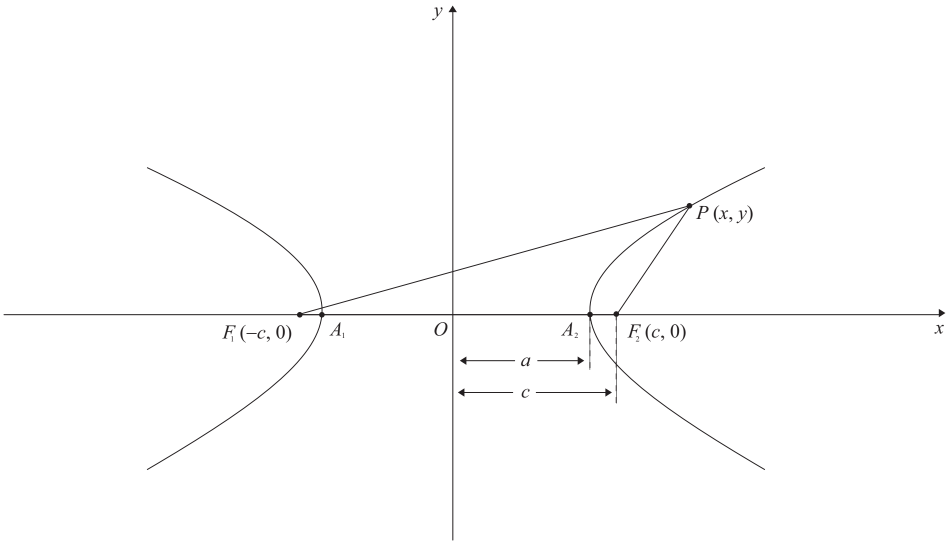

Figura 1.36

Vamos encontrar agora a equação da hipérbole. Usando a fórmula da distância entre dois pontos, temos que

$$F_1P = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ e } F_2P = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Substituindo estes valores em (8), obtemos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado os termos anteriores, temos que

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$
$$\Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{c^2} + 2xc + \cancel{y^2}$$
$$= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + \cancel{c^2} - 2xc + \cancel{y^2} \therefore$$
$$\Rightarrow 4xc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$
$$\Rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando novamente ao quadrado cada termo da identidade acima, obtemos

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$
$$= a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\Rightarrow \quad (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Observamos através da figura 1.36, que

$$2c > |F_1Q - F_2Q| = 2a$$

$$\Rightarrow \quad c > a$$

$$\Rightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R} \text{ tal que } b^2 = c^2 - a^2, \text{ ou seja, } a^2 + b^2 = c^2.$$

Portanto, a equação da hipérbole é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

que é a **equação reduzida** para este caso.

2º Caso. *O eixo real está sobre o eixo dos y*

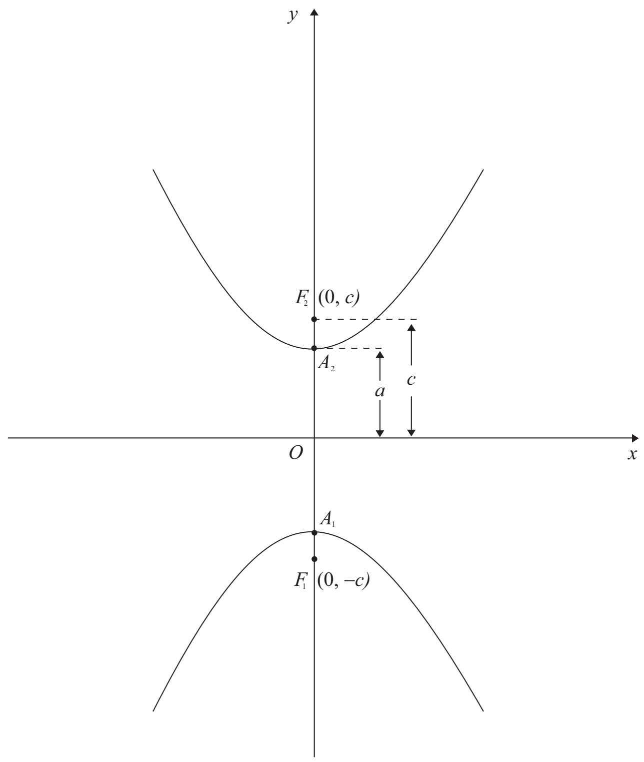

Figura 1.37

Observando a figura acima, com procedimento análogo ao 1º caso, obtemos a equação reduzida

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Equação geral da hipérbole

Quando o centro da hipérbole C não é origem, ou seja, $C = (x_0, y_0) \neq (0,0)$, neste caso a equação geral da hipérbole pode ser representada de duas formas.

1º Caso. *O eixo real é paralelo ao eixo dos x*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

2º Caso. *O eixo real é paralelo ao eixo dos y*

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

Simplificando e ajustando os coeficientes, nas equações dadas acima, podemos ter ***a equação geral da hipérbole*** dada por

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0,$$

onde a, b, c, d e f são constantes, com a e b de sinais contrários.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos relacionados com hipérbole.

Exemplo 1.21 *Obter a equação reduzida resultante de uma translação de eixos, classificar os elementos e esboçar o gráfico da equação*

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0.$$

Resolução: Temos que

$$
\begin{aligned}
& 9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0 \\
\Rightarrow\ & 9\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) - 4\left(y^2 + 4y + 4 - 4\right) - 43 = 0 \\
\Rightarrow\ & 9\left(x-1\right)^2 - 9 - 4\left(y+2\right)^2 + 16 - 43 = 0 \\
\Rightarrow\ & 9\left(x-1\right)^2 - 4\left(y+2\right)^2 = 36 \\
\Rightarrow\ & \frac{\left(x-1\right)^2}{4} - \frac{\left(y+2\right)^2}{9} = 1.
\end{aligned}
$$

Assim, temos:

Centro: $C\left(1,-2\right)$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ (valor positivo)

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$ (valor positivo)

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$.

Focos: $F\left(1 \pm \sqrt{13}, -2\right)$

Vértices: $A_1(-1,-2)$, $A_2(3,-2)$

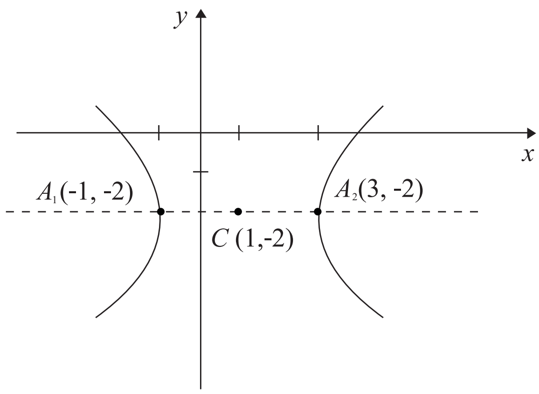

Figura 1.38

Exemplo 1.22 *Determinar a equação da hipérbole de vértice* $A_1\left(2,-3\right)$ *e* $A_2\left(6,-3\right)$*, sabendo que* $F\left(8,-3\right)$ *é um de seus focos.*

Resolução: Colocando os pontos dados no plano, teremos a seguinte figura:

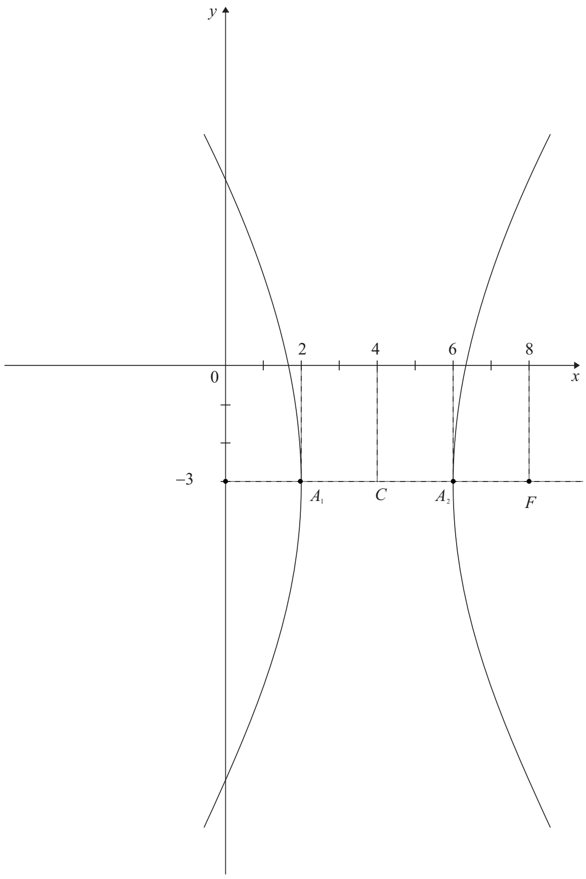

Figura 1.39

Agora,

$$2c = 8 \quad \Rightarrow \quad c = 4$$

e

$$2a = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

Logo,

$$\begin{aligned} & 16 = a^2 + b^2 \\ \Rightarrow & 16 = 4 + b^2 \\ \Rightarrow & 12 = b^2 \\ \Rightarrow & b = \pm\sqrt{12}. \end{aligned}$$

Também podemos verificar, facilmente, que o centro é $C(4,-3)$. Sabemos que a equação da hipérbole é dada por

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Substituindo os valores correspondentes, obtidos através da figura 1.39, na equação anterior, obtemos

$$\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{\left(\sqrt{12}\right)^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-4)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{12}=1$$

$$\Rightarrow (x^2-8x+16)3-(y^2-6y+9)=12$$

$$\Rightarrow 3x^2-24x+48-y^2+6y-9=12$$

$$\Rightarrow 3x^2-y^2-24x+6y+27=0.$$

Portanto, a equação da hipérbole é dada por

$$3x^2-y^2-24x+6y+27=0.$$

Exercícios propostos – 5

1) Determine os focos, os vértices e esboce as hipérboles cujas equações são:

a) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

b) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$.

c) $4x^2-9y^2+36=0$

d) $x^2-y^2=1$.

2) Determine uma equação da hipérbole:

a) Focos: $F_1(3,0)$ e $F_2(-3,0)$ e vértices: $A_1(2,0)$ e $A_2(-2,0)$.

b) Focos: $F_1(2,-2)$ e $F_2(-2,-2)$ e vértices: $A_1(1,-2)$ e $A_2(-1,-2)$.

3) Determine centro, os vértices e os focos das hipérboles dadas:

a) $7x^2-9y^2+28x+54y-116=0$.

b) $x^2-4y^2+6x+24y-31=0$.

c) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$.

Seções cônicas

Sejam duas retas r e s concorrentes em O (origem) e não perpendiculares. Consideremos fixa a reta e façamos s girar 360º graus em torno de r mantendo constante o ângulo entre estas retas. Nestas condições, a reta s gera uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice O (Figura 1.40).

A reta s é chamada geratriz da superfície. Chama-se seção cônica, ou simplesmente cônica, ao conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica.

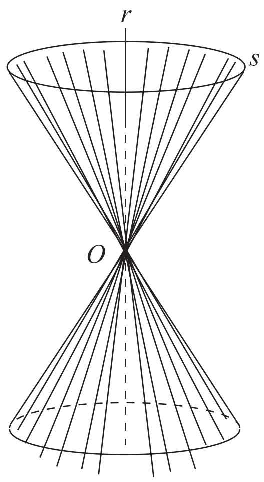

Figura 1.40

Vamos seccionar a superfície cônica através de um plano π . Obtemos várias curvas planas conforme figura 1.41 abaixo:

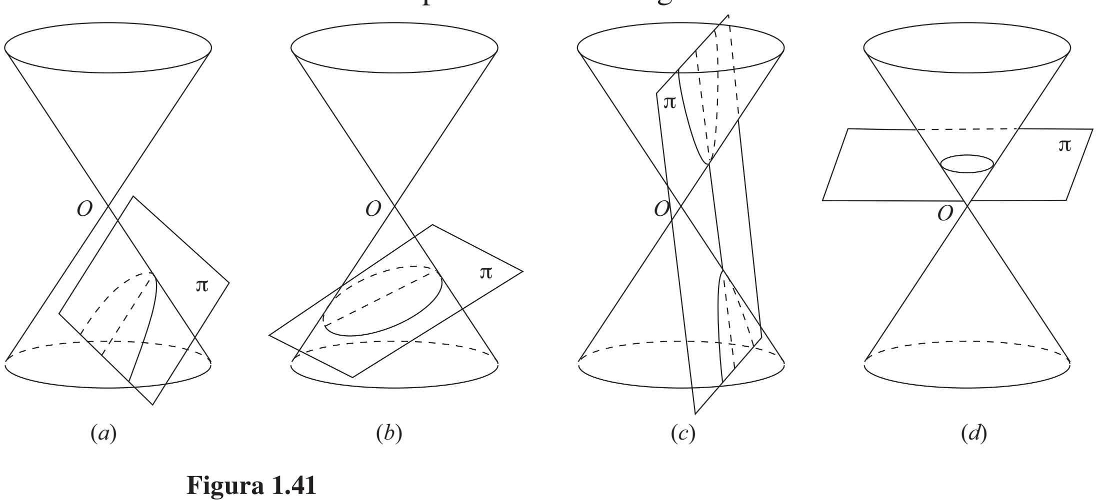

Figura 1.41

É importante observar que as cônicas* são curvas planas e, portanto, tudo o que dizemos sobre **parábola**, **elipse**, **circunferência** e **hipérbole** se passa num plano.

GLOSSÁRIO

Cónicas* são curvas geradas pela intersecção de um plano com um cone. **Fonte**: http://pt.wikipedia.org/wiki

Vale destacar...

Quando uma superfície cônica é secionada por um plano π qualquer que não passa pelo vértice O, a cônica será:

*a) uma **parábola**, se π paralelo a uma geratriz da superfície (Figura 1.41 (a));*

*b) uma **elipse**, se π não for paralelo a uma geratriz e intercepta apenas uma das folhas da superfície (Figura 1.41(b));*

*c) uma **hipérbole**, se π não é paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas da superfície (Figura 1.41(c)). A hipérbole deve ser vista como uma curva só, constituída de dois ramos, um em cada folha da superfície.*

*d) uma **circunferência**, se π for perpendicular ao eixo vertical (Figura 1.41(d))*

Observamos acima, que seccionando uma cônica através de um plano obtemos diversas curvas padrões. A seguir, obteremos essas curvas e/ou reta através da única equação dada por

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0, \tag{9}$$

onde a, b, c, d e f *são constantes reais. A seguir analisamos a equação dada acima, considerando diversas possibilidades das constantes* a *e* b.

(i) Quando $a = b = 0$ *em (9) obtemos* $cx + dy + f = 0$*, a qual é uma* ***equação da reta*** *dependendo dos coeficientes* c, d *e* f*.*

(ii) Quando $a = 0, b \neq 0$ *ou* $a \neq 0, b = 0$ *em (9) obtemos* $by^2 + cx + dy + f = 0$ *ou* $ax^2 + cx + dy + f = 0$*, que é uma* ***equação geral da parábola****.*

(iii) Quando $a = b \neq 0$ *em (9) temos* $ax^2 + ay^2 + cx + dx + f = 0$*, a qual é uma equação* ***geral da circunferência****.*

(iv) Quando $a \neq b \neq 0$ *e* a *e* b *tem omesmo sinal, ou seja, as duas constantes são positivas ou são negativas, ou seja,* $ab > 0$*, então a equação (9) representa uma* ***equação geral da elipse****.*

(v) Quando $a \neq b \neq 0$ *e* a *e* b *tem sinais diferentes, ou seja,* $ab < 0$*, então a equação (9) representa uma* ***equação geral da hipérbole****.*

Saiba Mais...

Para aprofundar mais os temas estudados nesta unidade consulte:

- STEINBRUCH, A.; P. WINTERLE. **Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books,1987.

RESUMO

Nesta Unidade você acaba de estudar os conjuntos numéricos e as operações no conjunto dos Números Reais. Foram citadas as propriedades das desigualdades e as propriedades do módulo, ou valor absoluto, de um número real e intervalos. Você estudou a noção de sistema de coordenadas cartesianas, aprendeu em detalhes as principais curvas: a reta, a circunferência, parábola, elipse, hipérbole e viu também as equações de cada uma dessas curvas.

RESPOSTAS

- **Exercícios propostos – 1**

1) a) $x \le -3$ ou $x \ge 3$.

b) $-\frac{1}{3} < x < \frac{7}{15}$.

c) ϕ (conjunto vazio).

d) $x \le -4$ ou $x \ge 10$.

2) $S = \left\{-3, \frac{9}{2}\right\}$

- **Exercícios propostos – 2**

1) a) $y = -2x + 5$. b) $y = 3x - 11$.
c) $y = 7x - 17$. d) $y = \frac{2}{3}x + 5$

2) a) $\frac{8}{\sqrt{17}}$. b) $\frac{15}{\sqrt{5}}$.

c) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

3) a) $m = -2$. b) $m = \frac{4}{3}$.

4) a) $m = \frac{1}{13}$. b) $m = 3$.

5) a) $(-2, -1)$. b) $\left(-4, -\frac{15}{2}\right)$.

- **Exercícios propostos – 3**

1) a) Foco: $F(0,1)$, diretriz: $y = -1$.
b) Foco: $F(0,2)$, diretriz: $y = -2$.
c) Foco: $F(-2,0)$, diretriz: $x = 2$.
d) Foco: $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, diretriz: $x = -\frac{1}{4}$.

2) a) $x^2 = 4y$.

b) $y^2 - 6y - 4x + 1 = 0$.

c) $y^2 - 6y + 10x + 54 = 0$.

d) $x^2 - 6x + 4y + 9 = 0$.

3) a) Vértice: $V(-2,-1)$, Foco: $F(-2,-2)$, diretriz: $x = 0$

b) Vértice: $V\left(\frac{5}{2},8\right)$, Foco: $F\left(\frac{1}{2},8\right)$, diretriz: $y = \frac{9}{2}$.

c) Vértice: $V\left(0,\frac{5}{3}\right)$, Foco: $F\left(0,\frac{14}{3}\right)$, diretriz: $y = -\frac{4}{3}$.

d) Vértice: $V(1,0)$, Foco: $F\left(1,\frac{1}{8}\right)$, diretriz: $y = -\frac{1}{8}$.

- **Exercícios propostos – 4**

1) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.

2) a) $P_1\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $P_1\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

b) $P_1\left(2\sqrt{-2+\sqrt{13}},-2+\sqrt{13}\right)$, $P_1\left(-2\sqrt{-2+\sqrt{13}},-2+\sqrt{13}\right)$

3) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$.

4) $x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0$

5) a) Vértices: $A(\pm 4,0)$, Focos: $F\left(\pm\sqrt{7},0\right)$.

b) Vértices: $A(0,\pm 3)$, Focos: $F\left(0,\pm\sqrt{5}\right)$.

c) Vértices: $A(\pm 2,0)$, Focos: $F\left(\pm\sqrt{3},0\right)$.

6) a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. b) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$.

c) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ d) $\frac{3x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

7) a) Centro: $(3,-2)$, Vértices: $A_1(3,-5)$, $A_2(3,1)$,
Focos: $F\left(3,-2 \pm \sqrt{5}\right)$.

b) Centro: $(-2,2)$, Vértices: $A_1(-2,-2)$, $A_2(-2,6)$,
Focos: $F\left(-2,2 \pm \sqrt{15}\right)$.

c) Centro: $(1,2)$, Vértices: $A_1(-2,2)$, $A_2(4,2)$,
Focos: $F\left(1 \pm \sqrt{5},2\right)$.

- **Exercícios propostos – 5**

1) a) Focos: $\left(\pm\sqrt{34},0\right)$, vértices $(5,0)$ e $(-5,0)$.

b) Focos: $\left(0,\pm\sqrt{34}\right)$, vértices $(3,0)$ e $(-3,0)$.

c) Focos: $\left(0,\pm\sqrt{13}\right)$, vértices $(0,2)$ e $(0,-2)$.

d) Focos: $\left(\pm\sqrt{2},0\right)$, vértices $(1,0)$ e $(-1,0)$.

2) a) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$.

b) $3x^2 - y^2 - 4y = 7$.

3) a) $C(-2,3)$, $A_1(-5,3)$, $A_2(1,3)$, $F_1(-6,3)$, $F_2(2,3)$.
b) $C(-3,3)$, $A_1(-5,3)$, $A_2(-1,3)$, $F\left(-3 \pm \sqrt{5},3\right)$.
c) $C(2,-1)$, $A_1(2,-5)$, $A_2(2,3)$, $F_1(2,-6)$, $F_2(2,4)$.