UNIDADE

2

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Objetivo

Nesta unidade você vai, identificar os diferentes tipos e operações de matrizes; e empregar os diferentes tipos de matrizes na resolução de sistemas de equações lineares.

Matrizes e Sistema de Equações Lineares

Noção de matriz

A partir de agora faremos uma viagem através de matrizes e sistemas de equações lineares que lhe ajudarão, no futuro, a compreender melhor os modelos econômicos.

Uma matriz A, $m \times n$ (m por n) é um quadro de mn números dispostos em m linhas e n colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Usamos a notação $A = (a_{ij})_{m \times n}, i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,m$.

Por exemplo,

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 9 \end{bmatrix}_{2\times3}$ é a matriz 2×3 e

$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$ é a matriz 3×3.

GLOSSÁRIO

Álgebra linear é um ramo da Matemática que estuda vetores, espaços vetoriais, transformações lineares, *sistemas de equações lineares* e *matrizes*. Não obstante o fato de a Álgebra Linear ser um campo abstrato da Matemática, ela tem um grande número de aplicações dentro e fora da Matemática. **Fonte:** http://pt.wikipedia.org/wiki/

Tipos das matrizes

Seja $A = (a_{ij})_{m \times n}, i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,m$ uma matriz dada. A seguir apresentaremos alguns tipos especiais de matrizes.

- **Matriz linha**

É uma matriz que possui uma linha só. A $i-$ésima linha da matriz A, é:

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{bmatrix}_{i \times n}, i = 1,2,\ldots,m.$$

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$.

- **Matriz coluna**

É uma matriz que possui uma coluna só. A *j*-ésima coluna de *A* é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix}_{m \times j},$$

para $j = 1,2,\ldots,n$, por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}_{5 \times 1}.$$

- **Matriz nula**

É uma matriz na qual todos os elementos são iguais a zero. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2},$$

é uma matriz nula.

- **Matriz quadrada**

Se $m = n$ na matriz A, dizemos que *A* é uma matriz quadrada de ordem *n*. Ou seja, uma matriz quadrada tem o número de linhas e colunas iguais. Dizemos também que os elementos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} formam a diagonal principal. Por exemplo, *(a)* $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{2x2}$, A é matriz quadrada de ordem 2;

(b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -9 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{3x3}$, B é uma matriz quadrada de ordem 3.

A matriz quadrada tem algumas caraterísticas particulares, dadas a seguir:

- **Triangular superior:** É o triângulo da matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- **Triangular inferior:** É o triângulo da matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz diagonal:** É a matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz identidade:** É a matriz quadrada, onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$, ou seja

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Por exemplo:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz transposta**

A transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é definida pela matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ obtida trocando-se as linhas pelas colunas, ou seja, $b_{ji} = a_{ij}$, $i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n$.

Escrevemos a matriz transposta como:

$$B = A^t,$$

Isto é, A^t é obtida transformando-se ordenadamente cada linha de A em colunas.

Por exemplo,

(a) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, então sua transposta é $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$;

(b) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, então sua transposta é $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- **Matriz simétrica**

Uma matriz A é simétrica quando $A^t = A$, ou seja, a matriz e sua transposta são iguais. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix},$$

então,

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix},$$

isto é, $A = A^t \Rightarrow$ A matriz A é simétrica.

- **Matriz anti-simétrica**

Uma matriz A é anti-simétrica, quando $A^t = -A$. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$

então,

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

isto é, $A^t = -A \Rightarrow$ A matriz A é anti-simétrica.

- **Matrizes em blocos**

Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}, i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m$, uma matriz dada. Eliminando algumas linhas ou colunas, obtemos uma outra matriz B da menor ordem. B é chamada **submatriz** de A. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 \\ -3 & 2 & 8 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

então $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ pode ser uma das suas **submatrizes**, onde eliminamos a terceira linha e a terceira coluna.

A seguir explicaremos o que são matrizes em bloco.

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} & a_{24} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix},$$

pode ser particionada como

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

onde A_{11}, A_{12}, A_{21} e A_{22}, são submatrizes de A, conforme separadores indicados na matriz A. Também podemos particionar a matriz A,

$$A=\left[\begin{array}{cc:c:c}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{21} & a_{23} & a_{24}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix},$$

o que nos dá uma outra subdivisão de A. Matrizes subdivididas são chamadas de matrizes em blocos.

- **Matriz aumentada**

Sejam A e B duas matrizes com mesmo número de linhas, ou seja,

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n} \text{ e } B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk}\end{bmatrix}_{m\times k}.$$

A matriz aumentada é a matriz $\left[A:B\right]$ obtida colocando lado a lado, as matrizes A e B, de modo a se constituírem numa matriz de ordem $m\times(n+k)$. Então

$$\left[A:B\right]=\left[\begin{array}{cccc:cccc}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk}\end{array}\right]_{m\times(n+k)}.$$

A matriz aumentada, geralmente, é utilizada no cálculo da inversa de uma matriz, na resolução de sistema de equações lineares, etc.

Determinante de uma matriz

Determinante de uma matriz é um valor numérico, e é obtido somente quando a matriz é quadrada. Seu cálculo segue no exemplo a seguir:

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2 - 0) - 2(5 - 6) + 1(0 + 4) = 2.$$

- **Propriedades do determinante**

Seja A uma matriz quadrada. O determinante da matriz quadrada A, $\det(A) = |A|$ satisfaz algumas propriedades. Veja a seguir:

(i) O determinante de A e de sua transposta A^t são iguais, ou seja, $|A| = |A^t|$;

(ii) Se uma matriz B é obtida de uma matriz A trocando-se duas linhas (ou colunas) de A, então $\det(B) = -\det(A)$;

(iii) Se uma matriz B é obtida de A multiplicando-se uma linha (ou coluna) de A por um número real c, então $\det(B) = c\ \det(A)$;

(iv) Se $B = [b_{ij}]$ é obtida de $A = [a_{ij}]$ somando-se a cada elemento da r–ésima linha (respectivamente, coluna) de A uma constante c, vezes o elemento correspondente a s–ésima linha (respectivamente, coluna) de A, $r \neq s$, então $\det(B) = \det(A)$;

(v) Se uma matriz $A = [a_{ij}]$ é uma matriz triangular superior (ou inferior), então $\det(A)$ é igual ao produto dos elementos da diagonal principal, ou seja, o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal;

(vi) O determinante de um produto de matrizes é igual ao produto de seus determinantes, isto é, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$. Nesse caso é necessário que as matrizes sejam quadradas;

(vii) Se A tem uma linha (ou coluna) de zeros, então $|A| = 0$;

(viii) Se A tem duas linhas (ou colunas) idênticas, então $|A| = 0$;

(ix) Se A é triangular, isto é, A tem zeros acima ou abaixo da diagonal principal, então, o valor do determinante de A é o produto dos elementos diagonais. Assim, em particular $|I| = 1$, onde I é a matriz identidade.

Operações matriciais

Apresentaremos a seguir três tipos de operações em matrizes. **Adição de matrizes**, **multiplicação de uma matriz por escalar** e **multiplicação de duas matrizes**.

Adição de matrizes

A soma ou adição de duas matrizes do mesmo tamanho $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, $i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$ é definida como sendo a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para $i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$. Escrevemos

$$C = A + B.$$

Por exemplo,

(a) Se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2},$$

então,

$$A + B = \begin{bmatrix} 2-3 & 4-2 \\ 3+4 & 5+1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

(b) Se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2},$$

então,

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+5 & 2+7 \\ 5+9 & 4+3 \\ 9+2 & 3-1 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 14 & 7 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

- **Propriedades da operação de adição**

Sejam A, B, C e D matrizes da ordem da mesma ordem, $m \times n$. Então valem as seguintes propriedades:

(i) **Comutativa:** $A + B = B + A$;

(ii) **Associativa:** $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(iii) **Existência do elemento neutro:** Existe uma única matriz $m \times n$ O tal que $A + O = A$, para todas as matrizes A, $m \times n$. A matriz O é chamada de **matriz nula** ou **elemento neutro** para a soma de matrizes de ordem $m \times n$;

(iv) **Existência do inverso aditivo:** Para cada matriz A existe uma única matriz da mesma ordem D, tal que: $A + D = O$. Denotamos D por $-A$, então podemos escrever $A + (-A) = O$. A matriz $-A$ é chamada de matriz **inversa aditiva** ou **negativa** de A.

Multiplicação de uma matriz por escalar

A multiplicação de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ *por um escalar* α *é definida pela matriz* $B = (b_{ij})_{m \times n}$*, obtida multiplicando-se cada elemento da matriz pelo escalar* α*, ou seja,* $b_{ij} = \alpha\, a_{ij}$, $i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$. *Então, escrevemos* $B = \alpha A$.

Por exemplo, o produto da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ pelo escalar –2 é dada por

$$(-2)A = (-2)\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ -6 & -14 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

- **Propriedades da multiplicação de uma matriz por escalar**

Sejam A e B duas matrizes da mesma ordem. Se r e s são números reais, então valem as seguintes propriedades:

(i) $r(sA) = (rs)A$;

(ii) $(r + s)A = rA + sA$;

(iii) $r(A + B) = rA + rB$.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}$ e $r = -2$, então temos

$$-2(A + B) = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 2 \\ -10 & 12 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad -2A - 2B = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 2 \\ -10 & 12 & 8 \end{bmatrix},$$

o que verifica a propriedade (iii).

Produto de duas matrizes

O produto de duas matrizes só é possível se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda. Ou seja, o produto de $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *e* $B = (b_{jk})_{n\times p}$ *é definido pela matriz* $C = (c_{ik})_{i\times p}$ *e é obtido da seguinte forma:*

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\,,$$

para todo $i = 1,2,\ldots,m;\ k = 1,2,\ldots.,p$*. Então, escrevemos* $C = AB$.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$, então o produto de duas matrizes *A* e *B* é dado por

$$AB = \begin{bmatrix} 1.3 + 2.4 + 3(-1) & 1.2 + 2.5 + 3.2 & 1.0 + 2(-3) + 3(-2) \\ 5.3 + (-3)4 + 0(-1) & 5.2 + (-3)5 + 0.2 & 5.0 + (-3)(-3) + 0(-2) \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 18 & -12 \\ 3 & -5 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

Observe que neste caso o produto *BA* não está definido. Entretanto, mesmo quando está definido, *BA* não será necessariamente igual a *AB*.

- **Propriedades da operação da multiplicação**

A seguir, apresentaremos algumas propriedades da multiplicação entre matrizes.

(i) Sejam A, B e C três matrizes da ordem $m\times n$, $n\times k$ e $k\times p$ respectivamente, então

$$A(BC) = (AB)C\,.$$

(ii) Sejam A, B e C três matrizes da ordem $m\times n$, $n\times k$ e $n\times k$ respectivamente, então

$$A(B+C) = AB + AC\,.$$

(iii) Sejam A, B e C três matrizes da ordem $m\times n$, $m\times n$ e $n\times k$

respectivamente, então

$$(A+B)C = AC + BC\,.$$

(iv) Sejam A e B duas matrizes da ordem $m \times n$ e $n \times k$ respectivamente. Seja r um número real, então

$$A(rB) = r(AB) = (rA)B\,.$$

Observações

(i) A propriedade (a) é conhecida como ***associativa****, propriedades (b) e (c) são conhecidas como* ***distributivas****. A propriedade (d) é para multiplicação por escalar.*

(ii) Nas propriedades acima, as ordens das matrizes são escolhidas de maneira que seja possível a operação de multiplicação e/ou adição.

(iii) No caso de adição de matrizes, sabemos que a operação é comutativa para matrizes da mesma ordem. Mas isso não acontece com a operação de multiplicação, ou seja, nem sempre AB *é igual* BA*, mesmo se os produtos existem.*

Veja a seguir um exemplo para observação(iii):

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, então

$$AB = \begin{bmatrix} 2+6 & -5+2 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 10 \end{bmatrix},$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} 2+10 & 4 \\ 3-2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$AB \neq BA$$

Exemplo 2.1 *(a) Sejam*

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ -1 & 5 & 7\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & -5 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & -5 & -1\end{bmatrix}\ e\ C=\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 5 & -3 & 4\\ 4 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 9\end{bmatrix}$$

três matrizes. Então,

$$A(BC)=\begin{bmatrix}-4 & 108 & -76\\ 35 & -76 & 137\end{bmatrix} e\,(AB)C=\begin{bmatrix}-4 & 108 & -76\\ 35 & -76 & 137\end{bmatrix},$$

o que verifica a propriedades (i).

(b) Sejam

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ -2 & 3\\ 3 & -5\end{bmatrix}\ e\ C=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 5 & -3\\ -1 & 8\end{bmatrix}$$

três matrizes. Então,

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}-3 & 6\\ -10 & -3\end{bmatrix} e\ AC+BC=\begin{bmatrix}-3 & 6\\ -10 & -3\end{bmatrix},$$

o que verifica a propriedade (ii).

(c) Sejam

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 5 & -2 & -1\end{bmatrix} e\ B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

duas matrizes. Seja $r=-3$*, então*

$$A(-3B)=\begin{bmatrix}-9 & 33\\ -15 & 39\end{bmatrix} e\,(-3)(AB)=\begin{bmatrix}-9 & 33\\ -15 & 39\end{bmatrix},$$

o que verifica a propriedade (iv).

Propriedades da transposta da matriz

Vimos a definição da matriz transposta. A partir de agora, apresentaremos algumas propriedades da matriz transposta. Fique atento e certifique-se que entendeu antes de prosseguir.

Sejam A e B duas matrizes e seja r um número real, então a transposta de uma matriz, (definida acima), satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $(A^t)^t = A$;

(ii) $(A+B)^t = A^t + B^t$, onde A e B são matrizes da mesma ordem;

(iii) $(AB)^t = B^t A^t$, onde A e B são matrizes da ordem $m \times n$ e $n \times k$ respectivamente;

(iv) $(rA)^t = rA^t$.

Exemplo 2.2

(a) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, *então*

$$(A+B)^t = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } A^t + B^t = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix},$$

(b) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ *são matrizes, então*

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \text{ e } B^t A^t = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Exercícios propostos – 1

1) Considerar as seguintes matrizes:

$$A=\begin{bmatrix}2&5\\-2&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&-3\\-2&4\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-3&-1&0\\0&2&-4\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}3&-2&-1\\2&-3&0\\1&0&4\end{bmatrix}\text{ e }\quad E=\begin{bmatrix}5&1&-4\\2&2&9\\3&0&11\end{bmatrix}.$$

Se possível, calcular

a) $AB-BA$; b) $DE-ED$; c) $C-D$;

d) B^2-A; e) D^2-E.

2) Dadas as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}2&3\\2&-1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1&3&2&1\\4&0&6&-2\end{bmatrix}\text{ e }C=\begin{bmatrix}2&0\\1&3\\-5&4\end{bmatrix},$$

se possível, determinar:

a) a segunda linha da matriz CA;

b) a primeira linha da matriz AB;

c) a terceira linha da matriz BC;

d) a quarta linha da matriz CB.

3) Sejam $A=\begin{bmatrix}5&3&7\\2&1&5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2&4\\-1&-3\\5&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&-3&7\\-1&2&-6\\-3&-1&4\end{bmatrix}$,

$$D=\begin{bmatrix}-5&2\\7&3\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}1&8&5\\-3&-4&-5\\7&2&3\end{bmatrix}\text{ e }F=\begin{bmatrix}2&-3\\-4&7\end{bmatrix}.$$

Calcule, se possível

a) AB; b) BA; c) $AC+A$;
d) $AB-F$; e) $BA+CE$; f) $A(BD)$;
g) $(AB)D$; h) $A(C+E)$; i) $AC+AE$;
j) $(F+D)A$.

4) Sejam $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Encontre

a) A^2+2A; b) A^2+B^2+2AB;
c) $(A+B)^2$; d) $AB+BA$;
e) $A^3+3A^2+3A+2I_2$; f) $B^3-2B^2-3B+4I_2$.

5) Sejam $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

$D=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $F=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Calcule, se possível:

a) $(3D-F)^t D$; b) $A^t(D+F)$;
c) $B^t A^t$; d) $(2C)A^t$; e) $(B^t+A)A^t$.

Operações elementares

A seguir, apresentaremos três tipos de operações elementares numa matriz A, onde L_i, L_j etc. representam as linhas da matriz.

1ª Operação: ***Permuta de linha****, ou seja, a troca de duas linhas uma pela outra na matriz, isto é, $L_i \leftrightarrow L_j$, onde L_i, L_j etc. representam as linhas da matriz.*

Por exemplo, se considerarmos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então, trocando a linha L_1 por L_2, ou vice-versa, obteremos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2ª Operação: ***Multiplicação*** *de uma linha por um escalar não nulo.*

Por exemplo, se considerarmos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

então, multiplicando a segunda linha por 2, isto é, $2L_2$, obteremos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 10 & 16 \\ 3 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

3ª Operação: *Substituição de uma linha pela soma com outra previamente multiplicada por um escalar não nulo, ou seja, substituição de linha L_i por $L_i + cL_j$, onde c é um escalar não nulo.*

Por exemplo, se considerarmos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então, efetuando a operação $(-1)L_1 + L_3$, isto é, multiplicando a primeira linha por (–1) e somando na terceira, obtemos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

As três operações dadas acima são fundamentais para definir a equivalência entre matrizes, dada a seguir.

Matrizes equivalentes

Sejam A e B duas matrizes de mesma ordem, dizemos que ***B é equivalente a A****, se B é obtida de A através de um número finito de operações elementares entre as linhas. Denotamos por* $B \sim A$.

Observações

(i) As operações elementares definidas acima em relação às linhas, também podem ser definidas em relação às colunas. Mas por uma questão prática, por exemplo, em cálculo de inversa e resolução de sistema de equações sempre formamos a matriz aumentada em relação às linhas, por isso sempre utilizamos as operações elementares em relação às linhas.

(ii) Qualquer matriz quadrada A, de ordem n, não singular ($\det(A) \neq 0$ *), pode ser transformada na matriz equivalente* I_n*, de mesma ordem, por meio de uma sucessão finita de operações elementares, isto é,* $I_n \sim A$.

Exemplo 2.3 *Aplicando as operações lineares, transforme a matriz quadrada A em matriz identidade equivalente.*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix},$$

Resolução: Inicialmente, devemos calcular o determinante da matriz, conforme observação acima. Neste caso,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 .$$

Logo, podemos efetuar as operações elementares, a fim de obter a matriz identidade. Aplicando as seguintes operações elementares sobre a matriz A:

$$L_1 \to \frac{1}{3}L_1 \; ; \; L_2 \to L_2 + (-2)L_1 \; ; \; L_3 \to L_3 + (-4)L_1 \; ; \; L_2 \to 3L_2 \; ;$$

$$L_3 \to L_3 + \left(-\frac{2}{3}\right)L_2 ; \quad L_3 \to (-1)L_3 \; ; \; L_1 \to L_1 + \left(-\frac{1}{3}\right)L_2 \; ;$$

$$L_2 \to L_2 + 12L_3 ; \qquad L_1 \to L_1 + (-5)L_3 ,$$

respectivamente, obtemos a matriz identidade equivalente, I_3, dada por

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observação *Mais detalhes sobre o procedimento de operações elementares, com alguns exemplos desenvolvidos, passo a passo, estão no material on-line do ambiente.*

Cálculo do determinante usando operações elementares

Podemos calcular o valor do determinante de uma matriz quadrada usando operações elementares, ou seja, transformando a matriz em triangular superior, conforme definido anteriormente. Esse processo é conhecido como triangularização. Dependendo de cada operação, o valor do determinante fica igual ou muda, conforme dado abaixo.

Seja B a matriz triangular obtida da matriz A. Aplicando as operações elementares, o valor do determinante A depende do valor do determinante B, nas seguintes situações:

a) Quando trocamos uma linha por outra, ou seja, troca de linhas entre si, então

$$\det(A) = -\det(B).$$

b) Quando multiplicamos uma linha por uma constante t não nula, então

$$\det(A) = \frac{1}{t}\det(B)$$

c) Quando multiplicamos uma linha por uma constante não nula e somamos à outra, então o valor do determinante continua sendo o mesmo, isto é,

$$\det(A) = \det(B).$$

Exemplo 2.4 *Encontre o determinante da matriz, pelo método da triangulação*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Fazendo as seguintes operações elementares

$$L_1 \to \frac{1}{3}L_1; L_2 \to L_2 + (-2)L_1; L_3 \to L_3 + 3L_1; L_3 \to L_3 + \frac{9}{13}L_2,$$

respectivamente, obtemos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{63}{13} \end{bmatrix}.$$

Pela propriedade de determinante (ix), podemos calcular o valor do determinante B, multiplicando apenas os elementos da diagonal principal, pois a matriz B está em forma triangular, então temos

$$\det(B) = 1 \cdot \left(-\frac{13}{3}\right)\left(\frac{63}{13}\right) = -\frac{63}{3}.$$

Agora, pelas colocações a) e c) dadas acima, temos o valor do determinante A dado por

$$\det(A) = 3\det(B) = 3\left(-\frac{63}{3}\right) = -63,$$

pois nesse caso, a aplicação da propriedade b), foi feita somente uma vez e todas as outras operações foram feitas aplicando a propriedade c).

Para ser mais simples temos a seguinte observação.

Observação *O cálculo do determinante acima é feito usando as propriedades b) e c). Mas, sempre podemos escrever a matriz dada, numa forma triangular, somente utilizando a terceira operação elementar, ou seja, aplicando a propriedade c). Veja os cálculos abaixo.*

Fazendo as seguintes operações elementares

$$L_2 \to L_2 + (-\frac{2}{3})L_1;\, L_3 \to L_3 + 3L_1;\, L_3 \to L_3 + \frac{9}{13}L_2,$$

respectivamente, obtemos

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{63}{13} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\det(A) = 3\det(B) = 3\left(-\frac{63}{3}\right) = -63,$$

pois nesse caso para chegar até a matriz triangular somente as operações elementares serão utilizandos c).

Matriz inversa

Nesta seção, apresentaremos a matriz inversa e seus cálculos, usando o processo de operações elementares e a matriz aumentada.

Dada uma matriz A quadrada de ordem n. Chamamos inversa de A, a matriz B, tal que

$$AB = BA = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Neste caso, dizemos que A é uma matriz inversível (ou não singular). Denotamos por $B = A^{-1}$.

Observe que nem toda matriz quadrada sempre é inversível. A seguir apresentaremos um resultado que garante a existência da inversa da uma matriz.

Teorema 2.1 *Uma matriz A quadrada é inversível se, e somente se, A é não singular (ou* $\det(A) = |A| \neq 0$ *).*

Teorema 2.2 *Se a matriz A admite inversa então esta inversa é única.*

Propriedades da matriz inversa

A seguir apresentaremos algumas propriedades da matriz inversa.

(i) Se A e B são inversíveis, então

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(ii) Se A é inversível, então

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(iii) Se A não é singular, então A^{-1} também é não singular.

(iv) Se A é inversível, então $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

(v) Se A é inversível, então $A.A^{-1}=I_n$, onde n é a ordem da matriz e vice-versa.

Exemplo 2.5 *Calcular a inversa da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Temos

$$\det(A) = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{existe a inversa de } A.$$

Sabemos que

$$AA^{-1} = I.$$

Seja

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

então

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou,

$$\begin{bmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 3a + 2c & 3b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2a + c = 1 \\ 2b + d = 0 \\ 3a + 2c = 0 \\ 3b + 2d = 1 \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad a = 2, b = -1, c = -3 \quad \text{e} \quad d = 2$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Cálculo de matriz inversa usando operações elementares – Método de Jordan

O método para calcular a inversa da matriz *A*, usando as operações elementares é o seguinte:

1º Passo: *Calcular* $\det(A)$. *Se* $\det(A) \neq 0$, *então existe a inversa da matriz, se* $\det(A) = 0$, *então não existe a inversa. Caso exista a inversa, seguir o próximo passo.*

2º Passo: *Escrever a matriz aumentada* $n \times 2n$ *na forma* $[A \vdots I_n]$, *onde A é a matriz de ordem n e* I_n *é a matriz identidade de ordem n, ou seja, colocar lado a lado a matriz A e* I_n *formando uma matriz aumentada.*

3º Passo: *Transformar a matriz A, escrita no segundo passo, em matriz identidade, usando as operações elementares nas linhas, e aplicando as mesmas operações em* I_n, *dadas no segundo passo, nas linhas correspondentes. Assim obtemos* $[I_n \vdots A^{-1}]$.

Observação *A mesma seqüência de operações que leva a matriz A à sua identidade faz com que a identidade chegue à inversa, ou seja, formando a matriz aumentada* $[A \vdots I_n]$, *e aplicando as operações elementares chegamos a* $[I_n \vdots A^{-1}]$, *isto é,*

$$[A \vdots I_n] \sim \sim \sim \ldots \sim [I_n \vdots A^{-1}].$$

Exemplo 2.6 Encontrar a inversa da matriz, usando as operações elementares

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Resolução: $\det(A) = -1 \neq 0$. Logo, existe a inversa da matriz *A*.

Vamos escrever a matriz *A* e a matriz identidade lado a lado na forma de matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

O objetivo agora é aplicar as operações elementares nas linhas de A e as mesmas operações na matriz I_3. Queremos chegar à matriz A como I_3, e a matriz I_3 transformada passa a ser inversa de A. Veja os passos a seguir.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to L_2 + (-2)L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 \to (-1)L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 \to L_3 + (-2)L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] L_1 \to L_2 + L_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 5 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] L_2 \to L_2 + (-3)L_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 5 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] L_1 \to L_1 + (-5)L_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 18 & -11 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 18 & -11 & -5 \\ 11 & -7 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.7 *Determinar a inversa da matriz, usando o método de Jordan.*

$$\text{A} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Resolução: $\det(A) = -63 \neq 0$. Logo, existe a inversa da matriz A.

Vamos escrever a matriz A na forma aumentada com a matriz I_3.

$$\left[A \vdots I_3\right] = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -7 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo as seguintes operações elementares, na matriz acima,

$$L_1 \to (-\frac{1}{3})L_1\,; L_3 \to L_3 + (-3)L_1\,; L_2 \to L_2 + (-2)L_1\,; L_2 \to 3L_2\,;$$

$$L_3 \to L_3 + (-3)L_2\,; \quad L_3 \to (-\frac{1}{63})L_3\,;\ L_1 \to L_1 + (-\frac{4}{3})L_2\,;$$

$$L_2 \to L_2 + 19L_3\,; \quad L_1 \to L_1 + (-25)L_3\,,$$

respectivamente, obteremos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{64}{63} & -\frac{3}{7} & -\frac{25}{63} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{31}{63} & \frac{2}{7} & \frac{19}{63} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{5}{63} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{63} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{64}{63} & -\dfrac{3}{7} & -\dfrac{25}{63} \\ \dfrac{31}{63} & \dfrac{2}{7} & \dfrac{19}{63} \\ -\dfrac{5}{63} & -\dfrac{1}{7} & \dfrac{1}{63} \end{bmatrix}.$$

Matriz escalonada

Nesta seção apresentaremos a noção de matriz escalonada. Também apresentaremos a matriz canônica, que é caso mais específico da matriz escalonada. Leia com atenção, resolva os exercícios propostos, anote suas dúvidas e busque esclarece-las junto ao Sistema de Acompanhamento.

Dizemos que uma matriz é ***escalonada*** *se, e somente se, o número de zeros que precedem o primeiro elemento não nulo em cada linha, geralmente conhecido como* ***elemento notável****, aumenta de linha em linha, até que restem apenas linhas com elementos nulos. Podemos dizer que uma matriz A é escalonada ou está em forma escalonada, se valem as seguintes condições:*

(i) todas as linha nulas, se houver, estão no final (ou na base) da matriz;

(ii) cada elemento notável não nulo está à direita do elemento notável da linha precedente.

Veja alguns exemplos a seguir.

(i) A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é escalonada;

(ii)A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é escalonada;

(iii) A matriz $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é escalonada;

(iv) A matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é escalonada.

Matriz canônica ou reduzida

Dizemos que uma matriz é ***canônica*** *ou* ***reduzida,*** *quando os* ***elementos notáveis*** *forem todos iguais a um e forem os únicos não nulos nas suas respectivas colunas. Mais precisamente, podemos dizer que uma matriz A é* ***canônica*** *ou* ***reduzida*** *por linhas, quando*

(i) o primeiro elemento não nulo de cada linha não nula de A é igual a 1;

(ii) cada coluna de A, que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha de A, tem todos os outros elementos iguais a zero.

Veja alguns exemplos a seguir:

(i) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ não é canônica;

(ii) A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é canônica;

(iii) A matriz $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é canônica;

(iv) A matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é canônica.

Observações

(i) Qualquer matriz A é equivalente por linhas a uma única matriz canônica ou reduzida por linhas.

(ii) Matriz identidade sempre é matriz canônica.

(iii) Matriz quadrada é equivalente a matriz identidade da mesma ordem, quando $\det(A) \neq 0$, *ou seja, quando existe a sua inversa.*

Exemplo 2.8 *Aplicando as operações elementares, transforme a matriz dada em matriz canônica.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução: Aplicando as seguintes operações

$$L_1 \to \frac{1}{2}L_1\,;\, L_2 \to L_2 + 3L_1\,;\, L_3 \to L_3 + (-4)L_1\,;\, L_2 \to \frac{2}{3}L_2\,;$$

$$L_3 \to L_3 + L_2\,;\; L_1 \to L_1 + (-\frac{1}{2})L_2\,;\, L_3 \to (-\frac{3}{2})L_3\,;$$

$$L_2 \to L_2 + (-\frac{22}{3})L_3\,;\, L_1 \to L_1 + \frac{5}{3}L_3\,.$$

respectivamente, obtemos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 59 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Posto de uma matriz

Seja A uma matriz e seja B a sua forma escalonada. Define-se como posto da matriz A, $p(A)$, *como sendo o número de linhas não nulas da matriz B.*

No caso dos exemplos dados na seção: matriz canônica ou reduzida, temos: $p(A) = 3$, pois a matriz não é canônica, mas é escalonada, $p(B) = 3$, $p(C) = 1$ e $p(D) = 3$.

Observação *Através do posto da matriz podemos identificar se uma matriz quadrada é singular ou não singular, isto é, se A é uma matriz quadrada de ordem n, então*

(i) *A é singular, se e somente se,* $p(A) < n$;
(ii) *A é não singular, se e somente se,* $p(A) = n$.

Exercícios propostos – 2

1) Aplicando o método de triangulação, calcular o valor do determinante das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & 13 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Por meio de operações elementares, transformar as seguintes matrizes quadradas em matrizes identidades equivalentes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Se possível, encontrar as inversas das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 11 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix};;$$

4) Se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

encontrar A, B, $(AB)^{-1}$ e $(BA)^{-1}$.

5) Encontre o valor de x nas seguintes equações:

a) $$\begin{vmatrix} x & -2 & 2x \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -1;$$

b) $$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & -x & 4 \\ x & 0 & x \end{vmatrix} = -2 .$$

6) Quais das seguintes matrizes estão na forma canônica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

7) Transformar as seguintes matrizes em forma canônica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Sistema de equações lineares

Considere o sistema linear de m equações e n incógnitas

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} .$$

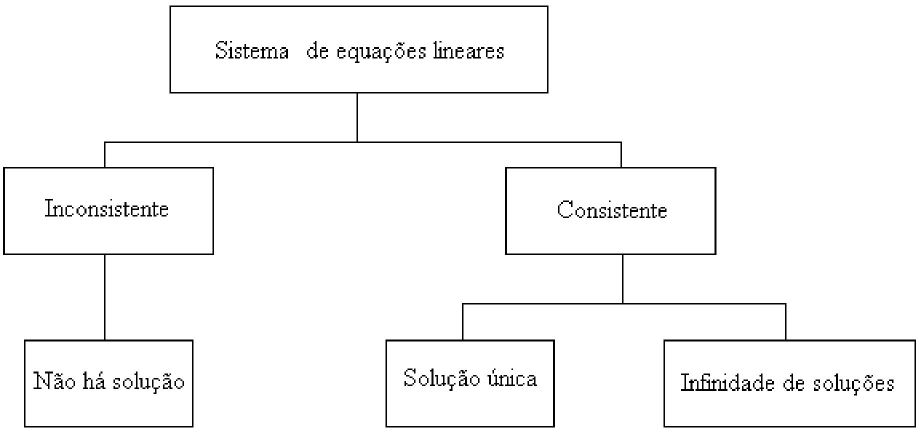
O sistema S pode ser representado pela equação matricial $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

sendo A, a matriz dos coeficientes, X a matriz das incógnitas e B, a matriz dos termos independentes.

Tipos de sistemas

Há dois tipos de sistema de equações lineares, sendo que um deles é conhecido como consistente e o outro, como inconsistente. O sistema inconsistente é aquele que não admite soluções. O sistema consistente é aquele que admite soluções. Há dois tipos de sistemas consistentes, um deles é determinado e o outro é indeterminado. O sistema determinado é aquele que tem uma única solução e o indeterminado é aquele que tem múltiplas ou infinitas soluções. Veja a figura abaixo:



Existência da solução

Um sistema linear $AX = B$ de m equações em n incógnitas é consistente, se e somente se $p(A) = p\left(\left[A \vdots B\right]\right)$. Neste caso, se considerarmos r o número de equações do sistema na forma escalonada, $p(A) = p\left(\left[A \vdots B\right]\right) = r$. Agora temos dois casos a analisar

(i) quando $r = n$, ou seja, o número de equações dadas é igual ao número de equações na forma escalonada, nesse caso, o sistema é determinado, isto é, existe uma única solução;

(ii) quando $r < n$, ou seja, o número de equações dadas é menor que o número de equações na forma escalonada, nesse caso, o sistema é indeterminado, isto é, existem infinitas soluções;

Se $p(A) < p\left(\left[A \vdots B\right]\right)$, ou seja, o posto da matriz A é menor que o posto da matriz aumentada, nesse caso, o sistema é inconsistente, isto é, não existe a solução do sistema.

Resolução de sistema de equações lineares

A seguir, apresentaremos duas formas diferentes de resolver um sistema de equações lineares. Uma se dá com a utilização de matriz escalonada, que é conhecido como processo de eliminação de Gauss-Jordan, e a segunda forma se dá com o uso de matriz inversa.

- **Processo de Eliminação de Gauss-Jordan**

Podemos resolver um sistema de equações lineares aplicando as operações elementares dadas anteriormente, pois sabemos que aplicando operações elementares sobre uma matriz obtemos sempre uma matriz equivalente. Nesse caso, as operações elementares transformam o sistema original em um sistema equivalente. Esse processo é conhecido como processo de eliminação de Gauss-Jordan.

Seja $AX = B$ o sistema dado. Para resolver esse sistema devemos seguir os seguintes passos:

1º Passo: *Formar a matriz aumentada* $[A \vdots B]$.

2º Passo: *Levar a matriz aumentada* $[A \vdots B]$ *à forma escalonada, usando operações elementares sobre as linhas.*

Para ver a solução do sistema, siga as seguintes observações:

Observações

(i) O sistema que corresponde à matriz na forma escalonada obtida acima, tem exatamente as mesmas soluções que o sistema linear dado.

(ii) Para cada linha não nula da matriz na forma escalonada resolvemos a equação correspondente.

(iii) As linhas formadas totalmente por zeros, podem ser desprezadas, pois as equações correspondentes serão satisfeitas para quaisquer valores das incógnitas.

(iv) É conveniente, sempre transformar a matriz aumentada na matriz canônica, pois nesse caso a solução do sistema é imediata.

Veja a seguir alguns exemplos de resolução de sistemas lineares.

Exemplo 2.9 *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} x-2y-2z &= 3 \\ -2x+3y+z &= -4 \\ 3x+2y-z &= 2 \end{cases}$$

Resolução: Podemos escrever o sistema de equações em forma matricial $AX = B$, isto é,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Matriz} \\ \text{dos} \\ \text{coeficientes}}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Matriz} \\ \text{das} \\ \text{incógnitas}}} = \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Matriz dos} \\ \text{termos} \\ \text{independentes}}}$$

Podemos resolver o sistema utilizando a matriz aumentada $[A\vdots B]$ e aplicando as operações elementares. Veja a seguir:

$$[A\vdots B]=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 3 \\ -2 & 3 & 1 & \vdots & -4 \\ 3 & 2 & -1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações elementares,

$$L_2 \to L_2 + 2\ L_1 ; L_3 \to L_3 + (-3)L_1 ; L_2 \to (-1)L_2 ; L_3 \to (-\frac{1}{19})L_3 ;$$

$$L_1 \to L_1 + 2\ L_2 ;\ L_2 \to L_2 + (-3)\ L_3 ; L_1 \to L_1 + (-4)\ L_3 ,$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{17}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{11}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{9}{19} \end{bmatrix}.$$

Isto implica que

$$p(A) = p\left([A\vdots B]\right) = 3 .$$

Logo, o sistema é consistente e determinado.

Portanto,

$$x = \frac{17}{19},\ y = -\frac{11}{19} \text{ e } z = -\frac{9}{19}$$

é a solução do sistema.

Exemplo 2.10 *Resolver o sistema:*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 5 \\ x - 2y + 2z & = 4 . \\ -2x \quad - z & = 3 \end{cases}$$

Resolução: Podemos escrever o sistema de equações na forma matricial $AX = B$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Podemos resolver o sistema, utilizando a matriz aumentada $[A \vdots B]$ e aplicando as operações elementares. Veja a seguir

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 4 & -2 & 2 & \vdots & 4 \\ -2 & 0 & -1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações elementares,

$$L_2 \to L_2 + (-1)\ L_1 ; L_3 \to L_3 + 2\ L_1 ; L_3 \to L_3 + \ L_2 ; L_2 \to (-\frac{1}{4})L_2 ;$$
$$L_3 \to (\frac{1}{4})L_3 ; L_1 \to L_1 + (-2)\ L_2 ; L_2 \to L_2 + (-\frac{1}{4})L_3 ;$$
$$L_1 \to L_1 + (-\frac{5}{2})L_3 ,$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}.$$

Isto implica que

$$p(A) = p\left([A \vdots B]\right) = 3 .$$

Logo, o sistema é consistente e determinado.
Portanto,

$$x = -3 , \ y = -\frac{1}{2} , \ z = 3 ,$$

é a solução do sistema.

Exemplo 2.11 *Resolver o sistema linear de três equações em duas variáveis*

$$\begin{cases} x + 2y & = 8 \\ 3x + 2y & = -4 \\ 5x - 2y & = 4 \end{cases}$$

Resolução: Escrevendo o sistema de equações na forma matricial $AX = B$, temos a seguir a matriz aumentada

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 8 \\ 3 & 2 & \vdots & -4 \\ 5 & -2 & \vdots & 4 \end{bmatrix}.$$

Fazendo as seguintes operações elementares,
$L_2 \to L_2 + (-3)\, L_1$; $L_3 \to L_3 + (-5)\, L_1$; $L_2 \to (-\frac{1}{4})\, L_2$;
$L_3 \to L_3 + (-2)\, L_2$; $L_1 \to L_1 + (-2)\, L_2$,

obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -6 \\ 0 & 1 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & \vdots & 48 \end{bmatrix}.$$

Observe que nesse caso, $p(A) = 2$ e $p\left([A \vdots B]\right) = 3$ e $2 < 3$, portanto o sistema é inconsistente. Logo, não existe solução para o sistema.

- **Resolução de sistema de equações usando a matriz inversa**

Podemos escrever o sistema de equações na forma matricial como $AX = B$. Se a matriz A é quadrada e se existe a inversa A^{-1} de A, então $X = A^{-1} B$.

Exemplo 2.12 *Resolver o sistema de equações utilizando a inversa*

$$\begin{cases} x + 2y + 2z & = 12 \\ 2x + 3y - 2z & = -1 \\ -5x + 2y - z & = -3 \end{cases}$$

Resolução: Resolvemos este exemplo, utilizando A^{-1}. Temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -5 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos a inversa da matriz A, aplicando as operações elementares:

$$L_2 \to L_2 + (-2)\, L_1\,; L_3 \to L_3 + 5\, L_1\,; L_2 \to (-1)L_2\,;$$

$$L_3 \to L_3 + (-12)\, L_2\,;\; L_1 \to L_1 + (-2)\, L_2\,; L_3 \to -\frac{1}{63} L_3\,;$$

$$L_2 \to L_2 + (-6)\, L_3\,; L_1 \to L_1 + 10\, L_3\,,$$

respectivamente, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{63} & \frac{2}{21} & -\frac{10}{63} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{4}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{19}{63} & -\frac{4}{21} & -\frac{1}{63} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{63} & \frac{2}{21} & -\frac{10}{63} \\ \frac{4}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} \\ \frac{19}{63} & -\frac{4}{21} & -\frac{1}{63} \end{bmatrix}.$$

Temos,

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{63} & \frac{2}{21} & -\frac{10}{63} \\ \frac{4}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} \\ \frac{19}{63} & -\frac{4}{21} & -\frac{1}{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{13}{7} \\ \frac{27}{7} \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{7}\;,\; y = \frac{13}{7} \text{ e } z = \frac{27}{7}.$$

Exemplo 2.13 *Resolver o sistema de equações utilizando a inversa*

$$\begin{cases} -2x - y - 3z & = 2 \\ 3x + 2y + z & = 1 \\ 2x + y - z & = 5 \end{cases}$$

Resolução: Temos

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Calculamos a inversa da matriz *A*, aplicando as operações elementares,

$$L_1 \to -\frac{1}{2} L_1 \quad ; \quad L_2 \to L_2 + (-3)\, L_1 \quad ; \quad L_3 \to L_3 + (-2)L_1 \quad ;$$
$$L_1 \to L_1 + (-1)\, L_2 ; L_2 \to 2\, L_2 ; L_3 \to -\frac{1}{4} L_3 ;$$
$$L_2 \to L_2 + 7\, L_3 ; L_1 \to L_1 + (-5)L_3 ,$$

respectivamente, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & 2 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -1 & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & 2 & -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -1 & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & 2 & -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{4} \\ -\frac{17}{4} \\ -\frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{4},\ y = -\frac{17}{4} \text{ e } z = -\frac{7}{4}.$$

Sistema de equações lineares homogêneas

Um sistema linear de forma $AX = 0$, ou seja,

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases},$$

é chamado de sistema homogêneo.

A solução $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ é chamada de solução trivial.

Uma solução $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de um sistema homogêneo em que nem todos os x_i são nulos, é chamado de não trivial.

Observações

(i) Um sistema linear homogêneo sempre é consistente pois sempre tem a solução trivial, mas quando o número de incógnitas (variáveis) é maior do que o número de equações, existe solução não trivial, ou seja, um sistema linear homogêneo de m equações e n incógnitas sempre tem uma solução não trivial, quando $m < n$.

(ii) Quando uma matriz quadrada é singular (ou seja, $\det(A) = 0$*), então o sistema homogêneo* $AX = 0$ *tem uma solução não trivial.*

O método para encontrar as soluções, se existir, de um sistema linear homogêneo, é o mesmo método utilizado para resolver um sistema de m equações lineares em n variáveis.

Exemplo 2.14 *Resolver o sistema homogêneo de 3 equações com 2 variáveis*

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 8y = 0 \\ 5x + 10y = 0 \end{cases}$$

Resolução: A solução trivial é $x = y = 0$. Vamos encontrar a solução não trivial, formando a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & \vdots & 0 \\ 1 & -8 & \vdots & 0 \\ 5 & 10 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

aplicando as operações elementares:

$$L_2 \to \frac{1}{2}L_2 \,; L_2 \to L_2 + (-1)L_1 \,;\; L_3 \to L_3 + (-5)L_1$$

respectivamente, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $x = 0$ e $y = 0$ é a única solução do sistema.

Exemplo 2.15 *Resolver o sistema homogêneo de 2 equações com 3 variáveis.*

$$\begin{cases} x - 3y + 4z & = 0 \\ 2x - 6y + 8z & = 0 \end{cases}$$

Resolução: Solução trivial $x = y = z = 0$.

Para encontrar a solução não trivial ,vamos formar a matriz aumentada e aplicar as operações elementares sobre linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & \vdots & 0 \\ 2 & -6 & 8 & \vdots & 0 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 + (-2)L_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$x - 3y + 4z = 0 \text{ ou}, x = 3y - 4z .$$

Observando a equação acima, podemos dizer que o sistema tem uma infinidade de soluções, pois escolhendo y e z sempre tem-se o valor de x.

Exemplo 2.16 *Resolver o sistema homogêneo de 3 equações com 3 variáveis*

$$\begin{cases} x - 3y + 2z & = 0 \\ 2x + y - z & = 0 \\ 3x + 2y - 4z & = 0 \end{cases}$$

Resolução: A solução trivial é $x = y = z = 0$. Vamos encontrar a solução não trivial, formando matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 3 & 2 & -4 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

aplicando as operações elementares,

$$L_2 \to L_2 + (-2)L_1 \quad ; \quad L_3 \to L_3 + (-3)L_1 \quad ; \quad L_2 \to \frac{1}{7}L_2 \quad ;$$

$$L_3 \to L_3 + (-11)L_2 \quad ; \quad L_1 \to L_1 + 3\,L_2 \quad ; \quad L_3 \to (-\frac{7}{15})L_3 \quad ;$$

$$L_2 \to L_2 + \frac{5}{7}L_3 ; L_1 \to L_1 + \frac{1}{7}L_3 ,$$

respectivamente, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ é a única solução do sistema.

Exercícios propostos – 3

1) Resolver o sistema $AX = B$, se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2) Classificar e resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 5x + 8y & = 34 \\ 10x + 16y & = 50 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x - y - 3z & = 15 \\ 3x - 2y + 5z & = -7 \\ 2x + 3y + 4z & = 7 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z & = 2 \\ 3x - 5y + 4z & = 5 \\ x - 2y - 7z & = -24 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 4x - 3y & = -18 \\ 2y + 5z & = -8 \\ x - 2y - 3z & = 0 \end{cases}$;

3) Resolver os sistemas abaixo pelo método matricial:

$$\begin{cases} -2x + 3y - z & = a_1 \\ x - 3y + z & = a_2 \\ -x + 2y - z & = a_3 \end{cases}$$

a) Para $a_1 = 2, a_2 = 5$ e $a_3 = 7$;
b) Para $a_1 = 1, a_2 = 6$ e $a_3 = 0$;
c) Para $a_1 = 2, a_2 = -8$ e $a_3 = 9$;
d) Para $a_1 = -4, a_2 = -3$ e $a_3 = -2$.

4) Encontre uma matriz não nula X tal que $AX = 3X$, onde

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

5) Calcular x, y e z, de modo que

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Saiba Mais...

Para aprofundar os conteúdos abordados nesta Unidade, consulte:

- ANTON, Howard. **Álgebra linear com apilcações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001. Capítulos 1 e 2.
- MORETTIN, Pedro A., HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton de O. **Cálculo: funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Saraiva, 2005.

RESUMO

Nesta Unidade você identificou o conceito de matriz. Estudou os vários tipos de matrizes tais como: matriz linha, matriz quadrada, matriz transposta, matriz nula, matriz triangular, matriz simétrica etc. Aprendeu como calcular determinante de uma matriz quadrada e recordou os três tipos de operações com matrizes: adição, multiplicação e multiplicação com escalar. Esquematizou como calcular matriz inversa e apresentamos a noção de matriz escalonada. Finalmente você aplicou matrizes em resolução de sistemas de equações lineares.

RESPOSTAS

• Exercícios propostos – 1

1) a) $AB - BA = \begin{bmatrix} -16 & 17 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$;

b) $DE - ED = \begin{bmatrix} -5 & 12 & -20 \\ -15 & 6 & -69 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$;

c) $C - D$ não existe;

d) $B^2 - A = \begin{bmatrix} 4 & -17 \\ -6 & 21 \end{bmatrix}$;

e) $D^2 - E = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & -11 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

2) a) $CA = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 0 \\ -2 & -19 \end{bmatrix}$;

b) $AB = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 22 & -4 \\ -6 & 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$;

c) BC não existe;

d) $CB = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 4 & 2 \\ 11 & 3 & 20 & -5 \\ 21 & -15 & 14 & -13 \end{bmatrix}$.

3) a) $AB = \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$;

b) $BA = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -11 & -6 & -22 \\ 27 & 16 & 40 \end{bmatrix}$;

c) $AC + A = \begin{bmatrix} -9 & -13 & 52 \\ -10 & -8 & 33 \end{bmatrix}$;

d) $AB - F = \begin{bmatrix} 20 & 21 \\ 24 & 3 \end{bmatrix}$;

e) $BA + CE = \begin{bmatrix} 58 & 40 & 52 \\ -60 & -34 & -55 \\ 55 & 4 & 42 \end{bmatrix}$;

f) $A(BD) = \begin{bmatrix} 16 & 98 \\ -30 & 70 \end{bmatrix}$;

g) $(AB)D = \begin{bmatrix} 16 & 98 \\ -30 & 70 \end{bmatrix}$;

h) $A(C + E) = \begin{bmatrix} 31 & 26 & 31 \\ 34 & 22 & 20 \end{bmatrix}$;

i) $AC + AE = \begin{bmatrix} 31 & 26 & 31 \\ 34 & 22 & 20 \end{bmatrix}$;

j) $(F + D)A = \begin{bmatrix} -17 & -10 & -26 \\ 35 & 19 & 71 \end{bmatrix}$.

4) a) $A^2 + 2A = \begin{bmatrix} 5 & 27 \\ -9 & 32 \end{bmatrix}$;

b) $A^2 + B^2 + 2AB = \begin{bmatrix} 54 & 15 \\ 21 & 7 \end{bmatrix}$;

c) $(A + B)^2 = \begin{bmatrix} 44 & 36 \\ 18 & 17 \end{bmatrix}$;

d) $AB^2 + BA = \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ 19 & -12 \end{bmatrix}$;

e) $A^3 + 3A^2 + 3A + 2 = \begin{bmatrix} -8 & 180 \\ -60 & 172 \end{bmatrix}$;

f) $B^3 - 2B^2 - 3B + 4 = \begin{bmatrix} 36 & 8 \\ 24 & -12 \end{bmatrix}$.

5) a) $a = \frac{4}{3}; b = \frac{1}{3}; \ c = -\frac{2}{3}$ e $d = -\frac{8}{3}$;

b) $a = -\frac{1}{2}$; $b = 3$; $c = -3$ e $d = -2$.

6) a) $(3D - F)^t D = \begin{bmatrix} 56 & -16 \\ -26 & 91 \end{bmatrix}$;

b) $A^t(D + F) = \begin{bmatrix} -8 & 27 \\ -4 & -18 \\ 24 & 36 \end{bmatrix}$;

c) $B^t A^t = \begin{bmatrix} -8 & 15 \\ -10 & -21 \end{bmatrix}$;

d) $(2C)A^t = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -8 & -42 \\ -8 & 48 \end{bmatrix}$;

e) $(B^t + A)A^t = \begin{bmatrix} 21 & 6 \\ -19 & 9 \end{bmatrix}$.

- **Exercícios propostos – 2**

1)
- A = MATRIZ([[1, 2, -3], [0, 5, 16], [0, 0, 236/5]]); det (A) = –236;
- B = MATRIZ([[2, 7, 3], [0, 2, 1], [0, 0, 11/4]]), det(C) = –11.

3)
- A^{-1} = MATRIZ([[2, 1, 0], [-9, -6, -2], [3, 2, 1]]);
- B^{-1} = MATRIX([[34/41, 7/41, -18/41], [11/41, -11/41, -1/41], [-3/41, 3/41, 4/41]]);
- Não existe a inversa de C;
- D^{-1} = MATRIZ([[-11, 9, 5], [9, -7, -4], [5, -4, -2]]);

4)
- A = MATRIZ([[-1/3, 2/3], [2/3, -1/3]]);
- B = MATRIZ([[2/7, 1/7], [3/7, -2/7]]);

- $(AB)^{-1}$ = MATRIZ([[4, 5], [-1, 4]]);
- $(BA)^{-1}$ = MATRIZ([[8, -3], [7, 0]]).

5) a) $x = 1$; b) $x = 1$, $x = 1/4$.

6)
- A = sim;
- B = sim;
- C = não;
- D = sim.

7) **Formas canônicas das matrizes:**
- A = MATRIZ([[1, 0, -2], [0, 1, 1], [0, 0, 0]]);
- B = MATRIZ([[1, 0, 1/-2], [0, 1, 3/2]]);
- C = MATRIZ([[1, 0, -1], [0, 1, 2]]).

- **Exercícios propostos – 3**

1) $x = 8, y = 2$.

2) a) não existe (inconsistente);
b) $x = 3,\ y = 3,\ z = -2$ (determinado);
c) $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$ (determinado);
d) $x = 0,\ y = 6,\ z = -4$ (determinado);

3) Solução geral: $x = -a_1 - a_2,\ y = -a_2 - a_3, z = a_1 - a_2 - 3a_3$.
a) $x = -7,\ y = -12, z = -24$;
b) $x = -7,\ y = -6, z = -5$;
c) $x = 6,\ y = -1, z = -17$;
d) $x = 7,\ y = 5, z = 5$.

4) a) $x = -\frac{1}{4}y = z$; b) $x = y = \frac{1}{2}z$

5) $x = \frac{128}{17}$, $y = \frac{121}{17}$, $z = -\frac{18}{17}$.