UNIDADE

3

Funções

Funções

Objetivo

Nesta unidade, você vai identificar os diferentes tipos de funções e suas operações e aplicar funções na resolução de problemas em situações práticas.

Funções

Funções

Você, ao longo do curso, quando apresentado às disciplinas de Economia, terá oportunidade de fazer aplicações nos cálculos econômicos, a fim de poder entender melhor os problemas relacionados a economia. Este tema será aplicado nas disciplinas de Administração da Produção e Administração de Materiais. A partir deste momento, passaremos a nos preocupar com os aspectos das funções reais de uma variável real.

Um dos conceitos mais importantes da matemática é o conceito de função. Em muitas situações práticas, o valor de uma quantidade pode depender do valor de uma segunda. A procura de carne pelo consumidor, por exemplo, pode depender do seu preço atual no mercado. A quantidade de ar poluído, numa área metropolitana, depende do número de veículos na rua. O valor de uma garrafa de vinho, pode depender da safra. Essas relações são matematicamente representadas por funções.

Sejam A e B dois conjuntos. Uma função é uma relação em que a cada elemento de A, se associa um único elemento de B, e é indicada por $f: A \rightarrow B$.

A relação entre os conjuntos A e B é dada através de uma regra de associação expressa na forma $y = f(x)$.

Essa regra diz, que o elemento $x \in A$, chamado de variável independente, está relacionado de modo único ao elemento $y = f(x) \in B$, chamado de variável dependente. O conjunto A é chamado de domínio e indicamos $A = Dom(f)$ e o conjunto B, de contradomínio. O conjunto imagem, indicado como $\text{Im}(f)$ é o conjunto dos elementos de B aos quais foram associados elementos de A, isto é,

$$\text{Im}(f) = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}.$$

O número $y \in B, y = f(x)$ recebe o nome de valor da função f no ponto x.

Exemplo 3.1 *A função indicada por* $f:[0,10]\to\mathbb{R}$ *tal que,* $y = f(x) = x^2 + 1$, *é a relação cujo domínio é* $[0,10]$ *e contradomínio é o conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais. A regra que associa a todo ponto* $x \in [0,10]$ *um único número real* $f(x) = x^2 + 1$. *O conjunto imagem é o conjunto dos números reais não negativos. Deste modo,*

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1,$$
$$f(1) = 1^2 + 1 = 2,$$
$$f(6) = 6^2 + 1 = 37,$$
$$f(10) = 10^2 + 1 = 101.$$

Exemplo 3.2 *Sejam* $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ *e* $f : A \to [0,+\infty)$ *tal que* $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, *isto é, a regra que associa a todo ponto* $x \in A$ *o número real* $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ *em* $[0,+\infty)$. *Assim,*

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2,$$
$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4,$$
$$f(0{,}99) = \frac{1}{0{,}99 - 1} = \frac{1}{-0{,}01} = -100,$$
$$f(3) = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2},$$
$$f(100) = \frac{1}{100-1} = \frac{1}{99} = 0{,}0101.$$

Observação *Quando o domínio e o contradomínio de uma função estão contidos no conjunto dos números reais, a função é chamada de uma função real de variável real.*

Duas funções são iguais, somente quando têm os mesmos domínios, contradomínio e regra de associação.

Exemplo 3.3 *As funções* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, *e* $g:(-1,\ 1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2$, *têm domínios* $Dom(f)=\mathbb{R}$ *e* $Dom(g)=(-1,\ 1)$. *Essas funções são distintas, pois têm domínios diferentes, apesar de terem a mesma regra de associação e o mesmo contradomínio. Os conjuntos imagem de ambas são também distintos:* $\text{Im}(f)=[0,\ +\infty)$ *e* $\text{Im}(g)=[0,\ 1)$.

Operações com funções

Sejam f e g duas funções definidas num mesmo conjunto A.

- **Soma das funções**

A função* s definida em A, tal que $s(x)=f(x)+g(x)$ recebe o nome de função SOMA de f e g.

Exemplo 3.4 *Se* $f(x)=x^3$ *e* $g(x)=3x^2+2$, *com* $x\in\mathbb{R}$, *então a função* s *definida em* $\mathbb{R}$, *tal que* $s(x)=x^3+3x^2+2$ *é a soma de* f *e* g.

- **Produto de funções**

A função p definida em A, tal que $p(x)=f(x).g(x)$ recebe o nome de ***função produto*** de f e g.

Exemplo 3.5 *Se* $f(x)=x^3$ *e* $g(x)=3x^2+2$, *com* $x\in\mathbb{R}$, *então a função* p *definida em* $\mathbb{R}$, *tal que* $p(x)=x^3.(3x^2+2)=3x^5+2x^3$ *é o produto de* f *e* g.

- **Divisão de funções**

Se $g(x)\neq 0$ para todo $x\in A$, a função q definida em A, tal que $q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é o quociente de f e g.

Exemplo 3.6 *Sejam* $f(x)=x^4$ *e* $g(x)=x^4+2$, *com* $x\in\mathbb{R}$. *A função* q *definida em* $\mathbb{R}$, *tal que* $q(x)=\dfrac{x^4}{x^4+2}$ *é o quociente das funções* f *e* g.

GLOSSÁRIO

Função*: Na Matemática, função significa uma relação (com algumas características determinadas) entre membros de dois ou mais conjuntos. Funções descrevem relações matemáticas especiais entre dois objetos, *x* e *y*. O objeto *x* é chamado o argumento da função *f* e o objeto y que depende de *x* é chamado imagem de *x* pela *f*.
Função: Em Administração, função é o que relaciona determinado componente ao objetivo de um sistema administrativo. Exemplo: função marketing. **Fonte:** http://pt.wikipedia.org/wiki/

Gráfico de uma função

O gráfico de uma função $f : A \to B$, dada como $y = f(x)$, é o conjunto dos pontos do plano, cujas coordenadas no sistema cartesiano retangular são dadas por $(x, f(x))$, onde $x \in A$. Para isto, construímos um quadro $(x, f(x))$, atribuindo a x valores convenientes.

Vejamos alguns exemplos de gráficos:

Exemplo 3.7 *Representar graficamente a função* $y = f(x) = 3 - x$, $x \in [0,3]$.

Resolução: Temos o seguinte quadro:

x	0	1	2	3
$y = f(x) = 3 - x$	3	2	1	0

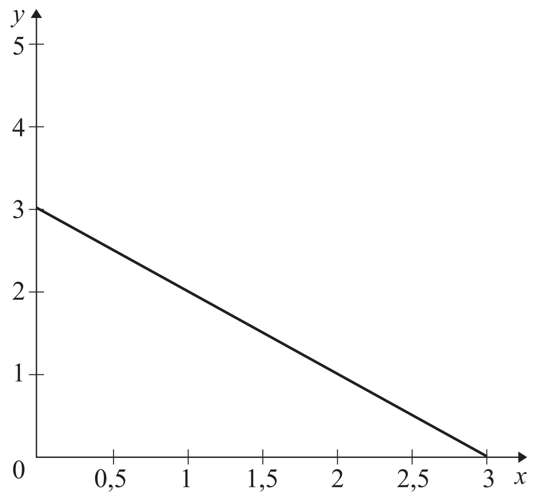


Figura 3.1

Exemplo 3.8 *Representar graficamente a função* $y = f(x) = \sqrt{x - 1}$, $x \geq 1$.

Resolução: Temos o seguinte quadro:

x	1	2	5	10	.	.	.
$y = f(x) = \sqrt{x - 1}$	0	1	2	3	.	.	.

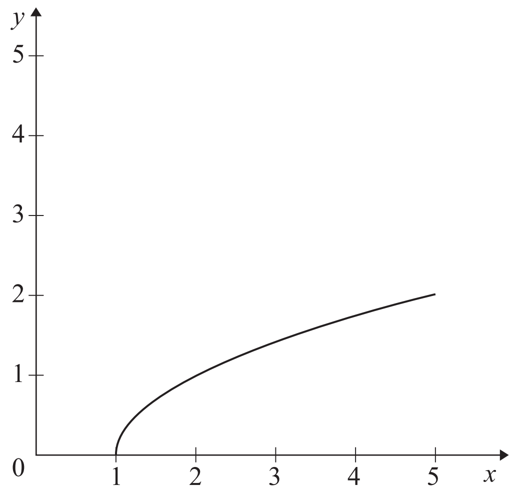


Figura 3.2

Exemplo 3.9 *Representar graficamente a função:*

$$y = f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \leq 0 \\ x, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Resolução: Tendo $x \leq 0$, $y = f(x) = 2$ e para $x > 0$, $y = f(x) = x$, construímos o seguinte quadro.

x	.	.	.	-2	-1	0	1	2	.	.	.
y	.	.	.	2	2	2	1	2	.	.	.

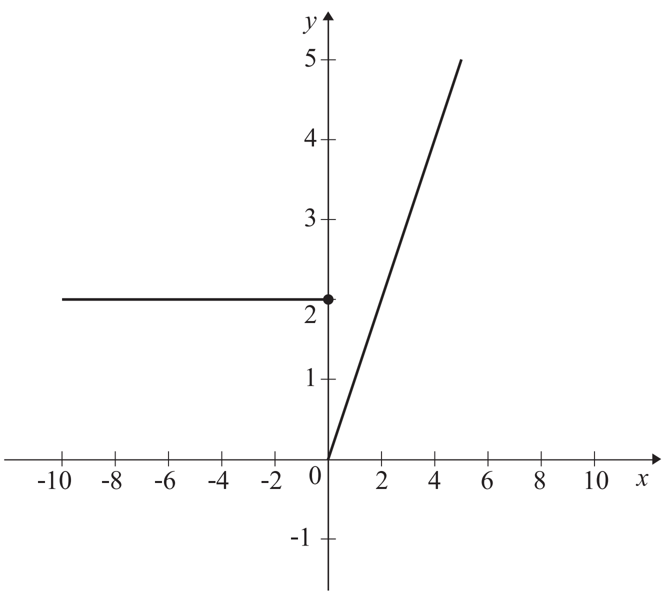


Figura 3.3

Uma função f tal que $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in Dom(f)$, é chamada de função par. Quando $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in Dom(f)$, a função é chamada de função ímpar.

Exemplo 3.10 A função $f:[-2, 2] \to \mathbb{R}$, dada pela $f(x) = x^2$ é par, pois $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, $\forall x \in [-2, 2]$. A função $f(x) = x^3, x \in [-2, 2]$, é ímpar. De fato, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Observação *Quando uma função é par, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Y. Isso significa que, se o ponto (x, y) pertence ao gráfico, então o ponto $(-x, y)$ também pertence. Quando uma função é ímpar, seu gráfico é simétrico em relação à origem. Isso significa que, se o ponto (x, y) pertence ao gráfico, então o ponto $(-x, -y)$ pertence também ao gráfico.*

Vamos verificar se você está acompanhando tudo até aqui? Procure então, resolver os exercícios propostos.

Exercícios propostos – 1

1) Representar graficamente as funções dadas por:

a) $f:[0, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1$.

b) $y = 5 - 3x, x \in [-4, 3]$.

c) $y = x^2 - 4x, x \in [0, 4]$.

d) $y = \begin{cases} -2, & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

e) $y = \dfrac{1}{3 - x}, x > 3$.

2) Verifique se as funções dadas são iguais:

$A = \{x \in \mathbb{R}, / x > 0\}$ e $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ e $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x}$

3) Dadas as funções $f(x) = x^3 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$, e $g(x) = 2x + 5$, $x \in (0, \infty)$, obtenha as funções soma, produto e quociente de f com g.

Agora, vamos estudar alguns tipos elementares de função.

Se ao final deste primeiro estudo sobre funções (e demais tópicos) tratado até aqui você continua com dúvidas ou não conseguiu resolver os exercícios propostos, não desista! Releia o material, veja os exemplos mais uma vez, refaça os exercícios! Consulte as referências na bibliografia. E busque esclarecimentos junto ao Sistema de Acompanhamento

Funções elementares

A seguir apresentaremos algumas funções elementares.

- **Função constante**

A função que associa cada elemento do seu domínio a um mesmo elemento do contradomínio, é chamada de função constante.

Exemplo 3.11 *A função* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$, *é uma função constante. Seu gráfico no intervalo* $\left[0, 2\right]$ *do seu domínio é o seguinte:*

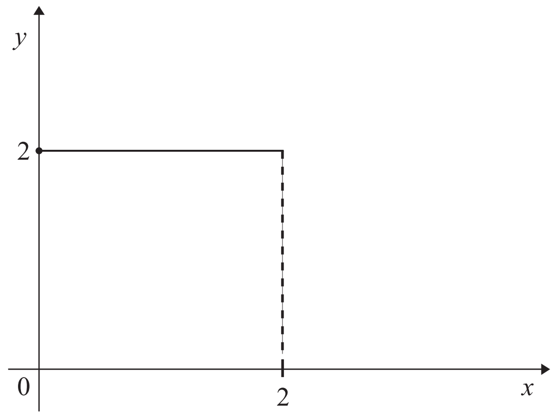


Figura 3.4: NO INTERVALO $[0,\ 2]$

- **Funções afim e linear**

Chama-se função afim qualquer função dada por $f(x) = ax + b$, onde os coeficientes a e b são números reais dados. Quando $b = 0$, a função é chamada de linear. O gráfico da função afim com domínio e contradomínio $\mathbb{R}$ é uma reta com coeficiente angular igual a a, e que intercepta os eixos coordenados X e Y nos pontos $\left(-\dfrac{b}{a},\ 0\right)$ e $(0,\ b)$, respectivamente.

Exemplo 3.12 *O gráfico da função afim, tomando-se* $a = 1$ *e* $b = -1$*, ou seja,* $y = f(x) = x - 1$*, no intervalo* $[-1,\ 2]$*, é mostrado a seguir.*

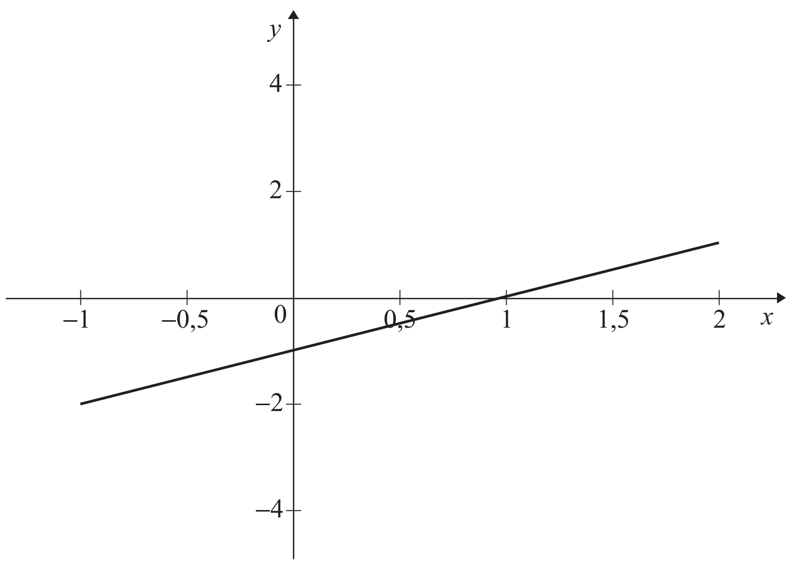


Figura 3.5

Uma reta pode ser representada por uma função afim da forma $y = ax + b$. Precisamos apenas determinar a e b.

- **Função módulo**

É a função definida por $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

O gráfico da função módulo é o seguinte:

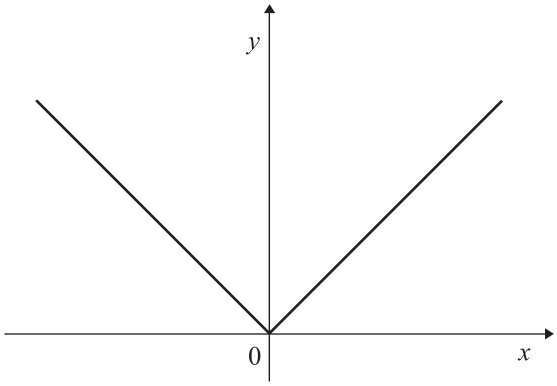


Figura 3.6

- **Função quadrática**

Sejam a, b e c números reais quaisquer, com $a \neq 0$. A função f, definida em $\mathbb{R}$ e dada por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ recebe nome de função quadrática.

Exemplo 3.13

(i) $y = f(x) = x^2 - 9x + 14$ $\qquad a = 1; b = -9; c = 14$.

(ii) $y = f(x) = 5x^2 + 25x$ $\qquad a = 5; b = 25; c = 0$.

(iii) $y = f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}$ $\qquad a = -\frac{2}{3}; b = \frac{3}{4}; c = -\frac{1}{5}$.

- **Função polinomial**

É toda função cuja regra de associação é um polinômio, ou seja,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

onde os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais e n é um número natural, chamado de grau de $f(x)$.

Exemplo 3.14 *As funções afim e linear são exemplos de funções polinomiais de grau* $n = 1$. *A função quadrática* $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, *é uma função polinomial de grau* $n = 2$. *A função* $f(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ *é uma função polinomial de grau* $n = 4$.

- **Função racional**

É toda função f, cuja regra de associação é do tipo

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ ($q(x) \neq 0$) são funções polinomiais. Uma função racional está definida em qualquer domínio que não contenha raízes do polinômio $q(x)$.

Exemplo 3.15 *Determine o maior domínio possível da função racional*

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}.$$

Resolução: Uma função racional, com esta regra de associação, está definida em todo ponto x, tal que $x + 1 \neq 0$. Portanto, o maior domínio possível é o conjunto $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\right\}$.

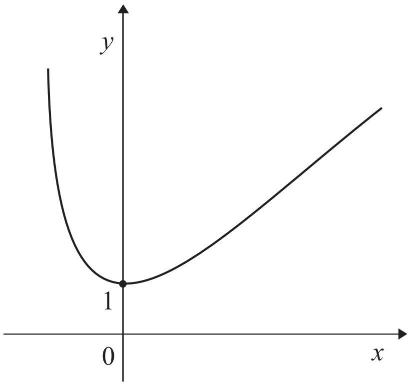


Figura 3.7

Função exponencial e logarítmica

Função exponencial de base a

Seja a um número positivo e $a \neq 1$. A função $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, dada por $f(x) = a^x$, é chamada de função exponencial de base a. Os gráficos dessas funções, são os seguintes:

Gráfico da função exponencial quando $a > 1$.

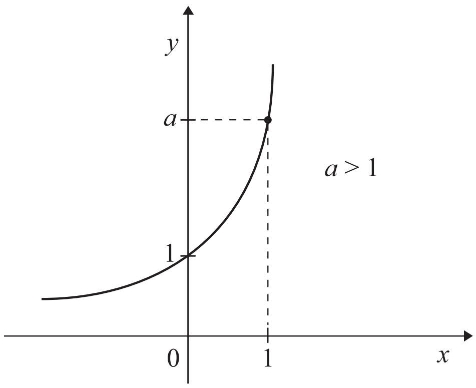


Figura 3.8

Gráfico da função exponencial, quando $0 < a < 1$.

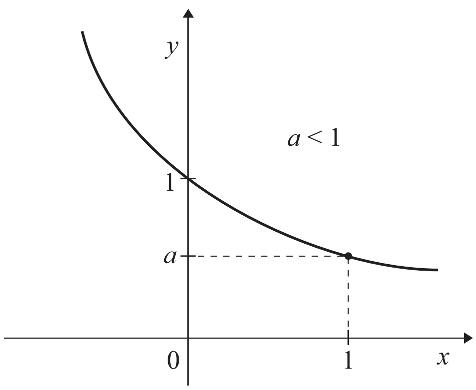


Figura 3.9

O conjunto imagem da função exponencial é o intervalo $(0, +\infty)$.

Apresentaremos, a seguir, as propriedades de exponenciação.

- **Propriedades da função exponencial**

As seguintes propriedades valem para quaisquer $a, b, x, y \in R$ com $a > 0, b > 0$:

P1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

P2. $(a^x b^x) = (ab)^x$.

P3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

P4. $\left(\dfrac{a^x}{b^x}\right) = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

P5. $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$.

A função exponencial mais comum em aplicações é a função exponencial de base $a = e$ onde $e = 2{,}71828...$ é a constante de Euler, que é um número irracional. A função, nesse caso, é chamada de função exponencial natural ou, simplesmente, função exponencial.

Função logaritma

Seja a um número positivo e $a \neq 1$. A função definida por $y = f(x) = \log_a x$ $x > 0$, recebe o nome de função logarítmico de base a.

Vejamos os gráficos da função logarítmica:

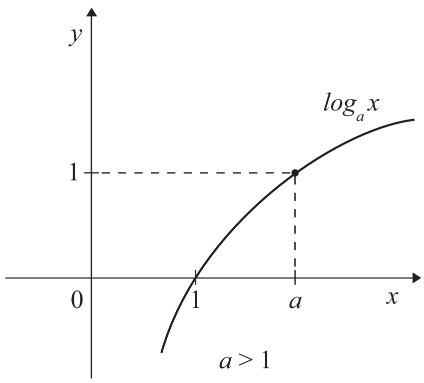


Figura 3.10

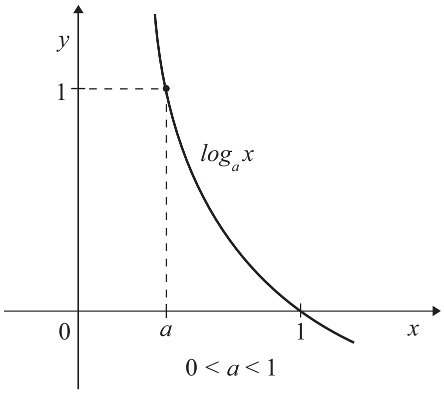


Figura 3.11

- **Propriedades da função logaritma**

Para todo $x, y > 0$, valem as seguintes propriedades.

P1. Propriedade do produto:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

P2. Propriedade do quociente:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

P3. Propriedade da potenciação:

$$\log_a(y^x) = x\log_a y.$$

O logaritmo, na base $a = e$, é chamado de logaritmo natural e é comum indicá-lo como $\ln x$.

Função composta

Dadas as funções f e g, a *função composta*, denotada por $F(x) = f \circ g$, é definida por

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

e o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números x no domínio de g, tal que $g(x)$ esteja no domínio de f.

Geralmente,

$$f \circ g \neq g \circ f .$$

Exemplo 3.16 *Sejam* f *a função definida por* $\sqrt{x-1}$ *e* g *por* $g(x) = x + 5$. *Determinar*

a) $F(x) = f \circ g$, *e determine o domínio de* F.
b) $G(x) = g \circ f$, *e determine o domínio de* G.

Resolução:

a)

$$F(x) = \left(f \circ g\right)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(x+5\right) = \sqrt{x+5-1} = \sqrt{x+4}$$

O domínio de g é $\left(-\infty,+\infty\right)$, e domínio de f é $\left[1,+\infty\right)$. Assim sendo o domínio de F é o conjunto dos números reais, para os quais $x + 4 \geq 0$, ou seja, $x \geq -4$, ainda, $\left[-4,+\infty\right)$.

b) $G(x) = \left(g \circ f\right)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(\sqrt{x-1}\right) = \sqrt{x-1} + 5$.

Como o domínio de f é $\left[1,+\infty\right)$. E o domínio de g é $\left(-\infty,+\infty\right)$, o domínio de G é $\left[1,+\infty\right)$.

Exemplo 3.17 *Sejam* f *a função definida por* $f(x) = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ *e* g *por* $g(x) = x^2 - 4$. *Determinar*

a) $F(x) = f \circ g$, *e determine o domínio de* F.
b) $G(x) = g \circ f$, *e determine o domínio de* G.

Resolução:

a) $F(x) = \left(f \circ g\right)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(x^2 - 4\right) = \left(x^2 - 4\right)^{-2}$.

O domínio de g é $\left(-\infty,+\infty\right)$, e o domínio de f é $\mathbb{R} - \left\{0\right\}$. Assim sendo, o domínio de F é o conjunto dos números reais, tal que $x \neq \pm 2$.

b) $G(x) = \left(g \circ f\right)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x^4} - 4$.

O domínio de g é $\left(-\infty,+\infty\right)$, e o domínio de f é $\mathbb{R}-\left\{0\right\}$. Assim sendo, o domínio de G é $\mathbb{R}-\left\{0\right\}$.

Exemplo 3.18 *Sejam f a função definida por $f(x)=\log x$ e g por $g(x)=x-5$. Determinar*

a) $F(x)=f\circ g$, *e determine o domínio de* F.
b) $G(x)=g\circ f$, *e determine o domínio de* G.

Resolução:
a) $F(x)=\left(f\circ g\right)(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(x-5\right)=\log\left(x-5\right)$.

O domínio de g é $\left(-\infty,+\infty\right)$, e o domínio de f é $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\right\}$. Assim sendo, o domínio de F é o conjunto dos números reais tal que $x>5$.

b) $G(x)=\left(g\circ f\right)(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(\log x\right)=\log x-5$.

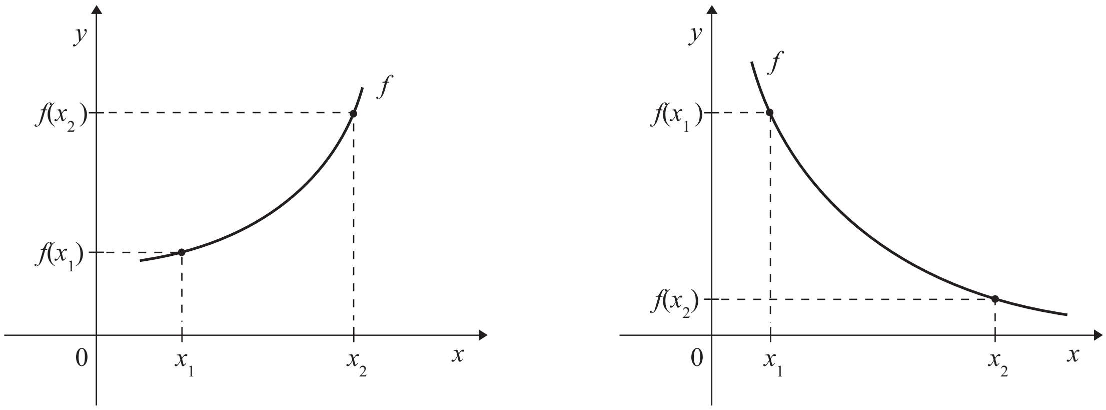
O domínio de g é $\left(-\infty,+\infty\right)$, e odomínio de f é $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\right\}$ Assim sendo, o domínio de G é $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\right\}$.

Funções crescentes e decrescentes

Seja I um intervalo qualquer da reta e f uma função definida em I. Sejam x_1 e x_2 com $x_1<x_2$ dois pontos quaisquer de I.

Dizemos que f é uma função crescente em I, quando $f(x_1)\le f(x_2)$, ou seja, à medida que aumenta o valor de x, dentro do intervalo I, as imagens correspondentes também aumentam.

Analogamente, dizemos que f é uma função decrescente em I quando $f(x_1)\ge f(x_2)$, ou seja, à medida que aumenta o valor de x, dentro do intervalo I, as imagens correspondentes vão diminuindo. A figura 3.12 ilustra essas duas situações



função crescente
$x_1 < x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$

função decrescente
$x_1 < x_2$ e $f(x_1) > f(x_2)$

Figura 3.12

Exemplo 3.19 *A função da figura 3.8,* $f(x) = a^x$ *,* $a > 1$ *é uma função crescente para qualquer número real* x *. A função da figura 3.11,* $y = f(x) = \log_a x$ *,* $x > 0$ *e* $0 < a < 1$ *é uma função decrescente para todo* $x > 0$ *.*

Função inversa

Uma função $f : A \to B$ é inversível quando a relação inversa da f também é uma função. Nesse caso, diz-se que a f tem função inversa $f^{-1} : B \to A$. Dada uma função $f : A \to B$, $y = f(x)$, a relação inversa da f e indicaremos por $x = f^{-1}(y)$.

- **Propriedades da função inversa**

Seja f uma função inversível e f^{-1} a sua inversa. Então, temos as seguintes propriedades:

P1. $Dom(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f)$;

P2. $\mathrm{Im}(f^{-1}) = Dom(f)$;

P3. Seja $f: A \to B$ uma função inversível. A função $g: B \to A$ é função inversa da f, quando para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ tem-se $g\big(f(x)\big) = x$ e $f\big(g(y)\big) = y$.

P4. O gráfico da f^{-1} é simétrico ao gráfico de f em relação à reta diagonal $y = x$. Isso significa que, se o ponto (x, y) pertence ao gráfico da f, então o ponto (y, x) pertence ao gráfico da f^{-1}.

Exemplo 3.20 *As funções* $f:[0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$, *e* $g:[0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(y) = \sqrt{y}$, *são inversas uma da outra, pois*

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = x, \forall x \in Dom(f),$$

e

$$f(g(y)) = (g(y))^2 = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y, \forall y \in Dom(g), \textit{ onde } g = f^{-1}.$$

Note que,

$$Dom(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) \text{ e } \mathrm{Im}(f^{-1}) = Dom(f).$$

- **Regra Prática**

Dada a regra de associação da f, $y = f(x)$. Para se obter a regra que define f^{-1}, procede-se assim:

1º: A partir de $y = f(x)$, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;

2º: Expressamos y em função de x, transformando algebricamente a expressão $x = f(y)$ em $y = f^{-1}(x)$.

Exemplo 3.21 *Seja* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $y = f(x) = 3x - 5$. *Determine a função inversa* $f^{-1}(x)$.

Resolução: Vamos aplicar a regra prática.

1º: Trocando x por y e y por x, vem $x = 3y - 5$;

2º: Expressando y em função de x, vem

$$x = 3y - 5 \Rightarrow 3y = x + 5 \Rightarrow y = \frac{x+5}{3} = f^{-1}(x).$$

Portanto, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{3}$ é a função inversa de $y = f(x) = 3x - 5$.

Exemplo 3.22 *Seja* $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{5}\right\}$ *definida por*

$$y = f(x) = \frac{2x-3}{5x-7}.$$

Determine a função inversa $f^{-1}(x)$.

Resolução: Aplicando a regra prática, temos

$$\begin{aligned} y = f(x) = \frac{2x-3}{5x-7} &\Rightarrow x = \frac{2y-3}{5y-7} \\ &\Rightarrow x(5y-7) = 2y-3 \\ &\Rightarrow 5xy - 7x = 2y - 3 \\ &\Rightarrow 5xy - 2y = 7x - 3 \end{aligned}$$

Logo,

$$y(5x-2) = 7x - 3 \Rightarrow y = \frac{7x-3}{5x-2} = f^{-1}(x).$$

Portanto, $f^{-1}(x) = \dfrac{7x-3}{5x-2}$ é a função inversa de $y = f(x) = \dfrac{2x-3}{5x-7}$.

Exemplo 3.23 *O número* x *de certo produto, demandado numa loja, relaciona-se com o preço unitário* (p), *conforme a função demanda* $p = \dfrac{21-x}{3}$. *Determine a função inversa da função demanda* p, *ou seja, determine o preço em função da quantidade demandada.*

Resolução: Como $p > 0$ devemos ter $\dfrac{21-x}{3} > 0 \Rightarrow 21 - x > 0 \Rightarrow 21 > x$ ou $0 < x < 21$. Aplicando a regra prática, temos

$$p = \frac{21-x}{3} \Rightarrow x = \frac{21-p}{3} \Rightarrow 3x = 21 - p \Rightarrow p = 21 - 3x, \text{ para } 0 < x < 7.$$

Portanto, $p = 21 - 3x$ é a função inversa de $p = \dfrac{21-x}{3}$.

Exemplo 3.24 *Determinar a função inversa da função demanda*

$$p = \sqrt{\frac{144-x}{9}}.$$

Resolução: Como $x > 0$, devemos ter

$$\sqrt{\frac{144-x}{9}} > 0 \Rightarrow \frac{144-x}{9} > 0 \Rightarrow 144 - x > 0 \Rightarrow 144 > x \text{ ou}$$

$$0 < x < 144.$$

Assim,

$$p = \sqrt{\frac{144-x}{9}} = \left(\frac{144-x}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow p^2 = \left(\left(\frac{144-x}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{144-x}{9},$$

ou seja,

$$p^2 = \frac{144-x}{9}.$$

Aplicando a regra prática, temos

$$p^2 = \frac{144-x}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{144-p}{9} \Rightarrow 9x^2 = 144 - p \Rightarrow p = 144 - 9x^2$$

$$p = 144 - 9x^2 > 0 \Rightarrow 144 > 9x^2 \Rightarrow$$

$$12^2 > 3^2 x^2 \Rightarrow 12 > 3x \Rightarrow \frac{12}{3} > x \Rightarrow 4 > x,$$

ou,

$$0 < x < 4.$$

Portanto, $p = 144 - 9x^2$ é a função inversa de $p = \sqrt{\dfrac{144-x}{9}}$.

Funções trigonométricas

- **A função seno e a função cosseno**

Considere a circunferência de raio unitário e centro na origem do sistema ortogonal de coordenadas, chamada de círculo trigonométrico.

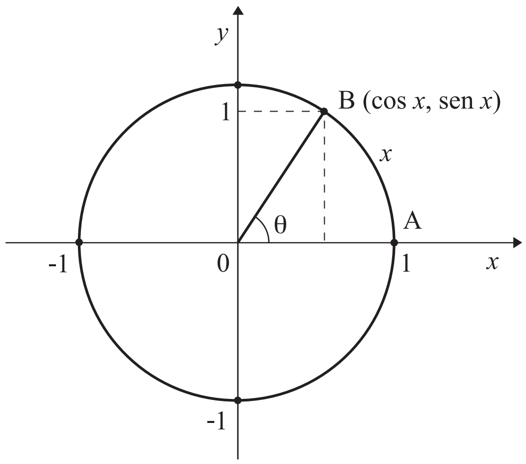


Figura 3.13: O Círculo Trigonométrico

Vamos convencionar o seguinte: o ponto A é a origem dos arcos sobre a circunferência, e o comprimento x de um arco é positivo quando o mesmo é obtido a partir de A, deslocando-se, no sentido anti-horário e, negativo, se no sentido horário.

Chama-se função seno a função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, indicada como $f(x) = senx$, que associa a cada número real x, entendido como o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ da circunferência, a ordenada do ponto B no eixo y.

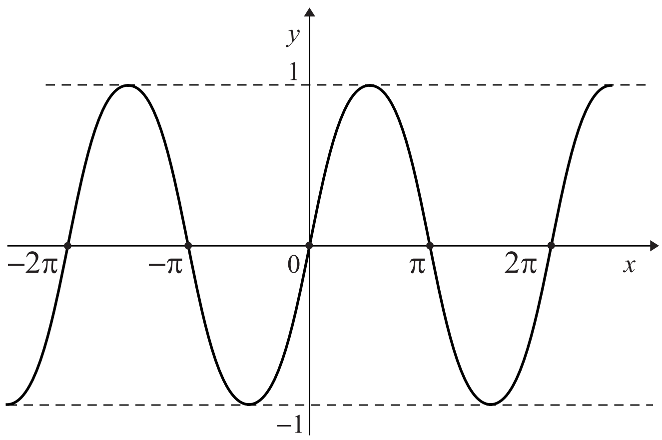


Figura 3.14: Gráfico da função seno.

A função cosseno é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indicada por $f(x) = \cos x$, que associa cada número real x, entendido aqui também como o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ da circunferência unitária, a abcissa do ponto B no eixo $0X$.

Gráfico da função cosseno:

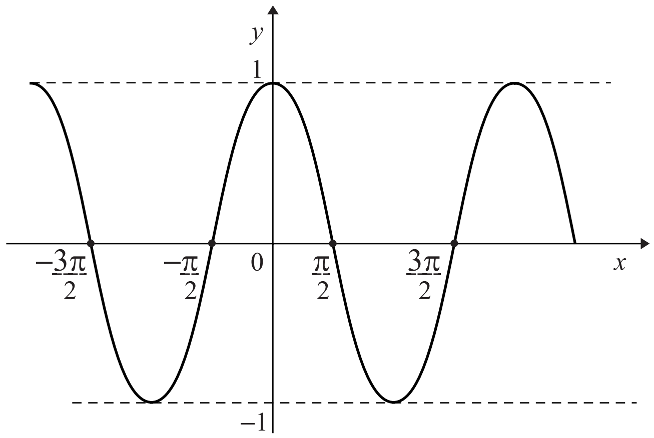


Figura 3.15: Gráfico da função cosseno.

Sendo x o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ da circunferência unitária, a ordenada e a abcissa de B, $sen x$ e $\cos x$, são no máximo 1 e, no mínimo, -1, qualquer que seja x, como se constata examinando-se a figura acima.

Uma função $f(x)$ é chamada de periódica, quando satisfaz para algum p, a relação $f(x) = f(x+p)$, qualquer que seja $x \in Dom(f)$. O menor valor de p, para o qual se tem $f(x+p) = f(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ é chamado de período da função f.

As funções seno e cosseno são funções periódicas com período 2π, ou seja,

$$\text{sen}\left(x + 2\pi\right) = \text{sen}\ x \text{ e } \cos\left(x + 2\pi\right) = \cos x$$

As funções $\text{sen}\ x$ e $\cos x$ satisfazem algumas relações, chamadas **relações ou identidades trigonométricas**:

(i) $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$.

(ii) $\text{sen}\left(a+b\right) = \text{sen}\ a \times \cos b + \cos a \times \text{sen}\ b$.

(iii) $\cos\left(a+b\right) = \cos a \times \cos b - \text{sen}\ a \times \text{sen}\ b$.

(iv) $\text{sen}(2a) = 2 \times \text{sen}\ a \times \cos a$.

(v) $\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$.

(vi) $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$.

(vii) $\text{sen}^2 a = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$.

- **Função tangente**

A função $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{tg}\, x$, definida por

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x},$$

onde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$ é chamada de função tangente.

A função tangente é periódica. Seu período é π.

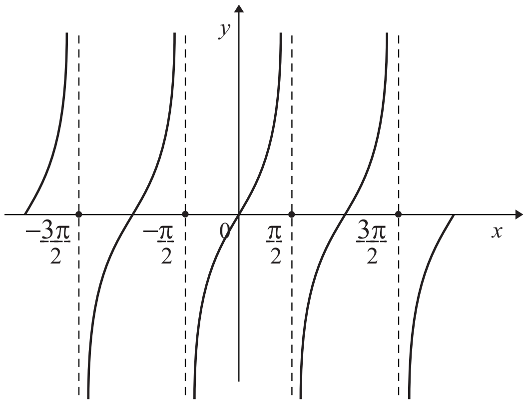


Figura 3.16: Gráfico da função tangente.

- **Função secante**

É a função $f : A \to \mathbb{R}$, indicada por $f(x) = \sec x$, onde

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ e } A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$$

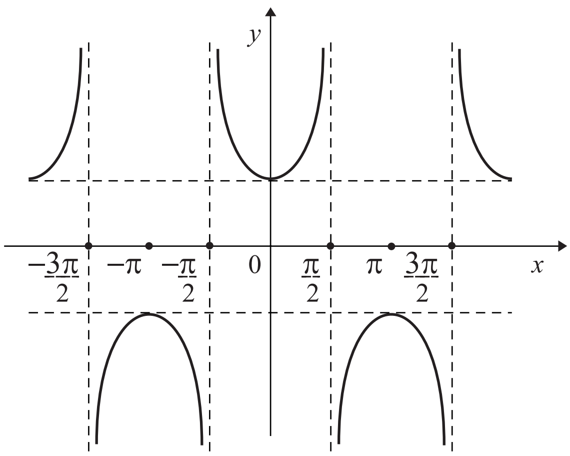


Figura 3.17: Gráfico da função secante

A função secante é uma função par e periódica com período 2π. Seu conjunto imagem é

$$\text{Im}(\sec x) = (-\infty, \ -1] \cup [1, \ +\infty).$$

• Função cossecante

É a função $f : A \to \mathbb{R}$, onde A é o conjunto dos números reais x, tais que $senx \neq 0$, dada por

$$f(x) = \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Vejamos, agora, o gráfico da função cossecante:

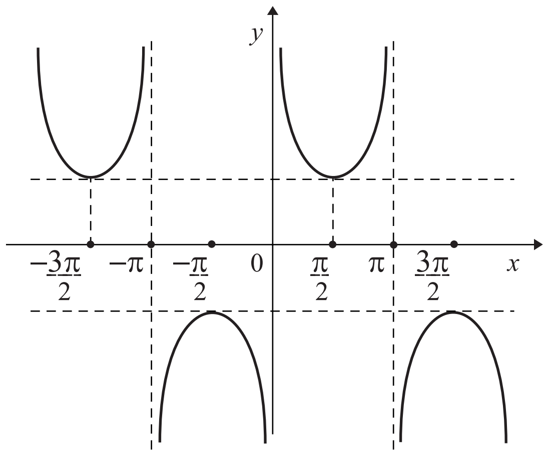


Figura 3.18: Gráfico da função cossecante.

A função $\operatorname{cossec} x$ é uma função periódica com período 2π. Seu conjunto imagem é o conjunto:

$$\text{Im}(\operatorname{cossec} x) = (-\infty, \ -1] \cup [1, \ \infty)$$

- **Função cotagente**

A função $f : A \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

onde A é o conjunto dos números reais x, tais que $\text{sen } x \neq 0$, é chamada função cotangente.

Vejamos, agora, o gráfico da função cotangente:

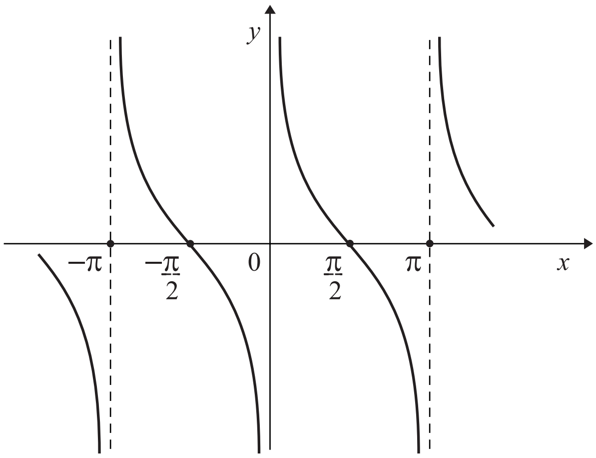


Figura 3.19: Gráfico da função cotangente.

A função cotangente é uma função periódica de período π e $\text{Im}(\text{cotg } x) = \mathbb{R}$.

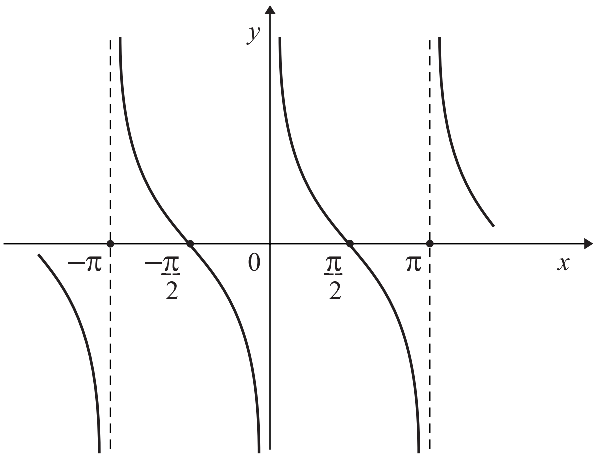


Figura 3.20: Gráfico da função arco secante.

Observação 3.3 *Na literatura existem as funções trigonométricas inversas, mas nesse trabalho não faremos estudo destas funções.*

Aplicações práticas das funções

A seguir, apresentaremos algumas aplicações práticas de funções em forma de exemplos.

- **Função receita**

Exemplo 3.25 *Um bem é vendido por R\$300,00 a unidade. Sendo x a quantidade vendida, a receita de vendas será* $300 \times x$. *Podemos dizer que* $R(x) = 300 \times x$ *é uma função que fornece a quantidade vendida x à receita correspondente.*

Exemplo 3.26 *Uma sorveteria vende um picolé por R\$6,00. Seja* x *a quantidade vendida.*

a) obtenha a função receita $R(x)$ *;*
b) calcule $R(50)$ *;*
c) qual a quantidade que deve ser vendida para dar uma receita igual a R\$1.200,00?

Resolução:
a) $R(x) = 6 \times x$.

b) $R(50) = 6 \times 50 = 300$.

c) Devemos ter $1.200 = 6 \times x \;\Rightarrow\; x = 200$.

Logo, a quantidade vendida deve ser de 20 picolés.

- **Função Custo e Lucro do Primeiro Grau**

Seja x a quantidade produzida de um produto. O custo total de produção depende de x, e a relação entre eles é chamada de função custo total e a indicamos por $C(x)$. Existem custos que não dependem da quantidade produzida, tais como, aluguel, seguro e outros. À soma desses custos (que não dependem da quantidade produzida) chamamos de custo fixo e indicamos por CF; a parcela do custo que depende de *x*, chamamos de custo variável, e indicamos por $CV(x)$. Logo, podemos escrever:

$$C(x) = CF + CV(x).$$

A função lucro $L(x)$ é definida como a diferença entre a função receita $R(x)$ e a função custo $C(x)$, e temos

$$L(x) = R(x) - C(x).$$

Por exemplo, o custo fixo mensal de fabricação de um produto é R$6.000,00 e o custo variável por unidade é R$ 15,00. Então a função custo total é dada por

$$C(x) = 6.000 + 15x .$$

Se o produto for, digamos, número de aparelhos de TV, os valores de x serão 0, 1, 2,...

Caso o produto for, digamos, toneladas de soja produzidas, os valores de x serão números reais positivos.

Exemplo 3.27 *Um produto é vendido por R$20,00 a unidade (preço constante). A função receita será* $R(x) = 20x$ *. Se colocarmos o gráfico da função receita e o da função custo* $C(x) = 6.000 + 15x$ *num mesmo sistema de coordenadas cartesianas, teremos o gráfico a seguir:*

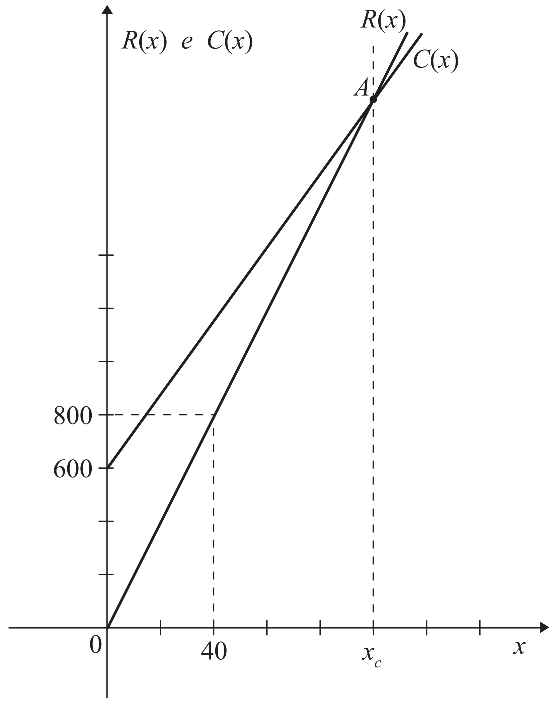


Figura 3.21: Gráfico de $R(x) = 20x$ e $C(x) = 6.000 + 15x$ no mesmo sistema de coordenadas.

A abscissa, x_c, do ponto A é chamada de ponto de nivelamento ou ponto crítico.

Note que:

- Se $x > x_c$, então $R(x) > C(x)$ e $L(x) > 0$.
- Se $x < x_c$, então $R(x) < C(x)$ e $L(x) < 0$.

- **Função demanda**

Exemplo 3.28 *O número* x *de certo produto demandado por mês numa loja, relaciona-se com o preço unitário* (p)*, conforme a função demanda*

$$p = 20 - 0{,}004x.$$

Se o preço por unidade for de R\$8,00, a quantidade demandada por mês será

$$8 = 20 - 0{,}004x \Rightarrow 0{,}004x = 20 - 8 = 16 \Rightarrow x = 4.000.$$

O gráfico da função demanda $p = 20 - 0{,}004x$*, é dado a seguir:*

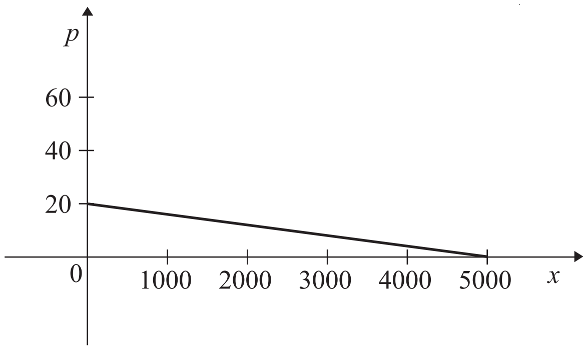


Figura 3.22

- **Funções quadráticas receita e lucro**

Exemplo 3.29 *A função de demanda de certo produto é* $p = 20 - x$*, e a função custo é* $C(x) = 30 + x$*, onde* x *é a quantidade demandada. Determinar:*

a) a função receita e o preço que a maximiza.

b) a função lucro e o preço que o maximiza.

Resolução:

a) Por definição de receita, temos

$$R(x) = p \times x = (20 - x) \times x = 20x - x^2.$$

Logo, a função receita é $R(x) = -x^2 + 20x$.Veja o gráfico abaixo

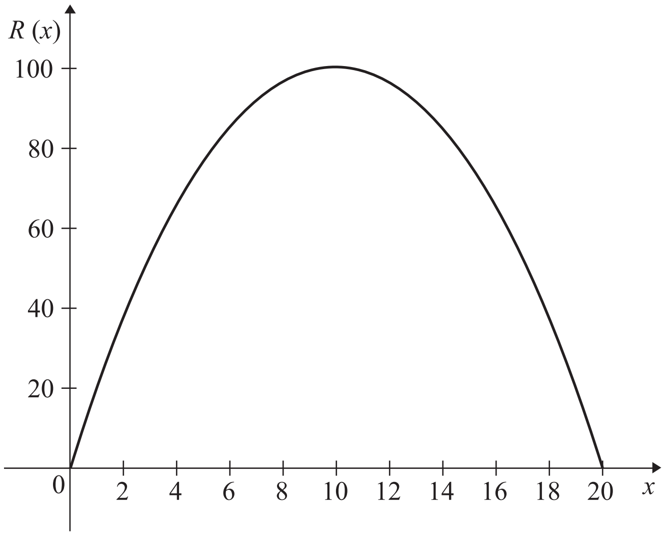


Figura 3.23

De $R(x) = -x^2 + 20x$, temos $a = -1; b = 20; c = 0$.

Logo, o valor de x que maximiza $R(x) = -x^2 + 20x$ é a abscissa do vértice $x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{20}{2 \times (-1)} = 10$, para uma receita máxima de

$$R(10) = -\left(10\right)^2 + 20 \times 10 = -100 + 200 = 100.$$

Portanto, temos uma receita máxima de R$100,00 para uma demanda de $x = 10$ itens do produto.

b) A função lucro é $L(x) = R(x) - C(x)$.

Assim,

$$L(x) = 20x - x^2 - \left(30 + x\right) = 20x - x^2 - 30 - x =$$

$$-x^2 + 19x - 30,$$

onde

$$a = -1;\ b = 19;\ c = -30.$$

Veja o gráfico de $L(x)$ abaixo

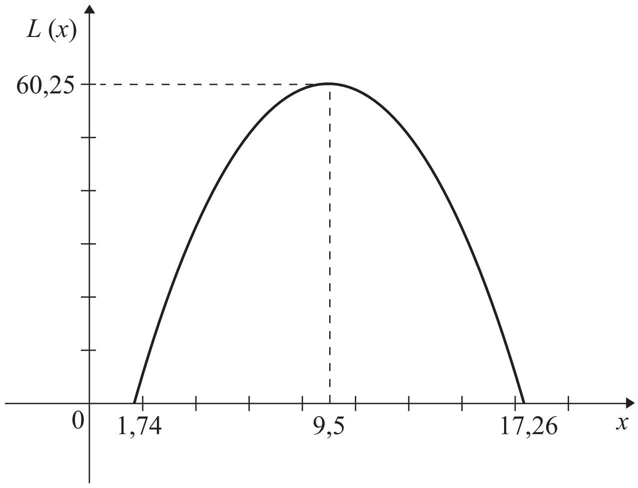


Figura 3.24

O valor de x, que maximiza a função lucro $L(x) = -x^2 + 19x - 30$, é a abscissa do vértice $x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{19}{2 \times (-1)} = \dfrac{19}{2} = 9{,}5$ para um lucro máximo de

$$\begin{aligned} L(9{,}5) &= -\left(9{,}5\right)^2 + 19 \times 9{,}5 - 30 \\ &= -90{,}25 + 180{,}5 - 30 = 60{,}25 \end{aligned}.$$

Portanto, temos um lucro máximo de R$240,75.

Exercícios propostos – 2

1) Seja a função $f(x) = 4x - 3$, calcule:

a) $f(-2)$;

b) $f(a+1)$;

c) $f(x+h)$;

d) $f(x) + f(h)$;

e) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0$.

2) Seja a função $g(x) = 5x^2 - 4x$, calcule:

a) $g(-1)$;

b) $g\left(\dfrac{1}{4}\right)$;

c) $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}, h \neq 0$;

d) $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

e) $\dfrac{g(-2)}{g(x)}$.

3) Seja a função $f(x) = 2x - |x-3|$, calcule:

a) $f(-1)$;

b) $f(2)$;

c) $f(3)$;

d) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$;

e) $f(2x)$.

4) Faça o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 2$, com o $Dom(f) = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

5) Obtenha o domínio das seguintes funções:

a) $y = f(x) = 3x - 2$;

b) $y = f(x) = \sqrt{3-x}$;

c) $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{x-5}}{x-2}$.

6) Esboce o gráfico da função f, de domínio $Dom(f) = \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x \geq 0 \\ x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

7) Sejam as funções $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$, determine:

a) $f \circ g$ e $Dom(f \circ g)$.

b) $g \circ f$ e $Dom(g \circ f)$.

c) $f \circ f$ e $Dom(f \circ f)$.

8) O custo de fabricação de x unidades de certo produto é dado pela função $C(x) = 300 + 2x$.

a) Qual o custo de fabricação de 30 unidades?

b) Qual o custo de fabricação da vigésima unidade, já tendo sido fabricadas dezenove unidades?

9) Dada a função demanda $p = 20 - 2x$ e a função custo $C(x) = 5 + x$, determine:

a) O valor de x que maximiza a receita.

b) O valor de x que maximiza o lucro.

10) Usando o mesmo sistema de coordenadas cartesianas, esboce o gráfico da função receita, dada por $R(x) = 4x$ e o gráfico da função custo, dada por $C(x) = 50 + 2x$ e determine o ponto de nivelamento.

11) Obtenha a função lucro do exercício acima, esboce seu gráfico e faça o estudo do sinal.

12) Um fabricante de brinquedos pode produzir um determinado brinquedo a um custo de R$10,00 por unidade. Está estimado que se o preço de venda do brinquedo for de x cada, então o número de brinquedos vendidos por mês será $250 - x$.

a) Expressar o lucro mensal do fabricante como uma função de x.

b) Utilize o resultado da letra a para determinar o lucro mensal se o preço de venda for de R$35,00 cada.

13) Seja $f : [0, \infty) \to [-2, \infty)$, $y = f(x) = x^2 - 2$. Determine a inversa da função f.

14) Determinar a função inversa da função demanda $p = \dfrac{20 - \sqrt{x}}{4}$.

15) Indicando o custo médio correspondente a x unidades produzidas por $CM(x)$, temos $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ onde $C(x)$ é o custo de fabricação de x unidades de um produto. O custo de fabricação de x unidades de um produto é $C(x) = 400 + 5x$.

a) Qual o custo médio de fabricação de 80 unidades?

b) Qual o custo médio de fabricação de 100 unidades?

c) Para que valor tende o custo médio à medida que x aumenta?

Saiba Mais...

Para aprofundar os conteúdos abordados nesta Unidade, consulte:

- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: Funções, Limite, Derivação, Integração. 5. ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
- MORENTTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BuSSAB, Winton de O. **Cálculo funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Saraiva, 2005.
- http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo

RESUMO

Nesta Unidade, você teve a oportunidade de estudar e compreender que uma função é uma relação entre conjuntos, que associa cada elemento de um dos conjuntos um único elemento do outro conjunto. Você aprendeu as operações com funções e a esboçar o gráfico de uma função. Também estudou algumas funções, chamadas de funções elementares, tais como a função afim, a função linear e a função quadrática, e suas respectivas aplicações. Interpretou a função módulo, a função polinomial, a função racional, a função exponencial, a função logaritma, a função composta, as funções crescentes e decrescentes e a função inversa.

RESPOSTAS

- **Exercícios propostos – 1**

2) $f = g$

3) $f(x) + g(x) = x^3 + 4x + 8$,
$f(x) \cdot g(x) = (x^3 + 2x + 3).(2x + 5)$
e $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^3 + 2x + 3}{2x + 5}$.

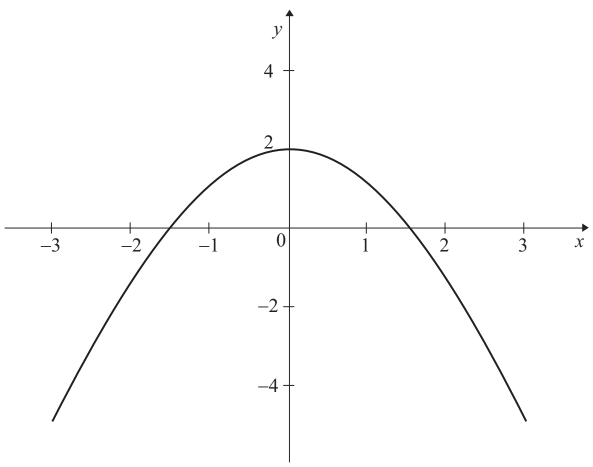
- **Exercícios propostos – 2**

1) a) -11; b) $4a + 1$; c) $4x + 4h - 3$;
d) $4x + 4h - 6$; e) 4.

2) a) 9; b) $-\dfrac{11}{16}$; c) $10x + 5h - 4$;
d) $\dfrac{-4x + 5}{x^2}$; e) $\dfrac{28}{5x^2 - 4x}$.

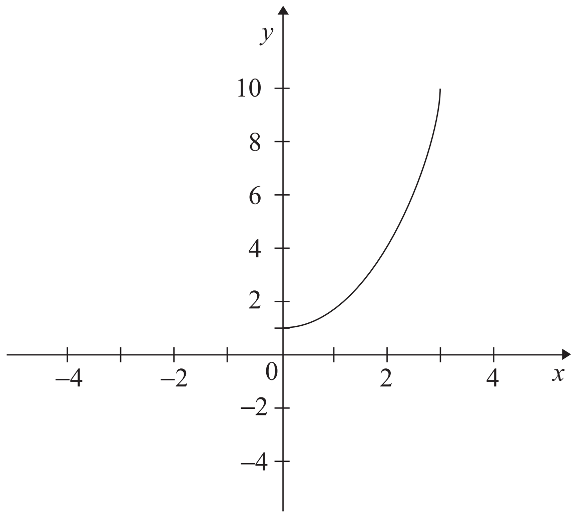
3) a) -6 b) 3; c) 6;
d) $-\dfrac{3}{2}$; e) $4x - |2x - 3|$.

4)



5) a) $Dom(f) = \mathbb{R}$; b) $Dom(f) = (-\infty, 3]$;
c) $Dom(f) = [5, +\infty)$.

6)



7) a) $f \circ g = \dfrac{x+1}{1-x}$ e $Dom(f \circ g) = \mathbb{R} - \{1\}$;

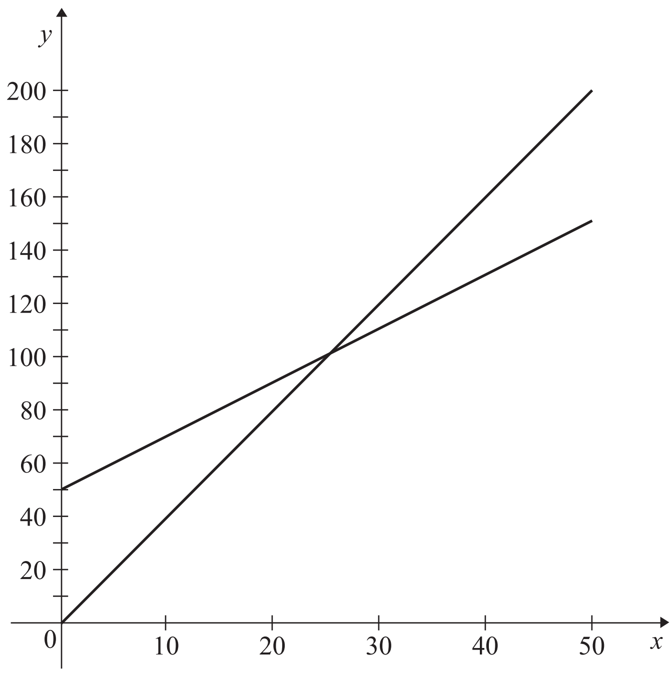
b) $g \circ f = \dfrac{x-1}{x+1}$ e $Dom(g \circ f) = \mathbb{R} - \{-1\}$;

c) $f \circ f = x$ e $Dom(f \circ f) = \mathbb{R}$.

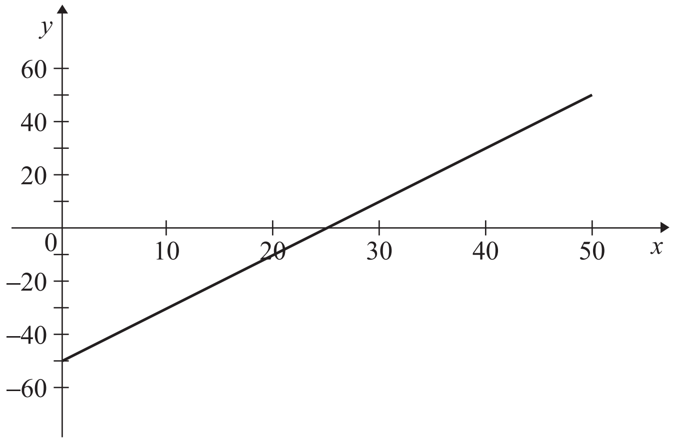
8) a) 360; b) 2.

9) a) $x = 5$. b) $x = \dfrac{19}{4}$.

10) Ponto de nivelamento é $x = 25$.



11) Lucro $L(x) = 2x - 50$.



Se $0 < x < 25$, então $R(x) < C(x)$ e, portanto $L(x) < 0$, ou seja, prejuízo.

Se $x > 25$, então $R(x) > C(x)$ e, portanto $L(x) > 0$, ou seja, lucro positivo.

12) Função receita: $R(x) = x \times (250 - x)$;

Função custo: $C(x) = 10 \times (250 - x)$.

a) Função lucro: $L(x) = (250 - x) \times (x - 10)$;

b) 5.375.

13) $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 2}$.

14) $(20 - 4x)^2$.

15) a) $5 + \dfrac{x}{16}$;

b) $4 + \dfrac{x}{20}$;

c) A medida que x aumenta o custo médio tende para 5(cinco).