UNIDADE

4

Seqüências, Limite e Continuidade

Objetivos

Nesta unidade você vai escrever e calcular o limite de uma seqüência, interpretar a noção intuitiva de limite de uma função, calcular limite de uma função usando teoremas e também calcular limites laterais e analisar a continuidade de uma função.

Seqüências, Limite e Continuidade

Seqüências

A partir deste momento, passaremos a estudar seqüência, limites e continuidade de uma função real. Leia com atenção, caso tenha dúvidas busque esclarecê-las nas bibliografias indicadas e também junto ao Sistema de Acompanhamento

Uma seqüência é um conjunto de números $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, *disposta numa certa ordem (isto é, em correspondência com os inteiros positivos) e formada segundo uma dada regra. Também podemos dizer que, uma seqüência é uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos.*

Cada número da seqüência chama-se termo; a_n é o -ésimo termo ou termo geral. Uma seqüência será finita ou infinita, conforme tenha ou não, um número finito de termos.

A seqüência $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ também é representada abreviadamente por $\{a_n\}$.

Exemplo 4.1 *Os números 2, 7, 12, 17, ..., 32, formam um seqüência fini-*

ta, cujo termo geral é $a_n = 5n - 3$, *para* $n = 1,2,\ldots,7$. *Ou ainda podemos representar por* $\{5n - 3\}$.

Exemplo 4.2 *Os números, formam uma seqüência infinita.*

Exemplo 4.3 *Os números* $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ *ou* $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ *formam uma seqüência infinita.*

Exemplo 4.4 *Os números* $2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \ldots, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \ldots$ *formam uma seqüência infinita.*

Exemplo 4.5 *Escreva os primeiros 5 termos da seguinte seqüência* $\left\{\frac{2n-1}{3n+2}\right\}$.

Resolução: Fazendo $n = 1$ em $\left\{\frac{2n-1}{3n+2}\right\}$ você tem $\frac{2\times 1-1}{3\times 1+2} = \frac{1}{5}$.

Do mesmo modo, fazendo $n = 2$ temos $\frac{2\times 2-1}{3\times 2+2} = \frac{3}{8}$.

Para $n = 3$, vem $\frac{5}{11}$. Para $n = 4$, vem $\frac{7}{14}$. Para $n = 5$ vem $\frac{9}{17}$.

Portanto, os cinco primeiros termos da seqüência $\left\{\frac{2n-1}{3n+2}\right\}$ são os números

$$\frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{11}, \frac{7}{14}, \frac{9}{17}.$$

Exemplo 4.6 *Escreva os primeiros 5 termos da seguinte seqüência* $\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^3}\right\}$.

Resolução: Fazendo $n = 1$ em $\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^3}\right\}$ você tem $\frac{1-(-1)^1}{1^3} = \frac{2}{1^3}$. E assim por diante.

Portanto, os cinco primeiros termos da seqüência $\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^3}\right\}$ são os números

$$\frac{2}{1^3}, 0, \frac{2}{3^3}, 0, \frac{2}{5^3}.$$

Limite de uma seqüência

Informalmente, podemos dizer que uma seqüência tem limite L (converge para L), se a partir de um certo índice todos os termos da seqüência se aproximam cada vez mais de L. Ou, ainda dizemos que, uma seqüência $\{a_n\}$ tem o limite L, se para todo $\varepsilon > 0$, existe um número $N > 0$, tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ $\forall$ inteiro $n > N$ e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Intuitivamente, L é o limite de uma seqüência, quando os termos da mesma aproximam-se cada vez mais de L, quando $n \to \infty$.*

GLOSSÁRIO

Seqüência*: ou **Sucessão** é uma lista de elementos, ou seja, um conjunto ordenado de maneira que cada elemento fica naturalmente seqüenciado. Uma sucessão é uma função com domínio igual ao conjunto dos números inteiros positivos (ou, o que é o mesmo, o conjunto dos números naturais não-nulos). **Fonte:** http://pt.wikipedia.org/wiki

Exemplo 4.7 *Seja a seqüência* $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

Exemplo 4.8 *Seja a seqüência* $\left\{\dfrac{3}{n-1}\right\}$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n-1} = 0$.

Exemplo 4.9 *Consideremos a seguinte seqüência* $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Exemplo 4.10 *Seja a seqüência* $\left\{\dfrac{8n}{2n+3}\right\}$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n}{2n+3} = 4$.

*Se uma seqüência $\{a_n\}$ tem um limite, dizemos que a seqüência é **convergente**, e dizemos que a_n converge para àquele limite. Se uma seqüência não for convergente, dizemos que é **divergente**.*

Exemplo 4.11 *A seqüência* $\left\{\dfrac{4n^2}{2n^2+1}\right\}$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2}{2n^2+1}=\dfrac{4}{2}=2$*, portanto é convergente e tem limite 2.*

Exemplo 4.12 *A seqüência* $\left\{(-1)^n+1\right\}$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(-1)^n+1\right]=\begin{cases}0, & n \text{ é ímpar}\\ 2, & n \text{ é par}\end{cases}$, *portanto a seqüência é divergente.*

Exemplo 4.13 *A seqüência* $\left\{\dfrac{n+1}{2n-1}\right\}$, *e* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n-1}=\dfrac{1}{2}$, *portanto é convergente e tem limite* $\dfrac{1}{2}$.

Exemplo 4.14. *A seqüência* $\left\{\dfrac{n^2+1}{n}\right\}$, *e* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n}=\infty$ *(não existe o limite), portanto a seqüência é divergente.*

Seqüências monótonas crescentes e decrescentes

Definição 4.4 *Dizemos que uma seqüência* $\{a_n\}$ *é*

(i) crescente, se $a_n \le a_{n+1}$, $\forall n$;

(ii) decrescente, se $a_n \ge a_{n+1}$, $\forall n$.

Se uma seqüência é crescente ou decrescente, ela é chamada **monótona**.

Exemplo 4.15 *A seqüência* $\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{7},\dfrac{4}{9},\ldots,\dfrac{n}{2n+1},\dfrac{n+1}{2n+3},\ldots$ *ou* $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$, *é crescente, pois*

$$\frac{n}{2n+1}\le\frac{n+1}{2n+3}.$$

De fato,

$$\frac{n}{2n+1}\le\frac{n+1}{2n+3}\Rightarrow n(2n+3)\le(n+1)(2n+1)$$
$$\Rightarrow 2n^2+3n\le 2n^2+3n+1,$$

o que vale sempre.

Exemplo 4.16 *A seqüência* $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\ldots,\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n+1},\ldots$, *é decrescente, porque* $\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$.

De fato, $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow n+1 > n$, o que vale sempre.

Vamos verificar se você está acompanhando tudo até aqui? Procure, então, resolver os exercícios propostos.

Exercícios propostos – 1

1) a) Dada a seqüência $-1,-3,-5,-7,\ldots$ determine o termo geral a_n.

b) Dada a seqüência $1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\ldots$ determine o termo geral a_n.

2) Escreva os primeiros 5 termos das seguintes seqüências:

a) $\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{2.4.6.\ldots.2n}\right\}$.

b) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^n\right\}$.

c) $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

3) Calcular o limite das seguintes seqüências:

a) $\left\{\dfrac{2n^2+1}{3n^2-n}\right\}$.

b) $\left\{\dfrac{3n^3+1}{2n^2+1}\right\}$.

4) Verificar se as seqüências abaixo são monótonas crescentes ou monótonas decrescentes.

a) $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$.

b) $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$

GLOSSÁRIO

Limite*: é usado para descrever o comportamento de uma função à medida que o seu argumento se aproxima de um determinado valor, assim como o comportamento de uma sequência de números reais, à medida que o índice (da sequência) vai crescendo, ou seja, tende para infinito. **Fonte:** http://pt.wikipedia.org/wiki

Limites de funções

O conceito de Limite* é importante na construção de muitos outros conceitos no cálculo diferencial e integral, por exemplo, nas noções de derivada e de integral que serão abordados nas unidades 5 e 7, que são os suportes de toda a construção das variáveis físicas, além da importância no cálculo de área e volumes.

A noção de limite

A noção de limite fornece um caminho preciso para distinguir o comportamento de algumas funções que variam continuamente, e o comportamento de outras funções que podem variar, independente do modo como se controla as variáveis.

É com base nisso, que pretendemos apresentar a você, uma noção intuitiva de limite, para que você possa observar o que ocorre com a função $f(x)$, quando x tende para um número real a ou quando x tende para mais ou menos infinito. Usaremos limites, por exemplo, para definir retas tangentes e gráficos de funções. Essa aplicação geométrica nos leva ao importante conceito de *derivada de uma função,* que investigaremos, com detalhes, na unidade 5.

Dada uma função f, você quer saber o que ocorre com os valores $f(x)$, quando a variável x se aproxima de um ponto a. Para você entender isto melhor, considere a função f definida pela expressão abaixo:

$$f(x) = \frac{(3x+2)(x-1)}{(x-1)}.$$

A função f está definida para todo x real, exceto $x = 1$. Assim, se $x \neq 1$, o numerador e o denominador de f podem ser divididos por $(x - 1)$, e você obtém

$$f(x) = 3\,x + 2, \quad \text{para} \quad x \neq 1.$$

Vamos estudar juntos os valores da função $f(x)$, quanto x estiver próximo de 1, mas não é igual a 1. Primeiro, vamos considerar valores de x cada vez mais próximos de 1, com $x < 1$ e observaremos o que está acontecendo com $f(x)$, conforme o quadro abaixo:

$x < 1$	0	0,25	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999	0,9999	0,99999
$f(x) = 3x + 2$	2	2,75	3,5	4,25	4,70	4,97	4,997	4,9997	4,99997

Agora, vamos considerar que a variável x aproxima-se cada vez mais de 1, com $x > 1$ e observar o que está acontecendo com $f(x)$:

$x > 1$	2	1,75	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001	1,00001
$f(x) = 3x + 2$	8	7,25	6,5	5,75	5,30	5,03	5,003	5,00003

Observamos, em ambas os quadros, que enquanto x se aproxima cada vez mais de 1, a função $f(x)$ se aproxima cada vez mais de 5. Em outras palavras, é possível obter o valor de $f(x)$ tão próximo de 5 quando desejarmos, desde que tomemos x suficientemente próximo de 1. Examine o gráfico de $f(x)$, a seguir:

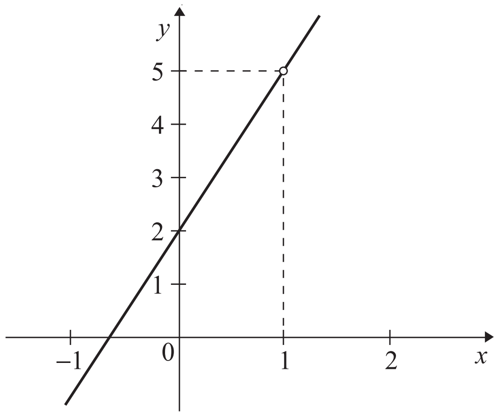

Figura 4.1

Para x cada vez mais próximo de 1, $f(x)$ aproxima-se de 5 e escreve-se a seguinte expressão:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(3x + 2) = 5.$$

Lê-se:

O limite da função $f(x)$, quando x aproxima-se de 1, é 5, ou ainda, o limite de $f(x)$, quando x tende a 1, é 5. Isto significa dizer que o valor da expressão $3x + 2$, cada vez mais aproxima-se de 5, à medida que os valores de x estão aproximando-se de 1. Quando $x \to 1$, $f(x) \to 5$.

Consideremos agora a função f, definida pela expressão $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$, para $x \neq 1$.

Queremos saber o que ocorre com a função $f(x)$ quando x tende para 1, através de valores de $x > 1$ e o que ocorre com a função $f(x)$, quando x tende para 1, através de valores de $x < 1$. Vejamos o que acontece com $f(x)$, no quadro abaixo, quando x tende para 1, através de valores de $x > 1$.

$x > 1$	3	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001	1,0001	...
$f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$	5	7	11	19	43	403	4003	40003	...

Observamos que, quando x tende para 1, através de valores de $x > 1$ ou pela direita de 1, a função $f(x)$ cresce indefinidamente ou a função f tende para $+\infty$ e, pode-se dizer que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 pela direita é $+\infty$, $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$ e anota-se por

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{3x+1}{x-1} = +\infty.$$

Vejamos o que acontece com $f(x)$, no quadro abaixo, quando x tende para 1, através de valores de $x < 1$.

$x < 1$	-1	0	0,9	0,99	0,999	0,9999	...
$f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$	1	-1	-37	-397	-3997	-39997	...

Observamos que quando x tende a 1, através de valores de $x < 1$ ou pela esquerda de 1, os valores absolutos da função $f(x)$ crescem e são negativos ou a função f tende para $-\infty$, e pode-se dizer que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 pela esquerda é $-\infty$, $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$, e anota-se por

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{3x+1}{x-1} = -\infty .$$

Apresentaremos agora a definição formal de limite de uma função.

Seja I um intervalo qualquer, a $\in I$ *e* $f(x)$ *uma função definida no intervalo I, (exceto eventualmente em a). Diz-se que o limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a* a *é* L*, e escreve-se* $\lim_{x \to a} f(x) = L$*, se para todo* ε *(epslon),* $\varepsilon > 0$*, existe um* δ *(delta),* $\delta > 0$*, tal que*

$$|f(x) - L| < \varepsilon \textit{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta .$$

Teoremas sobre limites de funções

A partir de agora você vai conhecer, sem demonstração, os teoremas sobre limites de funções e suas aplicações na resolução de problemas. Estes teoremas desempenharão um papel importante em todo o nosso curso.

Teorema 4.1 Unicidade do limite:

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} f(x) = M$ então $L = M$.

Teorema 4.2 Se $f(x) = k$ para todo x real, então para qualquer número real a, tem-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k .$$

Exemplo 4.17 *Considere* $f(x) = 4$ *e* $a = 2$ *então* $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 4 = 4$. *Ou seja, o limite de uma constante é a própria constante.*

Teorema 4.3 *Se* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, *então,*

a) $\lim_{x \to a}\left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$.

b) Para qualquer número real k, *tem-se*

$$\lim_{x \to a}\left(k \times f(x) \right) = k \times \lim_{x \to a} f(x) = k \times L .$$

c) $\lim_{x \to a}\left(f(x) \times g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = L \times M$.

d) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ *se* $M \neq 0$.

e) $\lim_{x \to a}\left(f(x) \right)^n = \left(\lim_{x \to a} f(x) \right)^n = L^n$.

Teorema 4.4 Se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim_{y \to b} g(y) = L$, com $L = g(b)$, então

$$\lim_{x \to a} g\left(f(x) \right) = g\left(\lim_{x \to a} f(x) \right).$$

Observação *Pelo Teorema 4.3(e) podemos concluir*

$$\lim_{x \to a} x^n = \left(\lim_{x \to a} x \right)^n = a^n .$$

Por exemplo,

$$\lim_{x \to 2} x^3 = \left(\lim_{x \to 2} x \right)^3 = 2^3 = 8 .$$

Teorema 4.5 Sejam $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 1$, $b > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então

a) $\lim_{x \to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x \to a} f(x)} = b^L$.

b) $\lim_{x \to a}\left(\log_b f(x) \right) = \log_b \left(\lim_{x \to a} f(x) \right) = \log_b L$, para $L > 0$.

c) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, para todo n se $L \geq 0$ e só para n ímpar se $L < 0$

Observação *Seja* $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, *um polinômio qualquer, pelo teorema 4.3(a) e (b) e pela observação 4.1, temos*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} p(x) &= \lim_{x\to a}\left(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0\right)\\
&= \lim_{x\to a} b_n x^n + \lim_{x\to a} b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lim_{x\to a} b_1 x + \lim_{x\to a} b_0\\
&= b_n \lim_{x\to a} x^n + b_{n-1}\lim_{x\to a} x^{n-1} + \ldots + b_1 \lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} b_0\\
&= p(a).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a).$$

Por exemplo,

(i) $\lim_{x\to 2}\left(2x^2 - 7x + 4\right) = 2\times 2^2 - 7\times 2 + 4$

$$= 2\times 4 - 7\times 2 + 4 = 8 - 14 + 4 = 18.$$

(ii) $\lim_{x\to 1}\left(x^5 - 3x^4 + 2\,x^3 + 2\right) = 1^5 - 3\times 1^4 + 2\times 1^3 + 2$

$$= 1 - 3 + 2 + 2 = 2.$$

Vejamos agora alguns exemplos resolvidos.

Exemplo 4.18 *Calcular*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 + 7x - 2}{3x - 5}.$$

Resolução: Aplicando o Teorema 4.3(a), (b) e (d), obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^2 + 7x - 2}{3x - 5} &= \frac{\lim_{x\to 1}\left(x^2 + 7x - 2\right)}{\lim_{x\to 1}\left(3x - 5\right)}\\
&= \frac{\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 7x - \lim_{x\to 1} 2}{\lim_{x\to 1} 3x - \lim_{x\to 1} 5}\\
&= \frac{\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 7\times \lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 2}{\lim_{x\to 1} 3\times \lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 5}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1^2 + 7 \times 1 - 2}{3 \times 1 - 5} = \frac{6}{-2} = -3.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 7x - 2}{3x - 5} = -3.$$

Exemplo 4.19 *Calcular*

$$\lim_{x \to 0} \left[(x-1)^{10} \times (x+5) \right].$$

Resolução: Inicialmente você aplica o Teorema 4.3(c) o Teorema 4.3(e), vem

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \left[(x-1)^{10} \times (x+5) \right] &= \lim_{x \to 0} (x-1)^{10} \times \lim_{x \to 0} (x+5) \\
&= \left(\lim_{x \to 0} (x-1) \right)^{10} \times \lim_{x \to 0} (x+5) \\
&= (0-1)^{10} \times (0+5) = (-1)^{10} \times 5 \\
&= 1 \times 5 = 5.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 0} \left[(x-1)^{10} \times (x+5) \right] = 5.$$

Vamos verificar agora se você compreendeu os teoremas sobre limites. Para uma melhor compreensão, resolva os exercícios a seguir. Caso tenha dúvidas, procure auxílio junto ao Sistema de Acompanhamento.

Exercícios propostos – 2

Calcular os seguintes limites:

1) $\lim_{x \to 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 2}$.

2) $\lim_{x \to 2} \frac{2x^3 - 10x^2 + 8x + 1}{x^2 - 5x - 6}$.

3) $\lim_{x \to -1} 3^{(x^3 + 3x + 2)}$.

4) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x - 3}{6x + 5}$.

5 $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{2x}{-3x + 5}}$.

Os resultados desta unidade serão importantes para toda a seqüência de nosso curso. Por isso, só passe para a próxima unidade quando tiver resolvido os exercícios propostos acima. Se você ainda tem alguma dúvida, releia o conteúdo e depois retorne aos exercícios. Este procedimento pode ser bastante útil.

Limites laterais

Na subseção anterior analisamos o comportamento de uma função $f(x)$, quando x se aproxima de um número real a e quando x assume valores (positivos ou negativos) de valor absoluto muito grande. O nosso objetivo agora é estudar os casos quando x tende para a pela direita, $x \to a$ e $x > a$ ou quando x tende para a pela esquerda, $x \to a$ e $x < a$ e com isto identificar a existência de limite de uma função através dos limites laterais, e esboçar o gráfico de uma função usando limites laterais. Para isto vejamos as seguintes definições.

Limite à esquerda

Se $f(x)$ tende para L_1 quando x tende para a através de valores menores que a diz-se que L_1 é o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela esquerda e indica-se por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1 .$$

Limite à direita

Se $f(x)$ tende para L_2 quando x tende para a através de valores maiores que a diz-se que L_2 é o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela direita e indica-se por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2 .$$

Vamos ver agora alguns exemplos, aplicando as definições acima.

Exemplo 4.20 *Seja a função f definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & se\ x < 1 \\ 4, & se\ x = 1 \\ 4 - x, & se\ x > 1 \end{cases} .$$

Determinar:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ *;*

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$;

c) *Esboce o gráfico de* $f(x)$.

Resolução: Pela definição de limite à esquerda, você responde a letra *a).* Observe que a função $f(x)$ está definida por $f(x) = x^2 + 1 \quad se \quad x < 1$. Logo,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2.$$

Assim,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2.$$

Agora, pela definição de limite à direita você responde a letra *b)*. Observe que a função $f(x)$ está definida por $f(x) = 4 - x$ *se* $x > 1$. Logo,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4 - x) = 4 - 1 = 3.$$

Assim,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3.$$

c) Note que $f(1) = 4$. Com estas informações, de que $f(1) = 4$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$, você consegue perceber como $f(x)$ se comporta quando x está próximo de 1. Para esboçar o gráfico de $f(x)$, dê valores para x, $x < 1$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes através da expressão $x^2 + 1$; dê valores para $x > 1$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes através da expressão $4 - x$ e veja o gráfico de $f(x)$, abaixo.

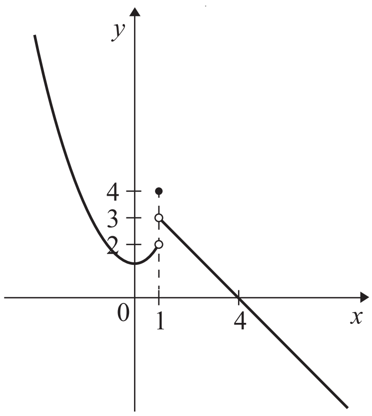

Figura 4.2

Exemplo 4.21 *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & se \;\; x \leq -2 \\ 2x + 7, & se \;\; x > -2 \end{cases}.$$

Determine:

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$;

c) Esboçar o gráfico de $f(x)$.

Resolução: Pela definição de limite à esquerda, vamos resolver letra *a*). Observe como está definida a função acima para valores de x à esquerda de -2, ou seja, para $x \le -2$.

Assim,

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{se} \quad x \le -2$$

e

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x^2 - 1) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Logo,

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = 3.$$

Pela definição de limite à direita, vamos resolver a letra *b*). Para valores de x à direita de -2, a função $f(x)$ está definida por $f(x) = 2x + 7$ se $x > -2$ e

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (2\,x + 7) = 2 \times (-2) + 7 = 3.$$

Logo,

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = 3.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 3.$$

c) Note que $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$. Como $f(-2) = 3$ e $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 3$, para esboçar o gráfico de $f(x)$, dê valores para x, $x \le -2$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes, através da expressão $x^2 - 1$, dê valores para $x > -2$ e calcule os valores de $f(x)$ correspondentes, através da expressão $2x + 7$ e veja o gráfico de $f(x)$, abaixo:

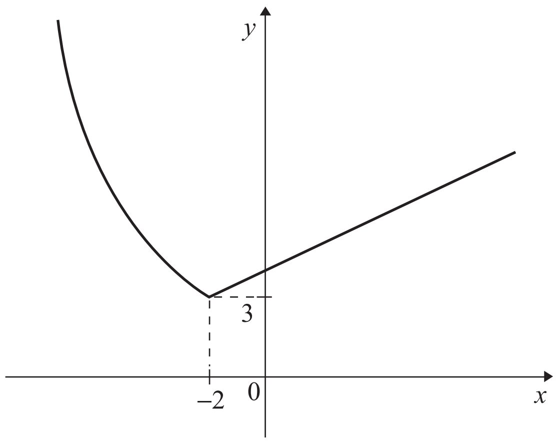

Figura 4.3

Teorema de existência do limite

Seja I *um intervalo aberto,* a *um ponto deste intervalo e* $f : I - \{a\} \to \mathbb{R}$. *Então existe*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L .$$

Vejamos agora, alguns exemplos de aplicação do teorema de existência do limite.

Exemplo 4.22 *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x < 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \\ x + 3, & \text{se } x > 2 \end{cases}.$$

Determine o $\lim_{x \to 2} f(x)$ *, se existir, e esboçe o gráfico de* $f(x)$.

Resolução: Para determinar o $\lim_{x \to 2} f(x)$, vamos calcular os limites laterais de $f(x)$, ou seja, calcular $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x)$. Para calcular $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, observe na função dada que $f(x)$ está definida por $f(x) = x^2 + 1$ para valores de x menores que 2.

Assim,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2+1) = 2^2+1 = 5.$$

Para calcular $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, observe na função dada que $f(x)$ está definida por $f(x) = x + 3$ para valores de x maiores que 2. Assim,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x+3) = 2 + 3 = 5.$$

Como $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 5$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$, pelo teorema acima temos

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5.$$

Para esboçar o gráfico da função $f(x)$ você utiliza o mesmo procedimento do exemplo anterior, conforme vemos abaixo:

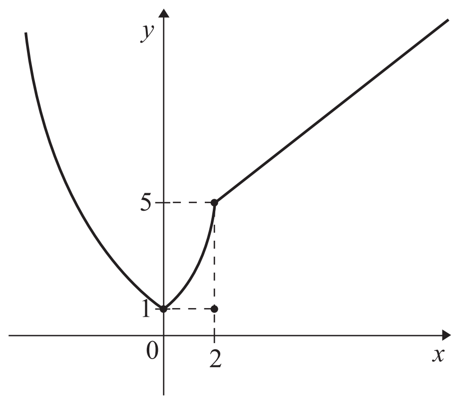

Figura 4.4

Vamos conferir se você está acompanhando tudo até aqui! E, para isto, tente resolver os exercícios propostos a seguir. Caso tenha dúvidas busque esclarecê-las antes de seguir adiante.

Exercícios propostos – 3

1) Seja $f(x)=\begin{cases}7x-2, & \text{se } x\geq 2\\ x^2-2x+1, & \text{se } x<2\end{cases}$.

Calcular: $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$.

2) Seja $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{se } x<0\\ 2, & \text{se } x=0\\ \sqrt{x+5}, & \text{se } x>0\end{cases}$

Calcular: $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} f(x)$.

3) Seja $\mathrm{f}(x)=\begin{cases}x+1, & \text{se } x<2\\ \sqrt{x^3+1}, & \text{se } x\geq 2\end{cases}$

Calcular: $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$.

4) Seja $f(x)$ uma função definida para todo número real por

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4x, & \text{se } x\leq -2\\ 4-k, & \text{se } x>-2\end{cases}$$

Determinar o valor da constante k para que exista $\lim_{x\to -2} f(x)$.

5) Seja $f(x)=\begin{cases}x^2-6x+8, & \text{se } x>4\\ 4-x, & \text{se } x\leq 4\end{cases}$

Calcular: $\lim_{x\to 4^-} f(x)$, $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 4} f(x)$.

Da noção de limite lateral, dependerá, fundamentalmente, o entendimento de continuidade de uma função, que será estudada posteriormente.

Os exercícios desta unidade têm por objetivo contribuir para o amadurecimento do conceito da existência do limite de uma função. Para isto, é importante que você tenha resolvido a maioria deles. Se você sentiu alguma dificuldade, reveja os exemplos, pois eles lhe darão os subsídios necessários para a resolução dos problemas propostos.

Indeterminações

Anteriormente, você estudou os Limites Laterais. Agora vamos entender melhor o que vem a ser Indeterminação. Nosso objetivo aqui é "levantar" uma indeterminação que é uma expressão sem sentido que se obtém ao tentar calcular um limite. Por exemplo, usando erroneamente a letra d) do Teorema 4.3 para calcular $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ se chega à expressão $\frac{0}{0}$ que não possui significado. Neste processo utilizaremos alguns artifícios algébricos.

Até agora calculamos limites do quociente entre duas funções, aplicando o Teorema 4.3 letra d). Veja o exemplo 4.18 resolvido ($\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + 7x - 2}{3x - 5} = -3$). Utilizando este teorema, você notou que não houve nenhuma dificuldade para encontrar o valor do referido limite, mas podem ocorrer situações em que você usando erroneamente a letra d) do Teorema 4.3, encontre $\frac{0}{0}$. Cuidado quando isto ocorrer. O limite nunca é $\frac{0}{0}$, pois $\frac{0}{0}$ não é número algum. Neste caso, o que fazer? É o que veremos a seguir:

Consideremos $f(x)$ e $g(x)$ funções tais que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. Em princípio, nada se pode afirmar sobre o $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \frac{0}{0}$ (com a aplicação indevida do Teorema 4.3 letra d).

Dependendo das funções f e g, o limite pode assumir qualquer valor real ou não existir.

Diz-se que $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação, ou um símbolo de indeterminação.

Para seu melhor entendimento, vejamos os exemplos abaixo.

Exemplo 4.23 *Sejam* $f(x) = x^4$ *e* $g(x) = x^3$. *Calcular* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Resolução: Tem-se

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^4 = 0^4 = 0$$

e

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x^3 = 0^3 = 0$$

Mas,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \to 0} x = 0 .$$

Exemplo 4.24 *Sejam* $f(x) = x^3$ *e* $g(x) = 4x^3$. *Calcular* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Resolução: Você tem

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^3 = 0^3 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} 4x^3 = 4 \times 0^3 = 0.$$

Neste caso,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{4\,x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 4.25 *Calcular* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2 - 4x + 3}$.

Resolução: Quando $x = 1$ temos a determinação $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Neste caso,

$$\frac{x-1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x-3)} = \frac{1}{x-3}.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-3} = -2$$

Tentando calcular limites de funções aplicando os teoremas vistos, você pode chegar a outras expressões, cujo significado ou valor, não é determinado. Ao todo são sete tipos de indeterminações:

Os tipos de indeterminações:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty \text{ e } \infty^0.$$

Sempre que no cálculo de um limite você chegar a um destes símbolos, deve buscar alguma alternativa para obter o valor do limite usando artifícios algébricos. A este trabalho dá-se o nome de levantamento de uma indeterminação. Este processo também pode ser resolvido na unidade 6, Aplicações de Derivada, usando a ***regra de L'Hospital****, que também trata de limites de funções com indeterminações. Recomendamos a você uma releitura dos limites.*

Limites infinitos

Consideremos a função definida por $f(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$, para $x \neq 3$. Queremos determinar os valores da função $f(x)$ quando x está próximo de 3. Para x se aproximando de 3 pela direita, $x > 3$, temos os valores de $f(x)$, dados no quadro abaixo:

$x,\ x > 3$	4	3,5	3,25	3,125	3,1	3,01	3,001	...
$f(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$	2	8	32	128	200	20.000	2.000.000	...

Observamos que, fazendo x aproximar-se cada vez mais de 3, com $x > 3$, $f(x)$ cresce ilimitadamente, isto é, pode-se tornar $f(x)$ tão grande quanto você desejar, desde que se tome x bem próximo de 3.

Escreve-se

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{(x-3)^2} = +\infty,$$

ou seja, quando $x \to 3^+$, $f(x) \to +\infty$.

Agora vamos considerar x, aproximando-se de 3 pela esquerda. Para $x < 3$ obtêm-se os valores de $f(x)$, dados no quadro abaixo.

$x, x < 3$	2	2,5	2,75	2,8	2,9	2,99	2,999	...
$f(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$	2	8	32	50	2.000	20.000	2.000.000	...

Observamos que fazendo x aproximar-se cada vez mais de 3, com $x < 3$, $f(x)$ cresce ilimitadamente, isto é, pode-se tornar $f(x)$ tão grande quanto você desejar, desde que se torne x bem próximo de 3.

Escreve-se

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2}{(x-3)^2} = +\infty ,$$

ou seja, quando $x \to 3^-$, $f(x) \to +\infty$.

Portanto, quando x se aproxima de 3 pela direita ($x > 3$) ou pela esquerda ($x < 3$), $f(x)$, cresce ilimitadamente, e escreve-se

$$\lim_{x \to 3} \frac{2}{(x-3)^2} = +\infty .$$

Escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ para dizer que $f(x)$ cresce ilimitadamente quando x tende para a.

Se $f(x) < 0$ para x próximo de a e o módulo de $f(x)$ crescer ilimitadamente, escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

De maneira análoga, atribuímos significados para $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Escrevemos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ para dizer que $f(x)$ cresce ilimitadamente sempre que x crescer ilimitadamente.

De maneira análoga, atribuímos significado para $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$.

Limite de Função Racional

Este teorema vai nos facilitar o cálculo de limite de uma função racional quando a variável x tende para mais infinito ou tende para menos infinito. Vejamos o seu enunciado.

Teorema 4.7 Seja a função racional (o quociente entre dois polinômios)

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_o\ x^n + a_1\ x^{n-1} + a_2\ x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_o\ x^m + b_1\ x^{m-1} + b_2\ x^{m-2} + \ldots + b_m}$$

com $a_o \neq 0$ e $b_o \neq 0$.

Então,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_o \times x^n}{b_o \times x^m},$$

ou seja, o limite da função racional $f(x)$ é dado pelo limite da razão ou o quociente dos termos de maior grau dos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$.

Vejamos alguns exemplos, aplicando o Teorema de uma função racional quando $x \to \pm\infty$.

Exemplo 4.26 *Determinar*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 7x - 1}{5x^3 - 2x^2 + x + 3}.$$

Resolução: Pelo Teorema acima, tem-se

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 7x - 1}{5x^3 - 2x^2 + x + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3\ x^3}{5\ x^3}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}. \text{ (Aqui } n = m = 3\text{)}.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 7x - 1}{5x^3 - 2x^2 + x + 3} = \frac{3}{5}.$$

Exercícios propostos – 4

Calcular os seguintes limites:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x - 7}{2x^2 + 1}$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x - 7}{2x + 1}$.

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^5 - 7x^4 + 2x^2 + 7}{6x^5 + 2x^4 - x^3 + 2}$.

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^5 - 2x^3 + 4)$.

5) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{-2x}{4 - x^2}$.

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^6 - 2x^5 + 7x^3 + 2}{x^5 - 2x^3 + 4}$.

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1}{6x^5 + 2x^3 - 2}$.

Nestes exercícios e nos anteriores, você teve a oportunidade de perceber se entendeu a aplicação dos teoremas nelas enunciados. Só prossiga após fazer todos os exercícios propostos, pois isto contribuirá para um melhor entendimento dos conteúdos. Se tiver dúvidas, consulte o Sistema de Acompanhamento.

Funções contínuas

Você vai ver agora que uma das conseqüências importantes da noção de limite é a noção de continuidade de uma função.

Na linguagem quotidiana dizemos que o tempo é contínuo, uma vez que ele decorre de maneira ininterrupta. O relógio não salta, digamos, de 2 horas para 2 horas e 1 minuto, deixando um lapso de 1 minuto.

Em matemática usamos a expressão contínua em um sentido semelhante. Intuitivamente gostaríamos de afirmar que uma função f é contínua em $x = a$, quando o gráfico de f não tem interrupção em a, ou seja, o gráfico de f não tem quebras ou saltos em a. Para muitas funções contínuas isto é verdadeiro, mas existem exceções.

As considerações acima motivam as definições a seguir.

Seja f uma função definida em um conjunto X constituído de uma reunião de intervalos e seja $a \in X$. Diz-se que a função f é contínua no ponto a quando

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

A maior parte das funções elementares, vistas na Unidade 2, são contínuas em todo x real, por exemplo, $f(x) = c$, $f(x) = ax + b$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \cos x$.

Seja $a \in \operatorname{Dom} f$ diz-se que uma função f é descontínua no ponto $x = a$ se f não for contínua em $x = a$.

Isto significa que f é descontínua em $x = a$, se ocorrer ao menos uma das seguintes condições:

i) Não existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

ii) Existe $\lim_{x \to a} f(x)$, mas $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 4.27 *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \leq 3 \\ 4, & \text{se } x > 3 \end{cases}.$$

A função $f(x)$ é descontínua no ponto $x = 3$, pois, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x - 1) = 3 - 1 = 2$ e $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 4 = 4$, logo

não existe $\lim_{x \to 3} f(x)$.

Observe que $f(3) = 3 - 1 = 2$, mas isto não é suficiente para a continuidade de $f(x)$. Seria necessário que se tivesse $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$ o que jamais poderia ocorrer, visto que não existe $\lim_{x \to 3} f(x)$. Veja o gráfico de $f(x)$ abaixo.

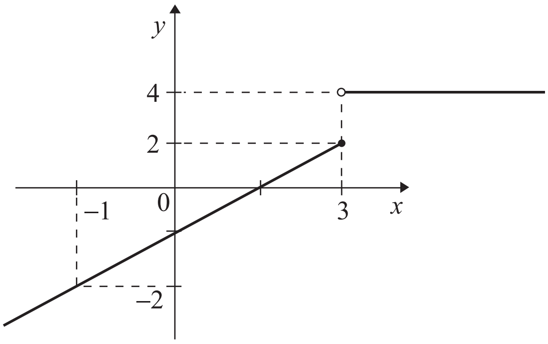

Figura 4.5

Uma função f é contínua no conjunto X se f é contínua em todos os pontos de X.

Por exemplo, as funções $f(x) = \text{tg } x$ e $g(x) = \text{sen } x$ são contínuas nos intervalos $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, respectivamente.

Vamos estudar agora, os teoremas elementares de funções contínuas, tais como: soma, produto, quociente e composição.

Teorema 4.11 *Se as funções* $f(x)$ e $g(x)$ *são contínuas em* $x = a$, *então:*

a) A soma, $f(x) + g(x)$, *é contínua em* $x = a$ *;*
b) A diferença, $f(x) - g(x)$ *é contínua em* $x = a$ *;*
c) O produto, $f(x) \times g(x)$, *é uma função contínua em* $x = a$ *;*
d) O quociente, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *é uma função contínua* $x = a$, *desde que se tenha* $g(a) \neq 0$.

Teorema 4.12 *A composição,* $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ *é contínua em* $x = a$, *desde que* $g(x)$ *seja contínua em* $x = a$ *e* $f(x)$ *seja contínua em* $g(a)$.

Observações

(i) A função polinomial $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ *é contínua em* $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

(ii) Uma função racional é contínua em todo número real de seu domínio.

(iii) As funções abaixo são contínuas em todo número real x *de seu domínio:*

$$f(x) = a^x,\ g(x) = \log_a x\ ,\ h(x) = \sqrt{x}\ .$$

Exemplo 4.28 *As funções* $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x$ *são contínuas para todo número real* x, *logo,* $(f + g)(x) = x^2 + 3x$ *é contínua para todo número real* x.

Exemplo 4.29 *As funções* $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \cos x$ *são contínuas para todo número real* x *, logo,* $(f \times g)(x) = (x+1) \times \cos x$ *é contínua para todo número real* x *.*

Exemplo 4.30 *As funções* $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2 + 1$ *são contínuas para todo número real* x *, logo,* $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3}{x^2+1}$ *é contínua para todo número real* x *.*

Exemplo 4.31 *A função* $f(x) = 2x^5 - x^3 + 3x^2 - 1$ *é contínua para todo número real* x *.*

Exemplo 4.32 *As funções* $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2x$ *são contínuas para todo número real* x *, logo* $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 4x + 1$ *, isto é,* $(f \circ g)(x) = 4x + 1$ *é contínua para todo número real* x *.*

Vamos analisar a continuidade de uma função num determinado ponto, $x = a$, e para isto consideraremos os seguintes exemplos resolvidos:

Exercícios propostos – 5

1) Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & se \quad x > 2 \\ 5, & se \quad x = 2 \\ 7x - 9, & se \quad x < 2 \end{cases}$

Verificar se $f(x)$ é contínua em $x = 2$.

2) Verificar se a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & se \quad x < -3 \\ x^3 + 2, & se \quad x > -3 \\ 4, & se \quad x = -3 \end{cases}$$

é contínua no ponto $x = -3$.

3) Seja $f(x) = \begin{cases} x-1, & se \quad x<3 \\ 5, & se \quad x=3 \\ 8-x, & se \quad x>3 \end{cases}$

Verifique se $f(x)$ é contínua em $x=3$.

Saiba Mais...

Para aprofundar os conteúdos abordados nesta unidade, consulte:

- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: Funções, Limite, Derivação, Integração, 5. ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
- LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 2ª ed. São Paulo: Harba, 1994. Vol. 1.
- http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/superior.htm

RESUMO

Nesta Unidade, você teve a oportunidade de estudar e compreender a definição de limite de uma forma intuitiva, bem como calcular limite de uma função, usando os teoremas sobre limites, o significado dos limites laterais, limites no infinito e limites infinitos. Percebeu também como levantar uma indeterminação e aprendeu a analisar a continuidade de uma função, aplicando limites laterais. Entendeu tudo até aqui? Não esqueça que a compreensão é fundamental para que você possa acompanhar a disciplina. Só prossiga após fazer todos os exercícios propostos. O que veremos a seguir depende dos conceitos abordados nesta unidade. Consulte o Sistema de Acompanhamento, sempre que achar necessário.

RESPOSTAS

- **Exercícios propostos – 1**

1) a) $\{-(2n-1)\}$; b) $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$.

2) a) $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2.4}, \frac{1}{2.4.6}, \frac{-1}{2.4.6.8}, \frac{1}{2.4.6.8.10}$.

b) $\left(\frac{4}{3}\right)^1, \left(\frac{7}{6}\right)^2, \left(\frac{10}{9}\right)^3, \left(\frac{13}{12}\right)^4, \left(\frac{21}{20}\right)^5$.

c) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$.

3) a) $\frac{2}{3}$; b) ∞ (não existe o limite).

4) a) monótona crescente; b) monótona crescente

- **Exercícios propostos – 2**

1) $\frac{2}{25}$; 2) $\frac{7}{12}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $-\frac{1}{4}$; 5) 1.

- **Exercícios propostos – 3**

1) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 12$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe.

2) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\sqrt{5}$. Não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

3) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$.

4) $k = -8$.

5) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$.

- **Exercícios propostos – 4**

1) $\frac{1}{2}$; 2) $+\infty$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $+\infty$.

5) $-\infty$. 6) $-\infty$. 7) 0.

- **Exercícios propostos – 5**

1) Sim, $f(x)$ é contínua em $x = 2$.

2) A função dada não é contínua em $x = -3$.

3) A função $f(x)$ não é contínua em $x = 3$.