UNIDADE

5

Derivadas

Objetivo

Nesta unidade você vai interpretar a taxa média de variação; escrever a definição de derivada e interpretar o seu significado geométrico; calcular e aplicar algumas regras de derivadas, tais como, a regra da cadeia; enunciar e calcular a derivada de função inversa; calcular derivadas sucessivas de uma função e aplicar o conceito de diferencial em funções marginais.

Derivadas

Incremento e taxa média de variação

A partir de agora, veremos um dos conceitos mais importantes do calculo diferencial: a derivada de uma função.

Consideremos uma função f, dada por $y = f(x)$. Quando x varia de um valor inicial de x para um valor final de x, temos o incremento em x. O símbolo matemático para a variação em x, chamada incremento em x, será Δx (leia-se delta x). Logo,

$$\Delta x = \text{valor final de } x \; - \; \text{valor inicial de } x.$$

Por exemplo, quando x passa de um valor inicial 2 para um valor final 2,5, o incremento em x será $\Delta x = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$.

O incremento em y, Δy (leia-se delta y), será

$$\Delta y = \text{valor final de } y \; - \; \text{valor inicial de } y.$$

Por exemplo, quando y passa de um valor inicial 5 para um valor final 7,25, o incremento em y será $\Delta y = 7{,}25 - 5 = 2{,}25$.

Consideremos agora a função $y = f(x) = x^2 + 1$. Vamos calcular Δx quando x varia do valor $x = 1$ para $x = 3$ e também calcular Δy. Inicialmente temos $\Delta x = 3 - 1 = 2$. Para calcularmos o valor de Δy, temos

- para $x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 1^2 + 1 = 2$ e

- para $x = 2 \Rightarrow y = f(2) = 2^2 + 1 = 5$.

Assim, $\Delta y = 5 - 2 = 3$. Portanto, $\Delta x = 2$ e $\Delta y = 3$.

De um modo geral, temos

Valor inicial de $x = x_0$ e valor final de $x = x_0 + \Delta x$;

Valor inicial de $y = f(x_0)$ e valor final de $y = f\left(x_0 + \Delta x\right)$. Assim,

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0).$$

Para a função $y = f(x) = x^2 + 1$, temos

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\\ &= (x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)\\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1\\ &= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta y = 2 \cdot x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 .$$

O que acabamos de mencionar, nos motiva a seguinte definição.

Seja $f(x)$ uma função definição em um intervalo $[a,b]$ e $x_0 \in [a,b]$, $\forall x \in [a,b]$ com $x \neq x_0$. Quando a variável x passa para o valor $x = x_0$ para o valor $x = x_0 + \Delta x$ sofrendo uma variação Δx, $\Delta x = x - x_0$, o correspondente valor da função passa de $f(x_0)$ para o valor $f(x_0 + \Delta x)$ sofrendo, portanto, uma variação $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Conforme mostra a figura 5.1 abaixo

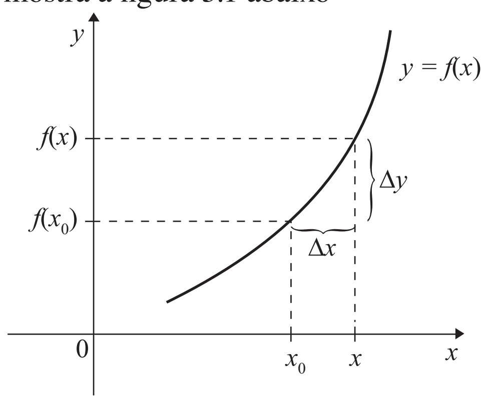

Figura 5.1

Vale destacar:

O quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x},$$

recebe o nome de taxa média de variação da função $f(x)$ *quando* x *passa do valor* x_0 *para o valor* $x = x_0 + \Delta x$ *e expressa a variação média sofrida pelos valores da função* $f(x)$ *entre estes dois pontos.*

Exemplo 5.1 *Seja a função* f, *tal que* $f(x) = 2x + 1$, *para* $x \in \mathbb{R}$. *Determine a taxa média de variação de* f, *quando* x *passa de* $x_0 = 1$ *para* $x_0 + \Delta x = 4$.

Resolução: Como $x_0 + \Delta x = 4$ temos $1 + \Delta x = 4 \Rightarrow \Delta x = 4 - 1 = 3$;

$f(x_0) = f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$ e $f(x_0 + \Delta x) = f(4) = 2 \times 4 + 1 = 9$.

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{9 - 3}{3} = \frac{6}{2} = 3.$$

Exemplo 5.2 *Seja a função* f *tal que* $f(x) = x^2 + 4$, *para* $x \in \mathbb{R}$. *Determine a taxa média de variação de* f, *quando* x *passa de* $x_0 = 2$ *para* $x_0 + \Delta x = 5$.

Resolução: Como $x_0 + \Delta x = 5$ temos $2 + \Delta x = 5 \Rightarrow \Delta x = 5 - 2 = 3$;

$$f(x_0) = f(2) = 2^2 + 4 = 4 + 4 = 8 \text{ e}$$
$$f(x_0 + \Delta x) = f(5) = 5^2 + 4 = 25 + 4 = 29.$$

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{29 - 8}{3} = \frac{21}{3} = 7.$$

Exemplo 5.3 *A função custo total para produzir* x *unidades de uma mercadoria,* $C(x)$*, em reais, é dada pela equação* $C(x)=2x^2-0{,}5x+10$. *Determinar a taxa média de variação do custo total em relação a* x*, quando* x *varia de* x_0 *unidades para* $x_0+\Delta x$ *unidades.*

Resolução: Sabemos que a taxa média de variação do custo total é dada por

$$\frac{\Delta C}{\Delta x}=\frac{C\left(x_0+\Delta x\right)-C(x_0)}{\Delta x}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}C(x_0+\Delta x)&=2\left(x_0+\Delta x\right)^2-0{,}5\left(x_0+\Delta x\right)+10\\&=2x_0^2+4x_0\Delta x+2\left(\Delta x\right)^2-(0{,}5)x_0-(0{,}5)\Delta x+10\end{aligned}$$

e

$$C(x_0)=2x_0^2-0{,}5x_0+10$$

Logo,

$$\frac{\Delta C}{\Delta x}=\frac{C\left(x_0+\Delta x\right)-C(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\frac{2x_0^2+4x_0\Delta x+2\left(\Delta x\right)^2-(0{,}5)x_0-(0{,}5)\Delta x+10-\left(2x_0^2-(0{,}5)x_0+10\right)}{\Delta x}$$

$$=\frac{2x_0^2+4x_0\Delta x+2\left(\Delta x\right)^2-(0{,}5)x_0-(0{,}5)\Delta x+10-2x_0^2+(0{,}5)x_0-10}{\Delta x}$$

$$=\frac{2x_0^2+4x_0\Delta x+2\left(\Delta x\right)^2-(0{,}5)x_0-(0{,}5)\Delta x+10-2x_0^2+(0{,}5)x_0-10}{\Delta x}$$

$$=\frac{4x_0\Delta x+2\left(\Delta x\right)^2-(0{,}5)\Delta x}{\Delta x}=4x_0+2\Delta x-0{,}5.$$

Portanto, a taxa média de variação da função custo total $C(x)=2x^2-0{,}5x+10$, quando x varia de x_0 unidades para $x_0+\Delta x$ unidades é $\frac{\Delta C}{\Delta x}=4x_0+2\Delta x-0{,}5$.

Exercícios propostos – 1

1) Determinar a taxa média de variação das funções seguintes entre os pontos indicados:

a) $f(x) = 3$; 2 e 4

b) $f(x) = x^2 + x$; -2 e 2

c) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$; 3 e 6

d) $f(x) = -x^2$; -4 e -1

e) $f(x) = -x + 1$; -2 e 6

2) Determinar a taxa média de variação da função $f(x) = \sqrt{x+1}$ entre os pontos x_0 e $x_0 + \Delta x$.

3) Uma fábrica de doces verificou que o custo total diário, para produzir x caixas de doces cristalizados, em reais, era dado por $C(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 2$. Determinar a taxa média de variação do custo em relação a x.

Definição de derivada

Após compreender o significado de taxa média de variação de uma função $f(x)$, quando x passa do valor x_0 para o valor $x_0 + \Delta x$, você vai conhecer a definição de derivada.

Derivada da função. *A derivada de uma função* f *em relação à variável* x *do domínio de* f *é a função* $f'(x)$*, dada por*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se este limite existir. Diz-se, nesse caso, que a função $f(x)$ *é derivável em* x*.*

Derivada de uma função no ponto x_0**.** *Se* x_0 *for um número particular no domínio de* f*, então a derivada da função* f *no ponto* x_0*, denotada por* $f'(x_0)$*, é dada por*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

se este limite existir. Diz-se, nesse caso, que a função $f(x)$ *é derivável em* x_0*, ou seja, existe* $f'(x_0)$*.*

Há várias maneiras de representar a derivada, por exemplo,

$$f'(x_0),\ Df(x_0),\ y'(x_0),\ \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0},\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0},\ f'(x),\ y',\ \frac{df}{dx},\ \frac{dy}{dx}, \text{etc.}$$

Exemplo 5.4 *Dada* $f(x) = 4x^2 + 8$*, calcular a derivada de* f*.*

Resolução: Se x é algum número no domínio de f, então pela definição de derivada, vem

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[4\left(x+\Delta x\right)^2 + 8\right] - \left(4x^2+8\right)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) + 8 - 4x^2 - 8}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 4x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(8x + 4\Delta x\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (8x + 4\Delta x) = 8x$$

Portanto, a derivada de $f(x) = 4x^2 + 8$, em relação a x, é $8x$, ou seja, $f'(x) = 8x$.

Exemplo 5.5 *Dada* $f(x) = 5x^2 + 3$, *encontrar a derivada de* f *no ponto* $x_0 = 2$, *ou seja,* $f'(2)$.

Resolução: Pela definição 5.3, vem

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(2 + \Delta x\right) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[5\left(2 + \Delta x\right)^2 + 3\right] - \left(5 \cdot 2^2 + 3\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\left(2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right) + 3 - 23}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{20 + 20 \cdot \Delta x + 5 \cdot (\Delta x)^2 - 20}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{20 \cdot \Delta x + 5 \cdot (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(20 + 5 \cdot \Delta x\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(20 + 5 \cdot \Delta x\right) = 20$$

Portanto,

$$f'(2) = 20.$$

Exemplo 5.6 *Dada* $y = \dfrac{3 - x}{2 + x}$, *encontre* $\dfrac{dy}{dx}$.

Resolução: Sabemos que

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{3 - x - \Delta x}{2 + x + \Delta x} - \dfrac{3 - x}{2 + x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{(2 + x)\cdot(3 - x - \Delta x) - (2 + x + \Delta x)\cdot(3 - x)}{(2 + x + \Delta x)\cdot(2 + x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(6 + x - x^2 - 2\cdot\Delta x - x\cdot\Delta x) - (6 + x + 3\cdot\Delta x - x^2 - x\cdot\Delta x)}{\Delta x\cdot(2 + x + \Delta x)\cdot(2 + x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6 + x - x^2 - 2\cdot\Delta x - x\cdot\Delta x - 6 - x - 3\cdot\Delta x + x^2 + x\cdot\Delta x}{\Delta x\cdot(2 + x + \Delta x)\cdot(2 + x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-5\cdot\Delta x}{\Delta x\cdot(2 + x + \Delta x)\cdot(2 + x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-5}{(2 + x + \Delta x)\cdot(2 + x)} = \frac{-5}{(2 + x)^2}.$$

Portanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-5}{(2 + x)^2}.$$

Exemplo 5.7 *Dada* $y = \dfrac{3 - x}{2 + x}$ *, encontre* $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x_0 = -1}$ *, ou seja, encontre* $f'(-1)$.

Resolução: Do exemplo acima, temos $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-5}{(2 + x)^2}$, logo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0 = -1} = \frac{-5}{(2 + (-1))^2} = \frac{-5}{1^2} = -5.$$

Portanto,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0 = -1} = -5,$$

ou seja,

$$f'(-1) = -5.$$

Exemplo 5.8 *Calcular* $f'(x)$*, onde* $f(x) = x^2 - 3x$.

Resolução: Pela definição de derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Substituindo os valores, obtemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - (x^2 - 3x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2\Delta x \cdot x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - x^2 + 3x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 3)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x - 3) = 2x - 3.
\end{aligned}$$

Portanto, se $f(x) = x^2 - 3x$, então $f'(x) = 2x - 3$.

Observação

(i) Se não existe o limite ou se é igual a $\pm\infty$*, dizemos que a função não é derivável no ponto* x_0*, isto é,* $\nexists\ f'(x_0)$.

(ii) Se existe apenas $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *ou* $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

dizemos que a derivada é lateral, e indicaremos por

a) $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$ *- derivada à direita de* x_0.

b) $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$ *- derivada à esquerda de* x_0.

c) Se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$*, dizemos que a função é derivável no ponto* x_0*, isto é,* $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$.

(iii) Se existem as derivadas laterais, porém $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$*, então dizemos que não existe* $f'(x_0)$*, ou seja, derivada da uma função no ponto existe se, e somente se, as derivadas laterais são iguais.*

(iv) Uma função é derivável num intervalo $[a,b]$*, se existem derivadas em qualquer ponto do intervalo* $[a,b]$.

Exemplo 5.9 Calcular $f'(x)$ no ponto $x_0 = 0$ da função $f(x) = |x|$, ou seja, $f'(0)$.

Resolução: Por definição, temos

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(0 + \Delta x\right) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(\Delta x\right) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Agora, pela definição de módulo ou valor absoluto de um número real a

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se} \quad a \geq 0 \\ -a, & \text{se} \quad a < 0 \end{cases},$$

vem

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

e

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Portanto, pela terceira observação acima, $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$, não existe a derivada de $f(x) = |x|$ no ponto $x_0 = 0$.

Interpretação geométrica da derivada

A derivada de uma função num dado ponto, quando existe, tem um significado geométrico importante, que será discutido agora.

Seja $f(x)$ uma função definida e contínua em $[a,b]$. Seja G o gráfico da função $f(x)$. Seja $x \in [a,b]$ e $x_0 \in [a,b)$, $x \neq x_0$. Veja a figura 5.2 abaixo:

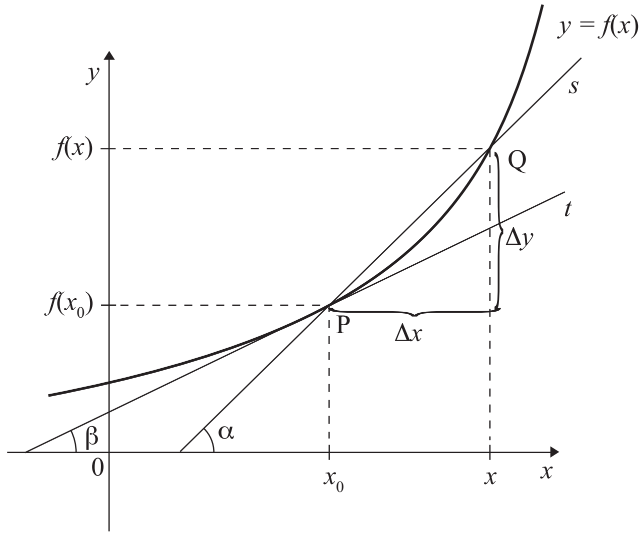

Figura 5.2

A reta s é determinada pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$ é uma secante à curva G e o se o coeficiente angular α é

$$tg\ \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se f é derivável no ponto x, quando $x \to x_0$, $Q \to P$ e $s \to t$, onde t é tangente geométrica à curva G no ponto P, isto é,

$$tg\ \beta = f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Assim...

Podemos dizer que a derivada de uma função $f(x)$ quando existe, assume em cada ponto x_0, um valor que é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x)$, no ponto de abscissa x_0.

Observação *A equação de uma reta não vertical passando em um ponto (x_0, y_0), é dada por*

$$y - y_0 = a(x - x_0),$$

onde a é o coeficiente angular da reta. Se $f(x)$ é uma função derivável em $x = x_0$ segue da interpretação geométrica da derivada que a reta tangente ao gráfico de $f(x)$, no ponto $\left(x_0, f(x_0)\right)$, tem coeficiente angular $a = f'(x_0)$. Portanto, a equação da reta tangente é

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Exemplo 5.10 *Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$, no ponto (2,4).*

Resolução: Vamos determinar o coeficiente angular da reta que é $f'(2)$, temos

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(2 + \Delta x\right) - f(2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(2 + \Delta x\right)^2 - 2^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(2^2 + 4\Delta x + (\Delta x)^2\right) - 4}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(4 + \Delta x\right)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(4 + \Delta x\right) = 4
\end{aligned}$$

Assim,

$$f'(2) = 4\,.$$

A equação da reta tangente é:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

ou seja,

$$y - f(2) = f'(2)\left(x - 2\right).$$

Logo,

$$y - 4 = 4\left(x - 2\right) \Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \Rightarrow y = 4x - 8 + 4 = 4x - 4\,.$$

Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto (2,4) é $y = 4x - 4$.

Se uma função $f(x)$ *é derivável no ponto* x_0 *de seu domínio, então* $f(x)$ *é contínua em* x_0*, isto é, se existe* $f'(x)$*, então* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f'(x_0)$.

A recíproca não é verdadeira, ou seja, se $f(x)$ é contínua em x_0, então não é necessário que $f'(x_0)$ exista. Por exemplo, $f(x) = |x|$ é contínua no ponto $x = 0$, mas $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$. Vimos que $f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0) = 1$.

Cálculo das derivadas

O cálculo da derivada de uma função pela definição, dependendo da função, pode ser bastante complicado. Contudo, com base na definição de derivada da função, é possível obter várias regras que facilitam muito o trabalho. São as chamadas regras de derivação para soma, produto e quociente de funções. Elas são importantes no cálculo de derivadas de qualquer função.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de cálculo de derivada, usando a definição de derivada da função. Posteriormente, estes exemplos vão ser utilizados como regras de derivação.

- **Derivada da função constante**

Se $f(x) = k$, onde k é uma constante, então $f'(x) = 0$.

De fato,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k-k}{\Delta x} = 0.$$

Logo, se $f(x) = k$, então $f'(x) = 0$.

Por exemplo, se $f(x) = 4$, então $f'(x) = 0$.

- **Derivada da função afim**

Se $f(x) = ax + b$, onde a e b são constantes e $a \neq 0$, então $f'(x) = a$.

De fato,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x) + b - (ax+b)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax + a\Delta x + b - ax - b}{\Delta x} = a. \end{aligned}$$

Logo, se $f(x) = ax + b$, então $f'(x) = a$.

Por exemplo:

(i) Se $f(x) = 5x + 4$, então $f'(x) = 5$;

(ii) Se $f(x) = 2 - 6x$, então $f'(x) = -6$.

- **Derivada da função potência**

Se $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Por exemplo:

(i) Se $f(x) = x^4$, então $f'(x) = 4x^3$;

(ii) Se $f(x) = x^2$, então $f'(x) = 2x$.

Observação *Podemos estender a potência* $n \in \mathbb{N}$, *para qualquer* n *que seja inteiro ou racional. Por exemplo, se* $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$, *então* $f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$, *aqui* $n = \frac{3}{4}$.

- **Derivada da função soma**

Sejam $g(x)$ e $h(x)$ duas funções deriváveis no ponto x, então $f(x) = g(x) + h(x)$ também é derivável no ponto x e

$$f'(x) = g'(x) + h'(x).$$

Logo, se $f(x) = g(x) + h(x)$, então

$$f'(x) = g'(x) + h'(x).$$

Observação *Podemos estender a propriedade dada acima para a soma de* n *funções, isto é, se*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$

então,

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x).$$

Por exemplo, se $f(x) = x^4 + 3x^2 + x$, *então* $f'(x) = 4x^3 + 6x + 1$.

- **Derivada da função produto**

Sejam $u(x)$ e $v(x)$ duas funções deriváveis em x, então $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ também é derivável em x, e

$$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x).$$

Logo, se $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, então

$$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x).$$

Para simplificar a notação, às vezes escrevemos simplesmente,

$$f' = u \cdot v' + v \cdot u'.$$

Observação *Podemos estender a propriedade dada acima para o produto de n funções, ou seja, se*

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x),$$

então,

$$f'(x) = f_1'(x) f_2(x) \ldots f_n(x) + f_1(x) f_2'(x) \ldots f_n(x) + \ldots + f_1(x) f_2(x) \ldots f_n'(x)$$

Em particular, se $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_n(x) = u(x)$, *então*

$$f(x) = (u(x))^n \Rightarrow f'(x) = n(u(x))^{n-1} u'(x).$$

Por exemplo:

(i) $f(x) = 5x^2 \Rightarrow f'(x) = 10x$;

(ii) $f(x) = 7x^3 + 4x^2 + 5x \Rightarrow f'(x) = 21x^2 + 8x + 5$;

(iii) $f(x) = (x^2 + x + 1)^5 \Rightarrow f'(x) = 5(x^2 + x + 1)^4 (2x + 1)$.

- **Derivada da função quociente**

Sejam $u(x)$ e $v(x)$ duas funções deriváveis no ponto x. Seja $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ com $v(x) \neq 0$. Então,

$$f'(x) = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Logo, se $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, com $v(x) \neq 0$, então

$$f'(x) = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

Para simplificar a notação, às vezes escrevemos simplesmente,

$$f' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}.$$

Por exemplo:

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x \cdot 0 - 1 \cdot 1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$;

(ii) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(x+1) \cdot 2 - 2x \cdot 1}{(x+1)^2}$

$$= \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2};$$

(iii) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{x^2\cdot 1-(x+1)\cdot 2x}{x^4}$

$$=\frac{x^2-2x^2-2x}{x^4}=\frac{-x-2}{x^3}.$$

Resumindo:

Seja $f(x)$ uma função de x, então temos as seguintes regras de derivação:

(i) $f(x)=k$ $\Rightarrow f'(x)=0$, *onde k é uma constante;*

(ii) $f(x)=ax+b$ $\Rightarrow f'(x)=a$, *onde a e b são constantes;*

(iii) $f(x)=x^n$ $\Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$, *onde $n\in\mathbb{Q}$, racionais;*

(iv) $f(x)=g(x)+h(x) \Rightarrow f'(x)=g'(x)+h'(x)$;

(v) $f(x)=u(x)\cdot v(x) \Rightarrow f'(x)=u(x)\cdot v'(x)+v(x)\cdot u'(x)$,

(vi) $f(x)=(u(x))^n$ $\Rightarrow f'(x)=n(u(x))^{n-1}u'(x)$;

(vii) $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ $\Rightarrow f'(x)=\dfrac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$, $v(x)\neq 0$.

Derivada das funções trigonométricas, exponencial e logarítmica

A seguir, apresentaremos as fórmulas (sem demonstração) para o cálculo de derivadas de algumas funções trigonométricas, da exponencial e logarítmica.

- **Derivada da função seno**

Seja $f(x) = \text{sen}\, x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então

$$f'(x) = (\text{sen}\, x)' = \cos x.$$

- **Derivada da função cosseno**

Seja $f(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então

$$f'(x) = (\cos x)' = -\,\text{sen}\, x.$$

- **Derivada da função tangente**

Seja $f(x) = \text{tg}\, x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então

$$f'(x) = (\text{tg}\, x)' = \sec^2 x.$$

- **Derivada da função exponencial**

Seja $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+$ e $a \neq 1$, então

$$f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a.$$

Em particular, quando $a = e$, então

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$.

- **Derivada da função logarítmica**

Seja $f(x) = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}_+$ e $a \neq 1$, então

$$f'(x) = (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Em particular,

$$f(x) = \log_e x = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Vamos agora resolver alguns exemplos, calculando a derivada de algumas funções, utilizando as regras apresentadas.

Preste atenção para em seguida aplicar seus conhecimentos.

Exemplo 5.11 *Calcular a derivada de*

$$f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 5x - 6.$$

Resolução: Usando as regras (iv) e (i) do resumo, vem

$$f'(x) = \left(7x^3 - 3x^2 + 5x - 6\right)' = \left(7x^3\right)' - \left(3x^2\right)' + \left(5x\right)' + 6',$$

ou,

$$f'(x) = 7 \cdot 3x^{3-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} + 5 \cdot x^{1-1} + 0 = 21x^2 - 6x + 5.$$

Portanto, a derivada da função $f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 5x - 6$, é dada por

$$f'(x) = 21x^2 - 6x + 5.$$

Exemplo 5.12 *Calcular a derivada de*

$$f(x) = x^{-4} - 2\cos x + \text{sen } x.$$

Resolução: Usando as regras (iv) do resumo e 5.4.1, vem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^{-4} - 2 \cdot \cos x + \text{sen } x\right)' \\ &= \left(x^{-4}\right)' - \left(2 \cdot \cos x\right)' + \left(\text{sen } x\right)' \\ &= -4 \cdot x^{-4-1} - 2\left(-\text{sen } x\right) + \cos x \\ &= -4 \cdot x^{-5} + 2 \cdot \text{sen } x + \cos x. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada de $f(x) = x^{-4} - 2 \cdot \cos x + \text{sen } x$ é a função

$$f'(x) = -4x^{-5} + 2\ \text{sen } x + \cos x.$$

Exemplo 5.13 *Calcular a derivada de*

$$f(x) = \left(2x^3 - 5x^2 + 3x - 1\right) \cdot \left(3x^2 - 2x + 5\right).$$

Resolução: Inicialmente, vamos considerar

$$u(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1 \text{ e } v(x) = 3x^2 - 2x + 5.$$

Assim,

$$u'(x) = \left(2x^3 - 5x^2 + 3x - 1\right)' = 6x^2 - 10x + 3 - 0 = 6x^2 - 10x + 3,$$

ou

$$u'(x) = 6x^2 - 10x + 3$$

e

$$v'(x) = \left(3x^2 - 2x + 5\right)' = 6x - 2 + 0 = 6x - 2\,.$$

Agora, usando a regra (v) do resumo,vem

$$\begin{aligned} f'(x) &= u(x)\cdot v'(x) + v(x)\cdot u'(x) \\ &= \left(2x^3 - 5x^2 + 3x - 1\right)\left(6x - 2\right) + \left(3x^2 - 2x + 5\right)\left(6x^2 - 10x + 3\right) \\ &= 30x^4 - 76x^3 + 87x^2 - 68x + 17\,. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada da função

$$f(x) = \left(2x^3 - 5x^2 + 3x - 1\right)\left(3x^2 - 2x + 5\right)$$

é dada por

$$f'(x) = 30x^4 - 76x^3 + 87x^2 - 68x + 17\,.$$

Exemplo 5.14 Encontrar a derivada de $f(x) = \dfrac{\ln x}{\cos x}$.

Resolução: Usando a regra (vii) do resumo, vem

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\cos x}\right)' &= \frac{\cos x\cdot\left(\ln x\right)' - \ln x\cdot\left(\cos x\right)'}{\left(\cos x\right)^2} \\ &= \frac{\cos x\cdot\frac{1}{x} - \ln x\cdot(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\frac{\cos x}{x} + \ln x\cdot\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\frac{\cos x + x\cdot\ln x\cdot\operatorname{sen} x}{x}}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x + x\cdot\ln x\cdot\operatorname{sen} x}{x\cdot\cos^2 x} \end{aligned}$$

Portanto, a derivada da função

$$f(x) = \frac{\ln x}{\cos x},$$

é a função dada por

$$f'(x)=\frac{\cos x + x\cdot \ln x \cdot \operatorname{sen} x}{x\cdot \cos^2 x}.$$

Exemplo 5.15 *Determinar a derivada de*

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}.$$

Resolução: Pela regra (vii) do resumo, temos

$$\begin{aligned}
f'(x)=\left(\frac{x+1}{x^2-4}\right)' &= \frac{\left(x^2-4\right)\cdot\left(x+1\right)'-\left(x+1\right)\cdot\left(x^2-4\right)'}{\left(x^2-4\right)^2}\\
&= \frac{\left(x^2-4\right)\cdot 1-\left(x+1\right)\cdot\left(2x\right)}{\left(x^2-4\right)^2}\\
&= \frac{x^2-4-2x^2-2x}{\left(x^2-4\right)^2}\\
&= \frac{-x^2-2x-4}{\left(x^2-4\right)^2}
\end{aligned}$$

Portanto, a derivada da função

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$$

é a função dada por

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x-4}{\left(x^2-4\right)^2}.$$

Responda aos exercícios propostos aplicando o que você estudou nesta Unidade. Caso tenha dúvidas, releia o conteúdo e busque ajuda junto ao Sistema de Acompanhamento.

Exercícios propostos – 2

- Obtenha a derivada de cada função a seguir:

1) $f(x) = -5$.

2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x - 8$.

3) $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$.

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{5}}$.

5) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$.

6) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$.

7) $f(x) = 10 \cdot \log_2 x + \text{tg } x + \sqrt[3]{x}$.

8) $f(x) = x^4 - 2\cos x + 3 \text{ sen } x$.

9) $f(x) = x^3 \cdot \text{tg } x$.

Derivada de função composta (ou regra da cadeia)

Sejam $y = f(x)$ e $u = g(x)$ duas funções, tais que suas derivadas existam e exista a derivada da função $y = f(g(x))$, que indicaremos por $\dfrac{dy}{dx}$, então

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

ou ainda,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Logo,

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

A derivada obtida acima, da **função composta**, também é conhecida como **regra da cadeia**.

Exemplo 5.16 *Encontrar a derivada da função* $y = \text{sen } x^2$.

Resolução: Temos de $y = \text{sen } x^2$, $y = \text{sen } u$, onde $u = x^2$, $\frac{dy}{du} = \cos u$ e $\frac{du}{dx} = 2x$.

Logo,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\cos u)\ 2x = (\cos x^2)\ 2x = 2x \cos x^2 .$$

Portanto, a derivada de $y = \text{sen } x^2$ é a função $y' = 2x \cos x^2$.

Exemplo 5.17 *Determinar a derivada da função* $y = e^{4x}$.

Resolução: Temos, $y = e^{4x}$, então $y = e^u$, onde $u = 4x$, $\frac{dy}{du} = e^u$ e $\frac{du}{dx} = 4$.

Logo,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u\ 4 = 4\ e^{4x},$$

Portanto, a derivada de $y = e^{4x}$ é a função $y' = 4\ e^{4x}$.

Exemplo 5.18 *Calcular a derivada de* $y = \cos^3 x$.

Resolução: Como $y = \cos^3 x = (\cos x)^3$, temos $y = u^3$ onde $u = \cos x$.

Agora, $\frac{dy}{du} = 3 \cdot u^2$ e $\frac{du}{dx} = -\text{sen } x$.

Logo,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 3u^2(-\text{sen } x) = -3 \cdot (\cos x)^2 \cdot \text{sen } x = -3 \cdot \cos^2 x \cdot \text{sen } x .$$

Portanto, a derivada de $y = \cos^3 x$ é a função $y' = -3 \cdot \cos^2 x \cdot \text{sen } x$.

Aplicações da regra de derivação de função composta

Agora você vai conhecer algumas regras, aplicando diretamente a regra da cadeia ou derivada de função composta. Leia com atenção, dando especial atenção aos exemplos.

- **Derivada da função dada por $y = u^n$ onde $u = u(x)$, é uma função derivável num ponto x e $n \in \mathbb{R}$**

$$\text{Se } y = u^n \text{ então } y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'.$$

Exemplo 5.19 *Determinar a derivada de*

$$y = \left(x^3 - 4x^2 + x - 2\right)^4.$$

Resolução: Aqui,

$$u = x^3 - 4x^2 + x - 2,\ n = 4 \ \text{e}\ u' = 3x^2 - 8x + 1.$$

Assim, $y = u^4$.

Logo,

$$y' = 4 \cdot (u)^{4-1} u' = 4 \cdot u^3 \cdot u' = 4\left(x^3 - 4x^2 + x - 2\right)^3\left(3x^2 - 8x + 1\right).$$

Portanto, a derivada de $y = \left(x^3 - 4x^2 + x - 2\right)^4$ é a função

$$y' = 4 \cdot \left(x^3 - 4x^2 + x - 2\right)^3 \cdot \left(3x^2 - 8x + 1\right).$$

Exemplo 5.20 *Calcular a derivada de*

$$y = \cos^3 x.$$

Resolução: Como $y = \cos^3 x = (\cos x)^3$, temos $u = \cos x$, $n = 3$ e $u' = -\text{sen}\ x$. $y = u^3$.

Logo,

$$y' = 3 \cdot u^{3-1}.u' = 3 \cdot u^2 \cdot u' = 3 \cdot (\cos x)^2 \cdot (-\text{sen}\ x) = -3 \cdot \cos^2 x \cdot \text{sen}\ x.$$

Portanto, a derivada de $y = \cos^3 x$ é a função $y' = -3 \cdot \cos^2 x \cdot \text{sen}\ x$.

Exemplo 5.21 *Encontrar a derivada de*

$$y = \sqrt{1 + x^2}.$$

Resolução: Sabemos que

$$y=\sqrt{1+x^2}=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde

$$u=1+x^2,\ n=\frac{1}{2}\ \text{e}\ u'=0+2x=2x.$$

Assim, $y=u^{\frac{1}{2}}$.

Logo,

$$y'=\frac{1}{2}\cdot u^{\frac{1}{2}-1}\cdot u'=\frac{1}{2}\cdot u^{-\frac{1}{2}}\cdot u'$$

$$=\frac{u'}{2\cdot u^{\frac{1}{2}}}=\frac{u'}{2\cdot\sqrt{u}}=\frac{2x}{2\cdot\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Portanto,

$$y=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

- **Derivada da função dada por $y=\operatorname{sen} u$, onde $u=u(x)$ é uma função derivável num ponto x.**

Se $y=\operatorname{sen} u$ então $y'=\cos u\cdot u'$.

Exemplo 5.22 *Determinar a derivada de*

$$y=\operatorname{sen}\left(x^3-4x^2+3x-7\right).$$

Resolução: Aqui,

$$u=x^3-4x^2+3x-7\ \text{e}\ u'=3x^2-8x+3.$$

Assim, $y=sen\ u$.

Logo,

$$y'=\cos u\cdot u'=\left(\cos(x^3-4x^2+3x-7)\right)\left(3x^2-8x+3\right).$$

Portanto,

$$y=\operatorname{sen}\left(x^3-4x^2+3x-7\right)\Rightarrow$$

$$y'=\left(3x^2-8x+3\right)\cos\left(x^3-4x^2+3x-7\right).$$

- **Derivada da função dada por** $y = \cos u$**, onde** $u = u(x)$ **é uma função derivável num ponto** x**.**

  Se $y = \cos u$ então $y' = -sen\ u \cdot u'$.

Exemplo 5.23 *Determinar a derivada de*

$$y = \cos\left(x^3 - 4x^2 + 3x - 7\right).$$

Resolução: Aqui,

$$u = x^3 - 4x^2 + 3x - 7 \text{ e } u' = 3x^2 - 8x + 3.$$

Assim, $y = \cos u$.

Logo,

$y' = -\text{sen}\ u \cdot u' = -\left(sen(x^3 - 4x^2 + 3x - 7)\right) \cdot \left(3x^2 - 8x + 3\right)$.

Portanto,

$$y = \cos\left(x^3 - 4x^2 + 3x - 7\right) \Rightarrow$$
$$y' = -\left(3x^2 - 8x + 3\right)\text{sen}\left(x^3 - 4x^2 + 3x - 7\right).$$

- **Derivada da função dada por** $y = e^u$ **onde** $u = u(x)$ **é uma função derivável num ponto** x**.**

  Se $y = e^u$ então $y' = e^u \cdot u'$.

Exemplo 5.24 *Encontrar a derivada de*

$$y = e^{-\frac{1}{3}\cdot x^3}.$$

Resolução: Aqui,

$$u = -\frac{1}{3} \cdot x^3 \text{ e } u' = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^{3-1} = -1 \cdot x^2 = -x^2 \text{ ou } u' = -x^2.$$

Assim, $y = e^u$

Logo,

$$y' = e^u \cdot u' = e^{-\frac{1}{3}\cdot x^3} \cdot \left(-x^2\right)$$

Portanto, a derivada de $y = e^{-\frac{1}{3}\cdot x^3}$ é a função $y' = e^{-\frac{1}{3}\cdot x^3} \cdot \left(-x^2\right)$.

Exemplo 5.25 *Calcular a derivada de*

$$y = e^{3+\ln x}.$$

Resolução: Temos $u = 3 + \ln x$ e $u' = 0 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$. Aplicando diretamente a regra acima, vem

$$y' = e^u \cdot u' = e^{3+\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{3+\ln x}}{x}.$$

Portanto, a derivada de $y = e^{3+\ln x}$ é a função $y' = \dfrac{e^{3+\ln x}}{x}$.

- **Derivada da função dada por $y = a^u$ onde $u = u(x)$ é uma função derivável num ponto x.**

Se $y = a^u$ então $y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$. Em particular, se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x$.

Exemplo 5.26 *Determinar a derivada de*

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^3+x-1}.$$

Resolução: Temos $a = \dfrac{1}{5}$, $u = x^3 + x - 1$ e $u' = 3x^2 + 1$.
Logo,

$$y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^3+x-1} \cdot \left(3x^2+1\right) \cdot \ln\left(\frac{1}{5}\right).$$

Portanto, a derivada da função $y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^3+x-1}$ é a função $y' = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^3+x-1} \cdot \left(3x^2+1\right) \cdot \ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$.

Exemplo 5.27 *Calcular a derivada de*

$$y = 3^{\ln x}.$$

Resolução: Temos $a = 3$, $u = \ln x$ e $u' = \dfrac{1}{x}$.

Logo,

$$y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a = 3^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln 3.$$

Portanto, a derivada de $y = 3^{\ln x}$ é a função $y' = 3^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln 3$.

- **Derivada da função dada por $y = \ln u$ onde $u = u(x)$ é uma função derivável num ponto x.**

Se $y = \ln u$ então $y' = \frac{u'}{u}$. Em particular se $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Exemplo 5.28 *Determinar a derivada de*

$$y = \ln\left(-\frac{1}{2}x^2\right).$$

Resolução: Aqui temos $u = -\frac{1}{2}x^2$ e $u' = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = -x$.

Logo,

$$y' = \frac{u'}{u} = \frac{-x}{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{x}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{\frac{x}{2}} = \frac{2}{x}.$$

Portanto, a derivada de $y = \ln\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ é a função $y' = \frac{2}{x}$.

Exemplo 5.29 *Calcular a derivada de*

$$y = \ln\left(x \cdot e^{x+2}\right).$$

Resolução: Aqui temos $u = x \cdot e^{x+2}$. Para encontrarmos u' vamos utilizar a regra da derivada do produto de duas funções, assim

$$u' = x \cdot \left(e^{x+2}\right)' + \left(x\right)' \cdot e^{x+2} = x \cdot e^{x+2} \cdot \left(x+2\right)' + 1.e^{x+2}$$

$$\Rightarrow u' = x \cdot e^{x+2}.1 + e^{x+2} = x \cdot e^{x+2} + e^{x+2} = e^{x+2} \cdot \left(x+1\right),$$

Aplicando a regra de derivação acima, temos

$$y' = \frac{u'}{u} = \frac{e^{x+2} \cdot (x+1)}{x \cdot e^{x+2}} = \frac{x+1}{x},$$

Portanto,

$$y = \ln\left(x \cdot e^{x+2}\right) \Rightarrow y' = \frac{x+1}{x}.$$

- **Derivada da função dada por $y = \log_a u$, onde $u = u(x)$ é uma função derivável num ponto x.**

Se $y = \log_a u$ então $y' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$.

Exemplo 5.30 *Determinar a derivada de*

$$y = \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - \frac{3}{5}x + 2\right).$$

Resolução: Observe que $a = \dfrac{1}{3}$ e $u = x^2 - \dfrac{3}{5}x + 2$. Logo, $u' = 2x - \dfrac{3}{5}$.

Aplicando a regra de derivação acima, temos

$$y' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} = \frac{2x - \frac{3}{5}}{\left(x^2 - \frac{3}{5}x + 2\right) \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

Portanto, a derivada de

$$y = \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - \frac{3}{5}x + 2\right)$$

é a função

$$y' = \frac{2x - \frac{3}{5}}{\left(x^2 - \frac{3}{5}x + 2\right) \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

Exemplo 5.31 *Calcular a derivada de*

$$y = \log\left(\frac{1+x}{x}\right).$$

Resolução: Aqui, $a = 10$ e $u = \dfrac{1+x}{x}$. Para encontrarmos u' vamos utilizar a regra de derivação do quociente entre duas funções, assim

$$u' = \left(\frac{1+x}{x}\right)' = \frac{x\cdot(1+x)' - (1+x)\cdot x'}{x^2}$$
$$= \frac{x\cdot 1 - (1+x)\cdot 1}{x^2} = \frac{x-(1+x)}{x^2}$$
$$= \frac{x-1-x}{x^2} = \frac{-1}{x^2},$$

Agora, aplicando a regra de derivação acima, temos

$$y' = \frac{u'}{u\cdot \ln a} = \frac{\dfrac{-1}{x^2}}{\dfrac{1+x}{x}\cdot \ln 10} = \frac{-1}{x^2\cdot\dfrac{1+x}{x}\cdot \ln 10} = \frac{-1}{x\cdot(1+x)\cdot \ln 10},$$

ou seja,

$$y' = \frac{-1}{x\cdot(1+x)\cdot \ln 10}.$$

Portanto, a derivada de

$$y = \log\left(\frac{1+x}{x}\right)$$

é a função

$$y' = \frac{-1}{x\cdot(1+x)\cdot \ln 10}.$$

Vamos verificar se você está acompanhando tudo até aqui? Procure, então, resolver os exercícios propostos. Não deixe de procurar o Sistema de Acompanhamento caso tenha dúvidas.

Exercícios propostos – 3

- Obtenha a derivada de cada função a seguir:

1) $y = \log_a x^2$.
2) $y = \ln(x^3 + 1)$.
3) $f(x) = 3 \text{ sen } 2x$.
4) $g(x) = \text{sen}(\cos x)$.
5) $f(x) = \text{sen}(\ln x)$.
6) $h(x) = (2x^3 + 4x + 1)^5$.
7) $h(x) = \dfrac{1}{(2x^3 + 4x + 1)^5}$.
8) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}$.
9) $h(x) = \log\left(1 - 5x\right)^4$.
10) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}} + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+1}$.
11) $y = x^x$.
12) $y = (\text{sen } x)^x$.

Derivada de função inversa

Seja $y = f(x)$ uma função inversível, derivável no ponto x, onde $f'(x) \neq 0$. A função inversa de $y = f(x)$ que representaremos por $x = g(y)$, é derivável no ponto y sendo $y = f(x)$, sua derivada é

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Ou seja, se $y = f(x)$, função dada, e $x = g(y)$, sua inversa, então $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Exemplo 5.32 *Calcular a derivada da função inversa de* $y = f(x) = 5x - 7$.

Resolução: Inicialmente vamos calcular a função inversa de $y = f(x) = 5x - 7$ que é $x = g(y)$. Aplicando a regra prática para encontrarmos a função inversa de uma dada função, estudada na seção 3.7, temos

$$y = 5x - 7 \Rightarrow x = 5y - 7 \Rightarrow 5y = x + 7 \Rightarrow y = \frac{x+7}{5},$$

ou ainda,

$$x = g(y) = \frac{y+7}{5}.$$

Assim, a função inversa de $f(x) = 5x - 7$ é $x = g(y) = \dfrac{y+7}{5}$ e $f'(x) = 5$.

Logo,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{5} \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{5}.$$

De fato, calculando a derivada da função $g(y)$ em relação a y, temos:

$$g'(y) = \left(\frac{y+7}{5}\right)' = \frac{1}{5}.$$

Portanto, a derivada da função inversa de

$$y = f(x) = 5x - 7,\ g(y) = \frac{y+7}{5}$$

é dada por:

$$g'(y) = \frac{1}{5}.$$

Exemplo 5.33 *Determine a derivada da inversa da função* $y = f(x) = x^3$ *para* $x > 0$.

Resolução: Vamos calcular a função inversa de $y = f(x) = x^3$ aplicando a regra prática estudada na unidade 3 Assim, a função inversa da função $y = f(x) = x^3$ é $x = g(y) = \sqrt[3]{y}$, $y \in (0, \infty)$ e $f'(x) = 3x^2 \neq 0$ para todo $x > 0$, logo

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}.$$

Portanto, a derivada da inversa da função $f(x) = x^3$ para $x > 0$, $g(y) = \sqrt[3]{y}$ é

$$g'(y) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}.$$

Exemplo 5.34 *Calcular a derivada da inversa da função* $y = f(x) = x^2$ *para todo* $x > 0$.

Resolução: A derivada de f é $f'(x) = 2x$ e a função inversa de $y = f(x) = x^2$, aplicando a regra prática, é $x = g(y) = \sqrt{y}$ para $y > 0$, logo

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}} \text{ ou } g'(y) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}.$$

Portanto, a derivada da inversa da função $y = f(x) = x^2$ para todo $x > 0$, $g(y) = \sqrt{y}$ é $g'(y) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}$.

Exemplo 5.35 *Calcular a derivada da função inversa de* $y = f(x) = x^3 - 2$ *no ponto* $y = 6$*, ou seja,* $g'(6)$.

Resolução: A derivada da função f é $f'(x) = 3x^2$. Vamos calcular a função inversa de $y = f(x) = x^3 - 2$ que é $x = g(y)$, aplicando a regra prática, temos

$$y = x^3 - 2 \Rightarrow x = y^3 - 2 \Rightarrow x + 2 = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x+2},$$

ou ainda,

$$x = g(y) = \sqrt[3]{y+2}.$$

Assim, a função inversa de $y = f(x) = x^3 - 2$ é $x = g(y) = \sqrt[3]{y+2}$. Logo,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3 \cdot x^2} = \frac{1}{3 \cdot \left(\sqrt[3]{y+2}\right)^2},$$

ou seja,

$$g'(y) = \frac{1}{3 \cdot \left(\sqrt[3]{y+2}\right)^2}.$$

Como queremos calcular $g'(6)$, vem

$$g'(6) = \frac{1}{3\cdot\left(\sqrt[3]{6+2}\right)^2} = \frac{1}{3\cdot\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{3\cdot\left(2\right)^2} = \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}.$$

Portanto, a derivada da função inversa de $y = f(x) = x^3 - 2$, $g(y) = \sqrt[3]{y+2}$, no ponto $y = 6$ é $\frac{1}{12}$.

Será que você entendeu o que discutimos sobre a Derivada de Função inversa? Responda os exercícios, caso tenha dúvidas busque esclarecê-las antes de prosseguir seus estudos.

Exercícios propostos – 4

1) Calcular a derivada da função inversa de $y = f(x) = \sqrt[5]{x}$ no ponto $y = 1$.

2) Determinar a derivada da função inversa de $y = f(x) = 2x^2 - 3$.

3) Determinar a derivada da função inversa de $y = f(x) = 5 - 7x$.

4) Determinar a derivada da função inversa de $y = f(x) = x^4 + 1$.

Derivadas sucessivas

Suponha que f é uma função derivável no intervalo I. Se a função $f'(x)$, chamada de derivada primeira de $f(x)$, é derivável no mesmo intervalo, então existe a função derivada de $f'(x)$, indicada como $f''(x)$ que é chamada de derivada segunda de $f(x)$. Diz-se, então, que $f(x)$ é duas vezes derivável.

Seguindo esse procedimento sucessivamente e, supondo que $f(x)$ é n vezes derivável, obtém-se a função derivada n-ésima, ou derivada de ordem n, de $f(x)$ indicada como $f^{(n)}(x)$. As funções $f'(x)$, $f''(x)$,...., $f^{(n)}(x)$, são as derivadas sucessivas de $f(x)$.

Exemplo 5.36 *Determinar todas as derivadas da função*

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 1.$$

Resolução: Aplicando as regras de derivação estudadas, temos

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 1,$$
$$f'(x) = 3x^2 + 4x,$$
$$f''(x) = 6x + 4,$$
$$f'''(x) = 6,$$
$$f^{iv}(x) = 0,$$
$$f^{n}(x) = 0, \forall n \geq 4.$$

Portanto, todas as derivadas da função $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ é $f^{n}(x) = 0, \forall n \geq 4$.

Exemplo 5.37 *Obtenha a derivada terceira da função*

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Resolução: Aplicando as regras de derivação, temos

$$f(x) = \frac{1}{x},$$
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},$$
$$f''(x) = \frac{2}{x^3},$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

Portanto, a derivada terceira de $f(x) = \frac{1}{x}$ é $f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$.

Exemplo 5.38 *Obtenha a derivada de ordem 4 da função*

$$f(x) = e^{-2x}.$$

Resolução: Aplicando as regras de derivação, temos

$$f(x) = e^{-2x},$$
$$f'(x) = -2 \cdot e^{-2x},$$
$$f''(x) = 4 \cdot e^{-2x},$$
$$f'''(x) = -8 \cdot e^{-2x},$$
$$f''''(x) = 16 \cdot e^{-2x}.$$

Portanto, a derivada de ordem 4 ou a quarta derivada da função $f(x) = e^{-2x}$ é $f''''(x) = 16 \cdot e^{-2x}$ e consequentemente,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 2^n \cdot e^{-2x} \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 5.39 *Determinar a segunda derivada da função*

$$f(x) = sen\left(x^2 + 1\right).$$

Resolução: Aplicando as regras de derivação, vem

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(x^2 + 1\right),$$
$$f'(x) = 2x \cdot \cos\left(x^2 + 1\right),$$
$$f''(x) = -4x^2 \operatorname{sen}\left(x^2 + 1\right) + 2\cos\left(x^2 + 1\right).$$

Portanto, a segunda derivada de $f(x) = \operatorname{sen}\left(x^2 + 1\right)$ é

$$f''(x) = -4x^2 \operatorname{sen}\left(x^2 + 1\right) + 2\cos\left(x^2 + 1\right).$$

Procure, resolver os exercícios propostos. Esta é uma forma de certificar-se que entendeu o conteúdo abordado. Caso tenha dificuldades busque auxílio junto ao Sistema de Acompanhamento.

Exercícios propostos – 5

1) Calcular todas as derivadas da função $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

2) Calcular todas as derivadas da função $f(x)=a^x$.

3) Determinar a segunda derivada da função $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-x+2$.

4) Determinar a segunda derivada da função $f(x)=\cos\left(x^3+2\right)$.

5) Determinar a segunda derivada da função $f(x)=2\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

A Diferencial

Suponha que a função f seja definida por $y=f(x)$ e f seja derivável em x_0. A variação sofrida por f, quando se passa do ponto x_0 ao ponto $x_0+\Delta x$ é

$$\Delta y=\Delta f=f\left(x_0+\Delta x\right)-f(x_0).$$

Usando o símbolo $\approx$, significando "é *aproximadamente igual* a", dizemos que:

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x,$$

se Δx for suficientemente pequeno. O lado direto da expressão acima é definido como a **diferencial** de y. Isto nos motiva a seguinte definição.

Se a função f é definida por $y = f(x)$, então a diferencial de y, no ponto x_0, denotada por dy ou df é dada por

$$df = f'(x_0)\Delta x$$

onde x_0 está no domínio de f' e Δx é um incremento arbitrário de x_0.

Observação *Note que df depende de Δx e é fácil perceber que quanto menor for Δx, mais próximo df estará de Δf. Assim, podemos dizer que:*

$$df \cong \Delta f \text{ para pequenos valores de } \Delta x.$$

Dessa forma, a diferencial de uma função pode ser usada para calcular aproximadamente variações de f, para pequenos valores de Δx.

Exemplo 5.40 *Consideremos a função $f(x) = 3x^2$, $x_0 = 1$ e $x_0 + \Delta x = 1{,}01$, logo $\Delta x = 1{,}01 - 1 = 0{,}01$. Calcular Δf e df:*

Resolução: Vamos calcular inicialmente Δf dado por $\Delta f = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)$, assim,

$$\begin{aligned}\Delta f &= f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)\\ &= f(1{,}01) - f(1)\\ &= 3\cdot\left(1{,}01\right)^2 - 3\cdot 1^2\\ &= 3\cdot 1{,}0201 - 3\cdot 1\\ &= 3{,}0603 - 3 = 0{,}0603\end{aligned}.$$

Para calcularmos a diferencial de f no ponto $x_0 = 1$ e $\Delta x = 0{,}01$, temos

$$f'(x) = 6x \text{ e } f'(1) = 6\cdot 1 = 6,$$

Assim,

$$df = f'(x_0)\cdot\Delta x = f'(1)\cdot 0{,}01 = 6\cdot 0{,}01 = 0{,}06.$$

Não é difícil de observar que $df \cong \Delta f$.

Portanto,

$$\Delta f = 0{,}0603 \text{ e } df = 0{,}06.$$

Exemplo 5.41 *Calcule a diferencial de* $y = f(x) = x^2$ *no ponto* $x_0 = 2$ *e* $\Delta x = 0{,}01$.

Resolução: Sabemos que a diferencial de uma função f no ponto x_0 é dada por:

$$df = f'(x_0)\Delta x \text{ ou } df = f'(2)\cdot 0{,}01.$$

Como

$$f'(x) = 2x \text{ e } f'(2) = 2\cdot 2 = 4,$$

vem,

$$df = f'(2)\cdot 0{,}01 = 4\cdot 0{,}01 = 0{,}04.$$

Portanto, a diferencial de $y = f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 2$ e $\Delta x = 0{,}01$ é $df = 0{,}04$.

Exemplo 5.42 *Seja a função* $y = f(x) = 4x^2 - 3x + 1$, *encontre* Δy *e* dy *para*

(i) qualquer x *e* Δx;
(ii) $x = 2$, $\Delta x = 0{,}1$;
(iii) $x = 2$, $\Delta x = 0{,}01$;
(iv) $x = 2$, $\Delta x = 0{,}001$.

Resolução: (i) Vamos calcular inicialmente Δy. Como $y = 4x^2 - 3x + 1$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta y &= 4(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1 - f(x)\\
&= 4\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) - 3x - 4x^2 + 1 - \left(4x^2 - 3x + 1\right)\\
&= 4x^2 + 8x\cdot\Delta x + 4\cdot\left(\Delta x\right)^2 - 3x - 3\cdot\Delta x + 1 - 4x^2 + 3x - 1\\
&= 8x\cdot\Delta x - 3\cdot\Delta x + 4\left(\Delta x\right)^2\\
&= \left(8x - 3\right)\cdot\Delta x + 4\left(\Delta x\right)^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta y = \left(8x-3\right)\cdot\Delta x + 4\cdot\left(\Delta x\right)^2.$$

Agora, vamos calcular dy. Sabemos que $dy = f'(x)\cdot\Delta x$. A derivada de

$$y = f(x) = 4x^2 - 3x + 1$$

em relação a x é

$$f'(x) = 8x - 3\,.$$

Assim,

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = (8x - 3)\Delta x$$

Portanto,

$$dy = (8x - 3) \cdot \Delta x\,.$$

Os resultados para as partes (ii), (iii) e (iv) são apresentados no quadro abaixo, onde

$$\Delta y = (8x - 3)\Delta x + 4(\Delta x)^2 \text{ e } dy = (8x - 3)\Delta x$$

x	Δx	Δy	dy
2	0,1	1,34	1,3
2	0,01	0,1304	0,13
2	0,001	0,013004	0,013

Responda os exercícios e certifique-se de que entendeu o conteudo tratatdo, antes de prosseguir seus estudos.

Exercícios propostos – 6

1) Determinar a diferencial da função $f(x) = \cos x$ no ponto $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ para $\Delta x = \dfrac{1}{2}$.

2) Calcular dy da função $y = f(x) = e^{-x^2}$ no ponto $x_0 = 0$ para

$\Delta x = 0{,}01$.

3) Obtenha a diferencial de $y = f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ no ponto $x_0 = 2$ para $\Delta x = 0{,}1$.

4) Seja a função $y = f(x) = x^2 - 5x$. Calcular Δy e dy para $x_0 = -1$ e $\Delta x = 0{,}01$.

Funções marginais

Em Administração e Economia, dada uma função $f(x)$, costuma-se utilizar o conceito de função marginal para avaliar o efeito causado em $f(x)$ por uma pequena variação de x. **Chama-se função marginal de $f(x)$ à função derivada de** $f(x)$. Assim, a função custo marginal é a derivada da função custo, a função receita marginal é a derivada da função receita, e assim por diante. Nesta seção veremos algumas funções marginais.

Função custo marginal

Suponha que $C(x)$ seja o custo total de produção de x unidades de certo produto, com $x \geq 0$ e $C(x) \geq 0$. A função C é chamada de **função custo total** e temos a seguinte definição.

*Se $C(x)$ é o custo total de produção de x unidades de um produto, então o **custo marginal** quando $x = x_0$, é dado por $C'(x_0)$, caso exista. A função $C'(x)$ é chamada **função custo marginal**.*

Assim,

$$C'(x_0) \cong \Delta C = C(x_0 + 1) - C(x_0).$$

Portanto, o custo marginal é aproximadamente igual à variação do custo, decorrente da produção de uma unidade adicional, a partir de x_0 unidades.

Na definição acima, $C'(x_0)$ pode ser interpretada como a **taxa de variação** do custo total quando $x = x_0$ unidades são produzidas.

Exemplo 5.43 *Suponhamos que* $C(x)$ *seja o custo total de fabricação de* x *pares de calçados da marca WW, dado pela equação* $C(x) = 110 + 4x + 0{,}02x^2$. *Determinar o custo marginal quando* $x = 50$.

Resolução: Vamos calcular a derivada da função $C(x) = 110 + 4x + 0{,}02x^2$, ou seja, $C'(x) = 4 + 0{,}04x$ e $C'(50) = 4 + 0{,}04 \cdot 50 = 6$. Assim sendo, a taxa de variação do custo total, quando 50 pares de calçados da marca WW são fabricados, é R$6,00 por par fabricado.

O custo de fabricação do qüinquagésimo primeiro par de calçados é

$$C'(50) \cong \Delta C = C(51) - C(50)$$

e

$$\begin{aligned} C(51) - C(50) &= 110 + 4 \cdot 51 + 0{,}02 \cdot (51)^2 - \left(110 + 4 \cdot 50 + 0{,}02 \cdot (50)^2\right) \\ &= 366{,}02 - 360 = 6{,}02 \end{aligned}$$

Assim,

$$C'(50) \cong \Delta C = C(51) - C(50) = 6{,}02.$$

Logo, $C'(50)$ é o custo aproximado da produção do qüinquagésimo primeiro par de calçados da marca WW.

Portanto, o custo marginal quando $x = 50$ é $C'(50) = 6$.

Exemplo 5.44 *Consideremos a função custo* $C(x) = 0{,}02x^3 - 0{,}4x^2 + 400x + 200$, *determinar o custo marginal para* $x = 20$.

Resolução: Inicialmente, vamos calcular a derivada da função

$$C(x) = 0{,}02x^3 - 0{,}4x^2 + 400x + 200,$$

ou seja,

$$C'(x) = 0{,}06x^2 - 0{,}8x + 400$$

e

$$C'(20) = 0{,}06 \cdot (20)^2 - 0{,}8 \cdot 20 + 400 = 408.$$

Como $C'(20) \cong \Delta C = C(21) - C(20)$, vem

$$C'(20) \cong \left(0{,}02 \cdot (21)^3 - 0{,}4 \cdot (21)^2 + 400 \cdot 21 + 200\right)$$
$$-\left(0{,}02 \cdot (20)^3 - 0{,}4 \cdot (20)^2 + 400 \cdot 20 + 200\right)$$
$$\cong 8.608{,}82 - 8.200 = 408{,}82\,.$$

Logo, $C'(20)$ é o custo aproximado da produção do vigésimo primeiro item.

Portanto, o custo marginal quando $x = 20$ é $C'(20) = 408$.

Função receita marginal

Suponha que $R(x)$ seja a receita total obtida pela venda de x unidades de um produto, então temos a seguinte definição.

Se $R(x)$ é a receita obtida quando x unidades de um produto são demandadas, então a ***receita marginal****, quando $x = x_0$, é dado por $R'(x_0)$, caso exista. A função $R'(x)$ é chamada* ***função receita marginal****. $R'(x_0)$ pode ser positiva, negativa ou nula, e pode ser interpretada como a taxa de variação da receita total quanto $x = x_0$ unidades são demandadas.*

Assim,

$$R'(x_0) \cong \Delta R = R(x_0 + 1) - R(x_0)\,.$$

Portanto, a receita marginal é aproximadamente igual à variação da receita decorrente da venda de uma unidade adicional, a partir de x_0 unidades.

Exemplo 5.45 *Suponha de* $R(x)$ *seja a receita total recebida na venda de* x *cadeiras da loja BBC, e* $R(x) = -4x^2 + 2000x$. *Calcular a receita marginal para* $x = 40$.

Resolução: Inicialmente, vamos calcular a derivada da função $R(x) = -4x^2 + 2000x$, ou seja,

$$R'(x) = -8x + 2000 \text{ e } R'(40) = -8 \cdot 40 + 2000 = 1.680.$$

Como,

$$\begin{aligned} R'(40) &\cong R(41) - R(40) \\ &\cong -4 \cdot \left(41\right)^2 + 2000 \cdot 41 - \left(-4 \cdot (40)^2 + 2000 \cdot 40\right) \\ &\cong 75.276 - 73.600 = 1.676. \end{aligned}$$

Logo, $R'(40)$ é a receita efetiva da venda da quadragésima primeira cardeira.

Portanto, a receita marginal quando $x = 40$ é $R'(40) = 1.680$.

Exemplo 5.46 *Consideremos a função receita total da venda de* x *estantes dada por* $R(x) = 500x - \dfrac{x^2}{2}$. *Calcular a receita marginal para* $x = 50$.

Resolução: Calculando a derivada da função $R(x) = 500x - \dfrac{x^2}{2}$, temos,

$R'(x) = 500 - x$ e $R'(50) = 500 - 50 = 450$.

Como,

$$\begin{aligned} R'(50) &\cong R(51) - R(50) = 500 \cdot 51 - \frac{\left(51\right)^2}{2} - \left(500.50 - \frac{(50)^2}{2}\right) \\ &\cong 24.199{,}50 - 23.750 = 449{,}50. \end{aligned}$$

Logo, $R'(50)$ é a receita efetiva da venda da qüinquagésima cadeira.

Portanto, a receita marginal quando $x = 50$ é $R'(50) = 450$.

Função produtividade marginal

Consideremos uma função de produção P que dependa da quantidade x de um fator de produção variável. Chama-se **função produtividade marginal** do fator à derivada da função P em relação a x.

Exemplo 5.47 *A quantidade P (em toneladas) produzida por mês de certo produto e x o trabalho mensal envolvido (medido em homens-hora) é dada pela função produção $P(x) = 1016\sqrt{x}$. Determinar a produtividade marginal quando $x = 64$.*

Resolução: Vamos calcular a derivada da função $P(x) = 1016\sqrt{x}$ em relação a x, que é a função produtividade marginal do fator trabalho mensal, logo

$$P(x) = 1016\sqrt{x} = 1016\, x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow P'(x) = 1016\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 508x^{-\frac{1}{2}} = 508\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{508}{\sqrt{x}},$$

ou seja,

$$P'(x) = \frac{508}{\sqrt{x}}.$$

Calculando a produtividade marginal quando $x = 64$, temos

$$P'(64) = \frac{508}{\sqrt{64}} = \frac{508}{8} = 63{,}5.$$

Assim, se o número de homens-hora passar de 64 para 65, o aumento na produção mensal será, aproximadamente, 63,5 toneladas. Portanto, a produtividade marginal da função produção $P(x) = 1.016 \cdot \sqrt{x}$ quando $x = 64$ é 63,5 toneladas.

Exemplo 5.48 *Considere a função produção $P(H) = 500 \cdot \sqrt{H} - 6H$, onde P é a produção mensal (em toneladas), e H, o número de homens-hora empregados. Calcular:*

a) função produtividade marginal, $P'(H)$;

b) $P'(100)$.

Resolução: a) Vamos calcular a derivada da função P em relação a H, logo

$$P(H) = 500 \cdot \sqrt{H} - 6H = 500 \cdot H^{\frac{1}{2}} - 6H$$

$$\Rightarrow P'(H) = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot H^{\frac{1}{2}-1} - 6 = 250 \cdot H^{-\frac{1}{2}} - 6$$

$$= 250 \cdot \frac{1}{H^{\frac{1}{2}}} - 6 = \frac{250}{\sqrt{H}} - 6,$$

ou seja,

$$P'(H) = \frac{250}{\sqrt{H}} - 6.$$

Portanto, a função produtividade marginal é

$$P'(H) = \frac{250}{\sqrt{H}} - 6.$$

b) Agora, vamos calcular $P'(100)$, isto é,

$$P'(100) = \frac{250}{\sqrt{100}} - 6 = \frac{250}{10} - 6 = 25 - 6 = 19.$$

Portanto, $P'(100) = 19$.

Chegamos ao final de mais uma Unidade. Vamos ver se você entendeu o que foi estudado? Responda aos exercícios.

Exercícios Propostos – 7

1) O custo total da produção de x unidades de certo produto é dado por $C(x) = 800x - \frac{x^2}{40}$. Calcular:

a) a função custo marginal;

b) o custo marginal para $x = 1.000$;

c) o número de unidades produzidas quando o custo marginal é \$ 600.

2) Dada a função custo $C(x) = 0{,}3x^3 - 2{,}5x^2 + 20x + 200$, obtenha o custo marginal para $x = 50$ e $x = 100$.

3) Dada a função custo $C(x) = 0{,}3x^3 - 2{,}5x^2 + 20x + 200$, obtenha o custo médio para $x = 10$.

Sugestão. O custo médio, *CM*, é dado por $CM = \frac{C(x)}{x}$.

4) Dada a função receita $R(x) = -3x^2 + 1.500x$ obtenha a receita marginal quando $x = 250$.

5) A receita total recebida da venda de x televisores em cores é dada por $R(x) = 700x - \frac{x^3}{40}$. Determinar:

a) a função receita marginal;

b) a receita marginal quando $x = 20$.

6) Dada da função receita total $R(x) = -20x^2 + 1500x$, determinar a receita média para $x = 10$.

Sugestão. A receita medida, *RM*, é dada por $RM = \frac{R(x)}{x}$.

7) A quantidade P (em kilograma) produzida por dia de certo produto é x. O trabalho diário envolvido (medido em homens-hora) é dada pela função produção $P(x) = 100 \cdot \sqrt{x} + x^2 - 5x + 7$. Determinar:

a) a função produtividade marginal;

b) a produtividade marginal quando $x = 36$.

Tabela: derivadas e identidades trigonométricas

- ***Derivadas:*** Sejam u e v funções deriváveis de x e n constante.

1. $y = u^n \quad \Rightarrow y' = n\,u^{n-1}u'$.
2. $y = u\,v \quad \Rightarrow y' = u'v + v'u$.
3. $y = \dfrac{u}{v} \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.
4. $y = a^u \quad \Rightarrow y' = a^u(\ln a)\,u', \quad \left(a > 0,\, a \neq 1\right)$.
5. $y = e^u \quad \Rightarrow y' = e^u u'$.
6. $y = \log_a u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}\log_a e$.
7. $y = \ln u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{1}{u}u'$.
8. $y = u^v \quad \Rightarrow y' = v\,u^{v-1}\,u' + u^v(\ln u)\,v'$.
9. $y = \text{sen}\,u \quad \Rightarrow y' = u'\cos u$.
10. $y = \cos u \quad \Rightarrow y' = -u'\,\text{sen}\,u$.
11. $y = \text{tg}\,u \quad \Rightarrow y' = u'\sec^2 u$.
12. $y = \text{cotg}\,u \quad \Rightarrow y' = -u'\,\text{cosec}^2 u$.
13. $y = \sec u \quad \Rightarrow y' = u'\sec u\,\text{tg}\,u$.
14. $y = \text{cosec}\,u \quad \Rightarrow y' = -u'\,\text{cosec}\,u\,\text{cotg}\,u$.
15. $y = arc\ \text{sen}\,u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
16. $y = arc\ \cos u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
17. $y = arc\ \text{tg}\,u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.
18. $y = arc\ \text{cot}\,g\,u \quad \Rightarrow \dfrac{-u'}{1+u^2}$.
19. $y = arc\ \sec u, |u| \geq 1 \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$.

20. $y = arc\ \text{cosec}\ u, |u| \geq 1 \quad \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}, |u| > 1$.

- ***Identidades Trigonométricas***

1. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.
2. $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$.
3. $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x$.
4. $\text{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.
5. $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.
6. $\text{sen}\ 2x = 2\ \text{sen}\ x \cos x$.
7. $2\ \text{sen}\ x \cos y = \text{sen}(x - y) + sen(x + y)$.
8. $2\ \text{sen}\ x\ \text{sen}\ y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$.
9. $2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$.
10. $1 \pm \text{sen}\ x = 1 \pm \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

Saiba Mais...

Para aprofundar os conteúdos abordados nesta Unidade, consulte:

- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: Funções, Limite, Derivação, Integração, 5. ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
- MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton de O. **Cálculo funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Saraiva, 2005.
- SILVA, Sebastião Medeiros da; SILVA, Elio Medeiros da; SILVA, Ermes Medeiros da. **Matemática**: para os cursos de economia, administração e ciências contábeis. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1988.
- http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/supeior/superior.htm
- http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo

RESUMO

Nesta unidade você estudou a taxa média de variação, a definição de derivada de uma função e realizou cálculos de derivadas de diversos tipos de função, tais como: derivada da função produto e função quociente, derivada da função composta (ou regra da cadeia) e aplicações da regras de derivação de função composta, derivadas sucessivas, a diferencial e algumas funções marginais. Resta mencionar que a compreensão sempre referida é importante para que você possa acompanhar a disciplina. Só prossiga após fazer todos os exercícios propostos. Busque auxílio junto ao Sistema de Acompanhamento.

RESPOSTAS

- **Exercícios propostos – 1**

1) a) 0. b) 1. c) $\frac{1}{18}$. d) $\frac{7}{3}$. e) -1.

2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x + 1} + \sqrt{x_0 + 1}\right)}.$$

3) $$\frac{\Delta C}{\Delta x} = x_0 + 0{,}5 \cdot \Delta x + 1.$$

- **Exercícios propostos – 2**

1) $f'(x) = 0$.

2) $f'(x) = x^2 - x + 4$.

3) $f'(x) = -\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}$.

4) $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$.

5) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{2}\ln x\right)$.

6) $f'(x) = \frac{-x \text{ sen } x - 2\cos x}{x^3}$.

7) $f'(x) = \frac{10}{x \cdot \ln 2} + \sec^2 x + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.

8) $f'(x) = 4x^3 + 2 \text{ sen } x + 3\cos x$.

9) $f'(x) = x^3 \cdot \sec^2 x + 3x^2 \cdot \text{tg } x$.

- **Exercícios propostos – 3**

1) $y' = \frac{2}{x}\ln a$.

2) $y' = \dfrac{3x^2}{x^3+1}$.

3) $f'(x) = 6 \cdot \cos(2x)$.

4) $g'(x) = -\text{sen}\ x \cdot \cos(\cos x)$.

5) $f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$.

6) $h'(x) = 5 \cdot (2x^3 + 4x + 1)^4 \cdot (6x^2 + 4)$

7) $h'(x) = \dfrac{-5 \cdot \left(6x^2 + 4\right)}{\left(2x^3 + 4x + 1\right)^6}$.

8) $f'(x) = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{\left(\dfrac{3x-2}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x+1\right)^2}$.

9) $h'(x) = \dfrac{-20}{(1-5x) \cdot \ln 10}$.

10) $y' = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+1} \cdot \ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$.

11) $y' = x^x(1 + \ln x)$.

12) $y' = (\text{sen}\ x)^x \left[\ln(\text{sen}\ x) + x\ \text{cotg}\ x\right]$.

- **Exercícios propostos – 4**

1) 5.

2) $g'(y) = \dfrac{1}{4 \cdot \left(\sqrt{\dfrac{y+3}{2}}\right)}$.

3) $-\dfrac{1}{7}$.

4) $g'(y) = \dfrac{1}{4 \cdot \left(\sqrt[4]{y-1}\right)^3}$.

- **Exercícios propostos – 5**

1) $f^{n}(x) = (-1)^{n}\dfrac{n!}{x^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

2) $f^{n}(x) = a^{x}(\ln a)^{n}, \forall n$.

3) $f''(x) = 24x^{2} - 18x + 8$.

4) $f''(x) = -9x^{4} \cdot \cos\left(x^{3} + 2\right) - 6x \cdot sen\left(x^{3} + 2\right)$.

5) $f''(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$.

- **Exercícios propostos – 6**

1) $df = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

2) $dy = 0$.

3) $df = 0{,}1$.

4) $dy = -0{,}0700$ e $\Delta y = -0{,}070$.

- **Exercícios propostos – 7**

1) a) $C'(x) = 800 - \dfrac{x}{20}$; b) 750; c) 4.000.

2) 2.020 e 8.520.

3) $CM = 45$.

4) $R'(250) = 0$.

5) a) $R'(x) = 700 - \dfrac{3x^{2}}{40}$; b) 670.

6) 1.300.

7) a) $P'(x) = \dfrac{50}{\sqrt{x}} + 2x - 5$; b) 75,33.