# Matemática para o Ensino Fundamental

Éder Matheus de Souza

São Cristóvão/SE
2010

# Matemática para o Ensino Fundamental

**Elaboração de Conteúdo**
Éder Matheus de Souza

**Capa**
Hermeson Alves de Menezes



**Ficha catalográfica produzida pela Biblioteca Central**
**Universidade Federal de Sergipe**

| | |
|---|---|
| S729m | Souza, Éder Matheus de.<br>Matemática para o ensino fundamental/ Éder Matheus de Souza -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2010.<br><br>1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.<br><br>CDU 510 |

---

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

# Sumário

AULA 1

# Números Naturais

**META:**

Apresentar os números naturais axiomaticamente através dos axiomas de Peano .

**OBJETIVOS:**

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir números naturais axiomaticamente.

Saber fazer uso do processo de Indução finita.

**PRÉ-REQUISITOS**

Conjuntos; Funções; Métodos de demonstrações.

## 1.1 Introdução

Prezado aluno, bem vindo ao curso Matemática para o Ensino Fundamental. Esta é nossa primeira aula e logo de início faço-lhe a seguinte pergunta: O que é um números natural?

Até hoje estudamos nas primeiras séries do ensino fundamental, a utilidade dos Números naturais: contagem. Neste curso estamos interessados em saber qual estrutura matemática está por trás disto. Por que 2+3=5 e não 2+3=4? Isto tem haver com a noção de sucessor que apresentaremos nesta aula.

Nestas primeiras aulas, será apresentado a construção dos Números Naturais, bem como suas propriedades, de maneira axiomática. Isto será feito através dos Axiomas de Peano, que recebe este nome em homenagem ao matemático italiano Giuseppe Peano que, em 1889, os apresentou na obra "Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita".

## 1.2 Axiomas de Peano

Toda teoria dos números naturais pode ser deduzida a partir de 3 axiomas, intitulados **Axiomas de Peano**, que serão apresentados a seguir.

**Axioma 1.1. Axiomas de Peano:** *Existe um conjunto, denotado por* $\mathbb{N}$, *e uma função* $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *que satisfaz as seguintes axiomas:*

*1) O Conjunto* $\mathbb{N}$ *é não-vazio;*

*2)* $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *é injetora e o complementar de imagem de* $s$ *é um conjunto unitário.*

*3) Para todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$, tal que $A$ contém o complementar da imagem de $s$ e contém a imagem de cada elemento de $A$, tem-se $A = \mathbb{N}$.*

**OBS 1.1.** O conjunto $\mathbb{N}$ é chamado **Conjunto dos Números Naturais** e seus elementos são chamados números naturais.

**OBS 1.2.** O axioma 1 garante que $\mathbb{N}$ é não-vazio.

**OBS 1.3.** A imagem de cada elemento de $\mathbb{N}$ é chamado de sucessor deste elemento.

**OBS 1.4.** O axioma 2 nos diz que existe um elemento em $\mathbb{N}$ que não é sucessor de nenhum outro.

**OBS 1.5.** O último axioma é chamado de Princípio de Indução e geralmente é utilizado para mostrar que se uma proposição é válida para o primeiro elemento dos naturais e também é valida para o sucessor de um natural arbitrário, então a propriedade é valida para os elementos de $\mathbb{N}$.

Vamos utilizar a representação indo-arábica para os números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Note que o sucessor de 1 é 2, sucessor de 2 é 3 e assim por diante. A partir dos sucessores, vamos definir as operações de adição e multiplicação de números naturais.

### 1.2.1 Adição de Números Naturais

**Definição 1.1.** Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ a função sucessor. Definamos a soma de números naturais da seguinte maneira:

$$m + n := s^n(m) = \overbrace{s \circ \ldots \circ s}^{n}(m)$$

.

**OBS 1.6.** Note que, por definição:

$$n + 1 = s(n),$$

$$n + s(m) = s(m + n).$$

**Exemplo 1.1.** Para exemplificar, vamos calcular $2 + 3$:

$$\begin{aligned} (2+1) &= s(2) = 3 \\ (2+2) &= s(2+1) = s(3) = 4 \\ (2+3) &= s(2+2) = s(4) = 5. \end{aligned}$$

**Proposição 1.1.** *Dados $n, m, p \in \mathbb{N}$ temos:*

*a) $m + (n + p) = (m + n) + p$ (Associatividade);*

*b) $m + n = n + m$ (Comutatividade);*

*c) Dados $m, n \in \mathbb{N}$ exatamente uma das seguintes alternativas ocorre: ou $m = n$ ou existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k_1$ ou existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k_2$ (Tricotomia);*

*d) Se $m + n = m + p$, então $n = p$ (Lei do Cancelamento);*

**Demonstração.**

a) Seja $m, n \in \mathbb{N}$ e $A = \{p \in \mathbb{N} : (m + n) + p = m + (n + p)\}$. Mostraremos que $A = \mathbb{N}$, usando o Princípio de indução.

Observe que $1 \in A$, pois $s(n) = n+1$ e $m+s(n) = s(m+n) = (m + n) + 1$ e, portanto, $(m + n) + 1 = m + (n + 1)$. Agora, seja $p \in A$. Para concluir a demonstração usando o princípio de indução, devemos mostrar que $s(p) = p + 1 \in A$. De fato

$$\begin{aligned} & m + (n + s(p)) = m + s(n + p) = \\ = \quad & s(m + (n + p)) \overset{p \in A}{=} s((m + n) + p) = (m + n) + s(p). \end{aligned}$$

Logo $s(p) \in A$ e pelo Princípio de Indução (Axioma 3), $A = \mathbb{N}$.

b) Inicialmente, mostraremos que $m + 1 = 1 + m$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Considere $B = \{m \in \mathbb{N} : m + 1 = 1 + m\}$. Claramente $1 \in B$. Suponha, por hipótese de indução ($HI$), que $m \in B$. Assim,

$$1 + s(m) = s(1 + m) \overset{HI}{=} s(m + 1) = s(m) + 1.$$

Logo $s(m) \in B$ e, pelo princípio de indução, $B = \mathbb{N}$.

Seja $A = \{n \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$. Como $1 \in A$, suponha $n \in A$. Afirmação: $s(n) \in A$. De fato,

$$\begin{aligned} m + s(n) &= s(m + n) \overset{n \in A}{=} s(n + m) = n + s(m) = \\ &= n + (m + 1) \overset{1 \in Y}{=} n + (1 + m) \overset{(a)}{=} (n + 1) + m = s(n) + m. \end{aligned}$$

Assim $Y = \mathbb{N}$.

c) Primeiramente, vamos mostrar que $n \neq n + q$, $n, q \in \mathbb{N}$. Com efeito, pelo axioma 2, $1 \neq 1 + q$. Supondo $n \neq n + q$, ainda pelo axioma 2, obtemos $s(n) \neq s(n + q) = s(n) + q$ ($s$ é injetiva). Logo pelo axioma 3 (Princípio de indução), $n \neq n + q$, $\forall n, q \in \mathbb{N}$.

Voltamos à demonstração de c). Sejam $n \in \mathbb{N}$ e

$A = \{m \in \mathbb{N} : m$ e $n$ Satisfazem a propriedade do item c)$\}$.

Afirmação: $1 \in A$. Com efeito, ou $m = 1$ ou $m \neq 1$ e neste caso existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 + n_0 = n_0 + 1 = s(n_0) = m \quad \text{(Axioma 2)}.$$

Suponha $m \in A$. Assim, ou $m = n$ ou existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + q$ ou existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Afirmação: $s(m) \in A$. De fato, caso $m = n$ temos que (axioma 2) $s(m) = s(n) = n + 1$. Caso $m = n + q$, ainda pelo axioma 2,

$$s(m) = s(n + q) = (n + q) + 1 = n + (q + 1) = n + s(q).$$

No caso em que $n = m + p$ temos que $p = 1$ ou $p \neq 1$. Se $p = 1$, $n = m + 1 = s(m)$. Se $p \neq 1$, pelo axioma 2, $p$ é sucessor de algum $p_0 \in \mathbb{N}$, ou seja, $p = p_0 + 1$. Assim,

$$n = m + (p_0 + 1) = (m + 1) + p_0 = s(m) + p_0.$$

Analisando os casos estudados vemos que ou $s(m) = n$ ou existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $s(m) = n + q$ ou existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = s(m) + p$. Portanto $s(m) \in A$ e, pelo princípio de indução, $A = \mathbb{N}$.

d) Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$ tais que $m + n = m + p$. Suponha $p \neq n$. Pela tricotomia, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = p + q$ ou existe $\widetilde{q}$ tal que $p = n + \widetilde{q}$. Se $n = p + q$, temos que

$$m + n = m + (p + q) = (m + p) + q,$$

o que é uma contradição (ver demonstração de c)). O caso em que $p = n + \widetilde{q}$ é deixado com exercício. ■

## 1.3 Conclusão

Na aula de hoje, apresentamos os Números Naturais através dos axiomas de Peano. Vimos também o princípio de Indução Finita, que é extremamente importante para mostrar que certas propriedades são válidas para os Naturais como pudemos observar na prova das propriedades da adição dos números naturais.

## 1.4 RESUMO

**Axiomas de Peano:** Existe um conjunto, denotado por $\mathbb{N}$, e uma função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que satisfaz as seguintes axiomas:

1) O Conjunto $\mathbb{N}$ é não-vazio;
2) $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é injetora e o complementar de imagem de $s$ é um conjunto unitário.
3) Para todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$, tal que $A$ contém o complementar da imagem de $s$ e contém a imagem de cada elemento de $A$, tem-se $A = \mathbb{N}$.

**Propriedades da Adição** Dados $n, m, p \in \mathbb{N}$ temos:

a) $m + (n + p) = (m + n) + p$ (Associatividade);
b) $m + n = n + m$ (Comutatividade);
c) Dados $m, n \in \mathbb{N}$ exatamente uma das seguintes alternativas ocorre: ou $m = n$ ou existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k_1$ ou existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k_2$ (Tricotomia);
d) Se $m + n = m + p$, então $n = p$ (Lei do Cancelamento);

## 1.5 Proxima aula

Na próxima aula, Na próxima aula definiremos multiplicação de números naturais através da adição e da função sucessor e apresentaremos o Princípio da Boa Ordem.

## 1.6 Atividades

**ATIV. 1.1.** Usando a função sucessor, mostre que $3 + 4 = 7$ e $4 + 2 = 6$

**Sugestão:** Veja exemplo 1.1.

**ATIV. 1.2.** Mostre que se $m + n = m + p$, então $p \neq n + q$, qualquer que seja $q \in \mathbb{N}$.

**Sugestão:** Veja demonstração da Lei do Cancelamento.

**ATIV. 1.3.** Mostre usando o princípio de indução que:

a) $1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $2 + 4 \ldots 2n = n(n + 1)$

c) $1 + 3 + \ldots (2n + 1) = (n + 1)^2$

**ATIV. 1.4.** Mostre que

$$p(n) : n > 1 \Rightarrow n \geq 2$$

é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. (O enunciado nos diz que não existe número natural tal que $1 < n < 2$).

## 1.7 Leitura Complementar

LIMA, Elon L., Análise na Reta Vol. 1, IMPA, Projeto Euclides, 5.ed., Rio de Janeiro, 2008.

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio 1, SBM, 5.ed,Rio de Janeiro, 2008.

DOMINGUES, H. Fundamentos de Aritmética, Atual Editora, São Paulo, 2001.