

# Matemática para o Ensino Fundamental

Éder Matheus de Souza



São Cristóvão/SE  
2010

# Matemática para o Ensino Fundamental

Elaboração de Conteúdo  
Éder Matheus de Souza

---

**Capa**  
Hermeson Alves de Menezes

---

Copyright © 2010, Universidade Federal de Sergipe / CESAD.  
Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização por escrito da UFS.

**FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

|       |  |
|-------|--|
| S729m | Souza, Éder Matheus de.<br>Matemática para o ensino fundamental/ Éder Matheus de Souza -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2010. |
|-------|--|

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

CDU 510

**Presidente da República**

Luiz Inácio Lula da Silva

**Chefe de Gabinete**

Ednalva Freire Caetano

**Ministro da Educação**

Fernando Haddad

**Coordenador Geral da UAB/UFS****Diretor do CESAD**

Antônio Ponciano Bezerra

**Secretário de Educação a Distância**

Carlos Eduardo Bielschowsky

**Vice-coordenador da UAB/UFS****Vice-diretor do CESAD**

Fábio Alves dos Santos

**Reitor**

Josué Modesto dos Passos Subrinho

**Vice-Reitor**

Angelo Roberto Antonioli

---

**Diretoria Pedagógica**

Clotildes Farias (Diretora)

Hérica dos Santos Mota

Iara Macedo Reis

Daniela Souza Santos

Janaina de Oliveira Freitas

**Núcleo de Avaliação**

Guilhermina Ramos (Coordenadora)

Carlos Alberto Vasconcelos

Elizabete Santos

Marialves Silva de Souza

**Diretoria Administrativa e Financeira**

Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)

Sylvia Helena de Almeida Soares

Valter Siqueira Alves

**Núcleo de Serviços Gráficos e Audiovisuais**

Giselda Barros

**Núcleo de Tecnologia da Informação**

João Eduardo Batista de Deus Anselmo

Marcel da Conceição Souza

**Coordenação de Cursos**

Djalma Andrade (Coordenadora)

**Assessoria de Comunicação**

Guilherme Borba Gouy

**Núcleo de Formação Continuada**

Rosemeire Marcedo Costa (Coordenadora)

---

**Coordenadores de Curso**

Denis Menezes (Letras Portugues)

Eduardo Farias (Administração)

Haroldo Dorea (Química)

Hassan Sherafat (Matemática)

Hélio Mario Araújo (Geografia)

Lourival Santana (História)

Marcelo Macedo (Física)

Silmara Pantaleão (Ciências Biológicas)

**Coordenadores de Tutoria**

Edvan dos Santos Sousa (Física)

Geraldo Ferreira Souza Júnior (Matemática)

Janaina Couvo T. M. de Aguiar (Administração)

Priscilla da Silva Góes (História)

Rafael de Jesus Santana (Química)

Ronilse Pereira de Aquino Torres (Geografia)

Trícia C. P. de Sant'ana (Ciências Biológicas)

Vanessa Santos Góes (Letras Portugues)

---

**NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO**

Hermeson Menezes (Coordenador)

Edvar Freire Caetano

Isabela Pinheiro Ewerton

Lucas Barros Oliveira

Neverton Correia da Silva

Nycolas Menezes Melo

---

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"

Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze

CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE

Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474



# Sumário

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Aula 1: Números Naturais</b>                 | <b>13</b> |
| 1.1 Introdução . . . . .                        | 14        |
| 1.2 Axiomas de Peano . . . . .                  | 14        |
| 1.2.1 Adição de Números Naturais . . . . .      | 15        |
| 1.3 Conclusão . . . . .                         | 18        |
| 1.4 RESUMO . . . . .                            | 18        |
| 1.5 Proxima aula . . . . .                      | 19        |
| 1.6 Atividades . . . . .                        | 19        |
| 1.7 Leitura Complementar . . . . .              | 20        |
| <br>  |           |
| <b>Aula 2: Números Naturais: Continuação</b>    | <b>21</b> |
| 2.0.1 Introdução . . . . .                      | 21        |
| 2.1 Multiplicação de Números Naturais . . . . . | 22        |
| 2.1.1 Relação de Ordem . . . . .                | 23        |
| 2.1.2 Boa Ordenação . . . . .                   | 25        |
| 2.2 Conclusão . . . . .                         | 26        |
| 2.3 RESUMO . . . . .                            | 26        |
| 2.4 Proxima aula . . . . .                      | 27        |
| 2.5 Atividades . . . . .                        | 27        |
| 2.6 Leitura Complementar . . . . .              | 28        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Aula 3: Números Inteiros</b>                       | <b>29</b> |
| 3.1 Introdução . . . . .                              | 29        |
| 3.2 A construção dos Números Inteiros . . . . .       | 30        |
| 3.2.1 Adição de Números Inteiros . . . . .            | 31        |
| 3.3 Conclusão . . . . .                               | 34        |
| 3.4 RESUMO . . . . .                                  | 35        |
| 3.5 Proxima aula . . . . .                            | 36        |
| 3.6 Atividades . . . . .                              | 36        |
| 3.7 Leitura Complementar . . . . .                    | 36        |
| <br>  |           |
| <b>Aula 4: Ordem dos Inteiros</b>                     | <b>37</b> |
| 4.1 Introdução . . . . .                              | 37        |
| 4.2 Ordem . . . . .                                   | 37        |
| 4.2.1 Ordem dos Inteiros . . . . .                    | 37        |
| 4.3 Conclusão . . . . .                               | 43        |
| <b>RESUMO</b> . . . . .                               | <b>44</b> |
| <b>PRÓXIMA AULA</b> . . . . .                         | <b>45</b> |
| <b>ATIVIDADES</b> . . . . .                           | <b>45</b> |
| <b>LEITURA COMPLEMENTAR</b> . . . . .                 | <b>46</b> |
| <br>  |           |
| <b>Aula 5: Números Inteiros: Continuação</b>          | <b>47</b> |
| 5.1 Introdução . . . . .                              | 48        |
| 5.2 Propriedades Aritméticas dos Números Inteiros . . | 48        |
| 5.2.1 Divisibilidade . . . . .                        | 48        |
| <b>RESUMO</b> . . . . .                               | <b>52</b> |
| <b>PRÓXIMA AULA</b> . . . . .                         | <b>53</b> |
| <b>ATIVIDADES</b> . . . . .                           | <b>54</b> |
| <b>LEITURA COMPLEMENTAR</b> . . . . .                 | <b>54</b> |
| <br>  |           |
| <b>Aula 6: Algoritmo da Divisão</b>                   | <b>55</b> |
| 6.1 Introdução . . . . .                              | 56        |

|   |  |               |
|---|--|---------------|
| 6.1.1                                   | Divisão Euclidiana . . . . .                       | 56            |
| 6.1.2                                   | Sistemas de Numeração Posicionais . . . . .        | 58            |
| 6.1.3                                   | Critérios de Divisibilidade . . . . .              | 61            |
| 6.1.4                                   | Teorema Fundamental da Aritmética . . . . .        | 62            |
| 6.2                                     | Conclusão . . . . .                                | 63            |
|   | <b>RESUMO . . . . .</b>                            | <b>63</b>     |
|   | <b>PRÓXIMA AULA . . . . .</b>                      | <b>64</b>     |
|   | <b>ATIVIDADES . . . . .</b>                        | <b>64</b>     |
|   | <b>LEITURA COMPLEMENTAR . . . . .</b>              | <b>65</b>     |
| <br><b>Aula 7: Cálculo do MDC e MMC</b> |  | <br><b>67</b> |
| 7.1                                     | Introdução . . . . .                               | 68            |
| 7.1.1                                   | Cálculo do MDC . . . . .                           | 68            |
| 7.1.2                                   | Mínimo múltiplo Comum . . . . .                    | 71            |
| 7.1.3                                   | Divisão em $\mathbb{Z}$ . . . . .                  | 72            |
| 7.2                                     | Conclusão . . . . .                                | 72            |
|   | <b>RESUMO . . . . .</b>                            | <b>73</b>     |
|   | <b>PRÓXIMA AULA . . . . .</b>                      | <b>73</b>     |
|   | <b>ATIVIDADES . . . . .</b>                        | <b>74</b>     |
|   | <b>LEITURA COMPLEMENTAR . . . . .</b>              | <b>74</b>     |
| <br><b>Aula 8: Racionais</b>            |  | <br><b>75</b> |
| 8.1                                     | Introdução . . . . .                               | 76            |
| 8.2                                     | Construção dos Números Racionais . . . . .         | 76            |
| 8.2.1                                   | Adição e Multiplicação em $\mathbb{Q}$ . . . . .   | 77            |
| 8.2.2                                   | Divisão em $\mathbb{Q}$ . . . . .                  | 80            |
| 8.2.3                                   | Somatórios e produtórios em $\mathbb{Q}$ . . . . . | 80            |
| 8.2.4                                   | Potências de Números Racionais . . . . .           | 81            |
| 8.3                                     | Conclusão . . . . .                                | 82            |
|   | <b>RESUMO . . . . .</b>                            | <b>82</b>     |
|   | <b>PRÓXIMA AULA . . . . .</b>                      | <b>84</b>     |

|   |            |
|---|------------|
| <b>ATIVIDADES</b> . . . . .                           | 84         |
| <b>LEITURA COMPLEMENTAR</b> . . . . .                 | 84         |
| <b>Aula 9: Ordem</b>                                  | <b>85</b>  |
| 9.1 Introdução . . . . .                              | 86         |
| 9.2 Relação de Ordem em $\mathbb{Q}$ . . . . .        | 86         |
| 9.3 Conclusão . . . . .                               | 91         |
| <b>RESUMO</b> . . . . .                               | 91         |
| <b>PRÓXIMA AULA</b> . . . . .                         | 92         |
| <b>ATIVIDADES</b> . . . . .                           | 92         |
| <b>LEITURA COMPLEMENTAR</b> . . . . .                 | 93         |
| <b>Aula 10: Racionais</b>                             | <b>95</b>  |
| 10.1 Introdução . . . . .                             | 96         |
| 10.1.1 Valor Absoluto de um Número Racional . . . . . | 96         |
| 10.1.2 A Função Maior Inteiro . . . . .               | 98         |
| 10.1.3 Representação Decimal . . . . .                | 100        |
| 10.2 Conclusão . . . . .                              | 102        |
| <b>RESUMO</b> . . . . .                               | 102        |
| <b>PRÓXIMA AULA</b> . . . . .                         | 102        |
| <b>ATIVIDADES</b> . . . . .                           | 102        |
| <b>LEITURA COMPLEMENTAR</b> . . . . .                 | 103        |
| <b>Aula 11: Reais</b>                                 | <b>105</b> |
| 11.1 Introdução . . . . .                             | 106        |
| 11.1.1 Cortes em $\mathbb{Q}$ . . . . .               | 106        |
| 11.1.2 Construção dos Números Reais . . . . .         | 108        |
| 11.2 Conclusão . . . . .                              | 111        |
| <b>RESUMO</b> . . . . .                               | 111        |
| <b>PRÓXIMA AULA</b> . . . . .                         | 111        |
| <b>ATIVIDADES</b> . . . . .                           | 111        |



|   |            |
|---|------------|
| LEITURA COMPLEMENTAR . . . . .                            | 112        |
| <b>Aula 12: Reais - Continuação</b>                       | <b>113</b> |
| 12.1 Introdução . . . . .                                 | 114        |
| 12.1.1 Continuação . . . . .                              | 114        |
| 12.1.2 Inequações . . . . .                               | 117        |
| 12.1.3 Valor absoluto de um número real . . . . .         | 118        |
| 12.2 Conclusão . . . . .                                  | 118        |
| <b>RESUMO . . . . .</b>                                   | <b>118</b> |
| <b>PRÓXIMA AULA . . . . .</b>                             | <b>119</b> |
| <b>ATIVIDADES . . . . .</b>                               | <b>119</b> |
| <b>LEITURA COMPLEMENTAR . . . . .</b>                     | <b>119</b> |
| <b>Aula 13: Reais- Continuação</b>                        | <b>121</b> |
| 13.1 Introdução . . . . .                                 | 122        |
| 13.1.1 Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$ . . . . . | 122        |
| 13.1.2 Desigualdade de Bernolli . . . . .                 | 123        |
| 13.2 Conclusão . . . . .                                  | 127        |
| <b>RESUMO . . . . .</b>                                   | <b>128</b> |
| <b>PRÓXIMA AULA . . . . .</b>                             | <b>129</b> |
| <b>ATIVIDADES . . . . .</b>                               | <b>129</b> |
| <b>LEITURA COMPLEMENTAR . . . . .</b>                     | <b>129</b> |
| <b>Aula 14: Sistema de Numeração</b>                      | <b>131</b> |
| 14.1 Introdução . . . . .                                 | 131        |
| 14.2 Sistema de numeração egípcio . . . . .               | 131        |
| 14.3 Sistema de numeração Babilônico . . . . .            | 134        |
| 14.4 Conclusão . . . . .                                  | 136        |
| <b>RESUMO . . . . .</b>                                   | <b>136</b> |
| <b>PRÓXIMA AULA . . . . .</b>                             | <b>137</b> |
| <b>ATIVIDADES . . . . .</b>                               | <b>137</b> |

|  |            |
|--|------------|
| <b>LEITURA COMPLEMENTAR . . . . .</b>              | <b>137</b> |
| <b>Aula 15: Sistema de Numeração</b>               | <b>139</b> |
| 15.1 Introdução . . . . .                          | 140        |
| 15.2 Sistema de Numeração Romano . . . . .         | 140        |
| 15.3 O Sistema de Numeração Indo-Arábico . . . . . | 140        |
| 15.4 Conclusão . . . . .                           | 144        |
| <b>RESUMO . . . . .</b>                            | <b>144</b> |
| <b>ATIVIDADES . . . . .</b>                        | <b>144</b> |
| <b>LEITURA COMPLEMENTAR . . . . .</b>              | <b>144</b> |

## Números Naturais

### **META:**

Apresentar os números naturais axiomáticamente através dos axiomas de Peano .

### **OBJETIVOS:**

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir números naturais axiomáticamente.

Saber fazer uso do processo de Indução finita.

### **PRÉ-REQUISITOS**

Conjuntos; Funções; Métodos de demonstrações.

### 1.1 Introdução

Prezado aluno, bem vindo ao curso Matemática para o Ensino Fundamental. Esta é nossa primeira aula e logo de início faço-lhe a seguinte pergunta: O que é um números natural?

Até hoje estudamos nas primeiras séries do ensino fundamental, a utilidade dos Números naturais: contagem. Neste curso estamos interessados em saber qual estrutura matemática está por trás disto. Por que  $2+3=5$  e não  $2+3=4$ ? Isto tem haver com a noção de sucessor que apresentaremos nesta aula.

Nestas primeiras aulas, será apresentado a construção dos Números Naturais, bem como suas propriedades, de maneira axiomática. Isto será feito através dos Axiomas de Peano, que recebe este nome em homenagem ao matemático italiano Giuseppe Peano que, em 1889, os apresentou na obra "Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita".

### 1.2 Axiomas de Peano

Toda teoria dos números naturais pode ser deduzida a partir de 3 axiomas, intitulados **Axiomas de Peano**, que serão apresentados a seguir.

**Axioma 1.1. Axiomas de Peano:** *Existe um conjunto, denotado por  $\mathbb{N}$ , e uma função  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que satisfaz as seguintes axiomas:*

- 1) *O Conjunto  $\mathbb{N}$  é não-vazio;*
- 2)  *$s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é injetora e o complementar de imagem de  $s$  é um conjunto unitário.*

3) Para todo subconjunto  $A \subset \mathbb{N}$ , tal que  $A$  contém o complementar da imagem de  $s$  e contém a imagem de cada elemento de  $A$ , tem-se  $A = \mathbb{N}$ .

**OBS 1.1.** O conjunto  $\mathbb{N}$  é chamado **Conjunto dos Números Naturais** e seus elementos são chamados números naturais.

**OBS 1.2.** O axioma 1 garante que  $\mathbb{N}$  é não-vazio.

**OBS 1.3.** A imagem de cada elemento de  $\mathbb{N}$  é chamado de sucessor deste elemento.

**OBS 1.4.** O axioma 2 nos diz que existe um elemento em  $\mathbb{N}$  que não é sucessor de nenhum outro.

**OBS 1.5.** O último axioma é chamado de Princípio de Indução e geralmente é utilizado para mostrar que se uma proposição é válida para o primeiro elemento dos naturais e também é válida para o sucessor de um natural arbitrário, então a propriedade é válida para os elementos de  $\mathbb{N}$ .

Vamos utilizar a representação indo-arábica para os números naturais:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ . Note que o sucessor de 1 é 2, sucessor de 2 é 3 e assim por diante. A partir dos sucessores, vamos definir as operações de adição e multiplicação de números naturais.

### 1.2.1 Adição de Números Naturais

**Definição 1.1.** Seja  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números naturais e  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  a função sucessor. Definamos a soma de números naturais da seguinte maneira:

$$m + n := s^n(m) = \overbrace{s \circ \dots \circ s}^n(m)$$

**OBS 1.6.** Note que, por definição:

$$n + 1 = s(n),$$

$$n + s(m) = s(m + n).$$

**Exemplo 1.1.** Para exemplificar, vamos calcular  $2 + 3$ :

$$(2 + 1) = s(2) = 3$$

$$(2 + 2) = s(2 + 1) = s(3) = 4$$

$$(2 + 3) = s(2 + 2) = s(4) = 5.$$

**Proposição 1.1.** Dados  $n, m, p \in \mathbb{N}$  temos:

- a)  $m + (n + p) = (m + n) + p$  (Associatividade);
- b)  $m + n = n + m$  (Comutatividade);
- c) Dados  $m, n \in \mathbb{N}$  exatamente uma das seguintes alternativas ocorre: ou  $m = n$  ou existe  $k_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $m = n + k_1$  ou existe  $k_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $n = m + k_2$  (Tricotomia);
- d) Se  $m + n = m + p$ , então  $n = p$  (Lei do Cancelamento);

**Demonstração.**

- a) Seja  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $A = \{p \in \mathbb{N} : (m + n) + p = m + (n + p)\}$ .

Mostraremos que  $A = \mathbb{N}$ , usando o Princípio de indução.

Observe que  $1 \in A$ , pois  $s(n) = n + 1$  e  $m + s(n) = s(m + n) = (m + n) + 1$  e, portanto,  $(m + n) + 1 = m + (n + 1)$ . Agora, seja  $p \in A$ . Para concluir a demonstração usando o princípio de indução, devemos mostrar que  $s(p) = p + 1 \in A$ . De fato

$$\begin{aligned} m + (n + s(p)) &= m + s(n + p) = \\ &= s(m + (n + p)) \stackrel{p \in A}{=} s((m + n) + p) = (m + n) + s(p). \end{aligned}$$

Logo  $s(p) \in A$  e pelo Princípio de Indução (Axioma 3),  $A = \mathbb{N}$ .

- b) Inicialmente, mostraremos que  $m + 1 = 1 + m$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ . Considere  $B = \{m \in \mathbb{N} : m + 1 = 1 + m\}$ . Claramente  $1 \in B$ . Suponha, por hipótese de indução (HI), que  $m \in B$ . Assim,

$$1 + s(m) = s(1 + m) \stackrel{HI}{=} s(m + 1) = s(m) + 1.$$

Logo  $s(m) \in B$  e, pelo princípio de indução,  $B = \mathbb{N}$ .

Seja  $A = \{n \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$ . Como  $1 \in A$ , suponha  $n \in A$ . Afirmação:  $s(n) \in A$ . De fato,

$$\begin{aligned} m + s(n) &= s(m + n) \stackrel{n \in A}{=} s(n + m) = n + s(m) = \\ &= n + (m + 1) \stackrel{1 \in Y}{=} n + (1 + m) \stackrel{(a)}{=} (n + 1) + m = s(n) + m. \end{aligned}$$

Assim  $Y = \mathbb{N}$ .

- c) Primeiramente, vamos mostrar que  $n \neq n + q$ ,  $n, q \in \mathbb{N}$ . Com efeito, pelo axioma 2,  $1 \neq 1 + q$ . Supondo  $n \neq n + q$ , ainda pelo axioma 2, obtemos  $s(n) \neq s(n + q) = s(n) + q$  ( $s$  é injetiva). Logo pelo axioma 3 (Princípio de indução),  $n \neq n + q$ ,  $\forall n, q \in \mathbb{N}$ .

Voltamos à demonstração de c). Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e

$$A = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ e } n \text{ Satisfazem a propriedade do item c)}\}.$$

Afirmação:  $1 \in A$ . Com efeito, ou  $m = 1$  ou  $m \neq 1$  e neste caso existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$1 + n_0 = n_0 + 1 = s(n_0) = m \quad (\text{Axioma 2}).$$

Suponha  $m \in A$ . Assim, ou  $m = n$  ou existe  $q \in \mathbb{N}$  tal que  $m = n + q$  ou existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $n = m + p$ . Afirmação:  $s(m) \in A$ . De fato, caso  $m = n$  temos que (axioma 2)  $s(m) = s(n) = n + 1$ . Caso  $m = n + q$ , ainda pelo axioma 2,

$$s(m) = s(n + q) = (n + q) + 1 = n + (q + 1) = n + s(q).$$

No caso em que  $n = m + p$  temos que  $p = 1$  ou  $p \neq 1$ . Se  $p = 1$ ,  $n = m + 1 = s(m)$ . Se  $p \neq 1$ , pelo axioma 2,  $p$  é sucessor de algum  $p_0 \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $p = p_0 + 1$ . Assim,

$$n = m + (p_0 + 1) = (m + 1) + p_0 = s(m) + p_0.$$

Analisando os casos estudados vemos que ou  $s(m) = n$  ou existe  $q \in \mathbb{N}$  tal que  $s(m) = n + q$  ou existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $n = s(m) + p$ . Portanto  $s(m) \in A$  e, pelo princípio de indução,  $A = \mathbb{N}$ .

- d) Sejam  $m, n, p \in \mathbb{N}$  tais que  $m + n = m + p$ . Suponha  $p \neq n$ . Pela tricotomia, existe  $q \in \mathbb{N}$  tal que  $n = p + q$  ou existe  $\tilde{q}$  tal que  $p = n + \tilde{q}$ . Se  $n = p + q$ , temos que

$$m + n = m + (p + q) = (m + p) + q,$$

o que é uma contradição (ver demonstração de c)). O caso em que  $p = n + \tilde{q}$  é deixado com exercício. ■

### 1.3 Conclusão

Na aula de hoje, apresentamos os Números Naturais através dos axiomas de Peano. Vimos também o princípio de Indução Finita, que é extremamente importante para mostrar que certas propriedades são válidas para os Naturais como pudemos observar na prova das propriedades da adição dos números naturais.

### 1.4 RESUMO

**Axiomas de Peano:** Existe um conjunto, denotado por  $\mathbb{N}$ , e uma função  $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  que satisfaz as seguintes axiomas:



- 1) O Conjunto  $\mathbb{N}$  é não-vazio;
- 2)  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é injetora e o complementar de imagem de  $s$  é um conjunto unitário.
- 3) Para todo subconjunto  $A \subset \mathbb{N}$ , tal que  $A$  contém o complementar da imagem de  $s$  e contém a imagem de cada elemento de  $A$ , tem-se  $A = \mathbb{N}$ .

**Propriedades da Adição** Dados  $n, m, p \in \mathbb{N}$  temos:

- a)  $m + (n + p) = (m + n) + p$  (Associatividade);
- b)  $m + n = n + m$  (Comutatividade);
- c) Dados  $m, n \in \mathbb{N}$  exatamente uma das seguintes alternativas ocorre: ou  $m = n$  ou existe  $k_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $m = n + k_1$  ou existe  $k_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $n = m + k_2$  (Tricotomia);
- d) Se  $m + n = m + p$ , então  $n = p$  (Lei do Cancelamento);

## 1.5 Próxima aula

Na próxima aula, Na próxima aula definiremos multiplicação de números naturais através da adição e da função sucessor e apresentaremos o Princípio da Boa Ordem.

## 1.6 Atividades

**ATIV. 1.1.** Usando a função sucessor, mostre que  $3 + 4 = 7$  e  $4 + 2 = 6$

**Sugestão:** Veja exemplo 1.1.

**ATIV. 1.2.** Mostre que se  $m + n = m + p$ , então  $p \neq n + q$ , qualquer que seja  $q \in \mathbb{N}$ .

**Sugestão:** Veja demonstração da Lei do Cancelamento.

**ATIV. 1.3.** Mostre usando o princípio de indução que:

a)  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b)  $2 + 4 + \dots + 2n = n(n + 1)$

c)  $1 + 3 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$

**ATIV. 1.4.** Mostre que

$$p(n) : n > 1 \Rightarrow n \geq 2$$

é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ . (O enunciado nos diz que não existe número natural tal que  $1 < n < 2$ ).

## 1.7 Leitura Complementar

LIMA, Elon L., Análise na Reta Vol. 1, IMPA, Projeto Euclides, 5.ed., Rio de Janeiro, 2008.

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio 1, SBM, 5.ed., Rio de Janeiro, 2008.

DOMINGUES, H. Fundamentos de Aritmética, Atual Editora, São Paulo, 2001.