AULA 2

Números Naturais: Continuação

META:

Apresentar as propriedades de Multiplicação e o Princípio da Boa Ordem .

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Entender o processo de multiplicação de números naturais.

Saber fazer uso do processo de Segundo Princípio de Indução finita.

PRÉ-REQUISITOS

Axiomas de Peano.

2.0.1 Introdução

Prezado aluno, nesta aula definiremos multiplicação de Números Naturais apresentaremos propriedades que a multiplicação possui. Além disso colocaremos uma relação de ordem no naturais e mostraremos o Princípio da Boa Ordem que nos fala que todo subconjunto dos Naturais possui um maior elemento.O interessante é que este Princípio equivale ao Princípio de Indução Finita.

2.1 Multiplicação de Números Naturais

Antes de definir multiplicação de números naturais, definamos a função "soma com m"

$$\begin{array}{rcccl} f_m & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & p & \longmapsto & f_m(p) = p + m \end{array}$$

Usaremos esta função para definir multiplicação de números naturais.

Definição 2.1. Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Definimos a multiplicação de dois números naturais como:

$$m \cdot 1 = m$$

$$m \cdot (n+1) = (f_m)^n(m) = \overbrace{f_m \circ \ldots \circ f_m}^{n}(m)$$

onde $f_m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é a função "soma com m".

OBS 2.1. Observe que multiplicar um número m por 1 não o altera, e multiplicar m por um número maior que 1, ou seja, por um número da forma $n+1$, é iterar n-vezes a operação de somar m, começando com m.

Exemplo 2.1. Por exemplo $2 \cdot 3 = (f_2)^2(2) = 2+2+2 = s(3)+2 = s(5) = 6$.

OBS 2.2. Da definição de $(f_m)^n$ temos que a $m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$. De fato, se $n = 1$, temos que

$$m \cdot 1 + m = m + m = (f_m)^1(m) = m(1+1).$$

Se $n \neq 1$, temos que ele é sucessor de alguém, digamos n_0, ou seja, $n = s(n_0)$. Assim

$$m \cdot n + m = m \cdot (n_0+1) + m = (f_m)^{s(n_0)}(m) = (f_m)^n(m) = m \cdot (n+1)$$

Proposição 2.2. *Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. Então*

a) $m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p$ *e* $(m+n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$ *(Distributividade);*

b) $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$ *(Associatividade);*

c) $m \cdot n = n \cdot m$ *(Comutatividade);*

e) $m \cdot p = n \cdot p \Longrightarrow m = n$ *(Lei de cancelamento).*

Demonstração. Demonstraremos o item a) deixando o restante como exercício.
Seja $A = \{p \in \mathbb{N} : m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p\}$. Pela observação (2.2) temos que $1 \in A$. Suponha que $p \in A$. Logo

$$\begin{aligned} m \cdot (n + (p+1)) &= m \cdot ((n+p)+1) \\ &= m \cdot (n+p) + m \cdot 1 \overset{p \in A}{=} (m \cdot n + m \cdot p) + m \\ &= m \cdot n + (m \cdot p + m) = m \cdot n + m \cdot (p+1) \end{aligned}$$

Assim $p+1 \in A$ e portanto, pelo princípio de indução, $A = \mathbb{N}$. ■

2.1.1 Relação de Ordem

Nosso objetivo é mostrar que $\mathbb{N}$ é um conjunto ordenado, ou seja que possui uma ordem. A relação de ordem do conjunto dos Números Naturais é definida através da adição.

Definição 2.2. Seja $m, n \in \mathbb{N}$. Dizemos que n é menor que m (ou m é maior que n) e escrevemos $n < m$ (ou $m > n$) se existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n + q = m$

Proposição 2.3. *Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$.*

a) Se $m < n$ *e* $n < p$*, então* $m < p$ *(Transitividade);*

b) Exatamente uma das seguinte alternativas ocorre: $m = n$ *;* $m < n$ *;* $n < m$ *(Tricotomia);*

c) Se $m < n$*, então* $m + p < n + p$ *(Monotonicidade da adição);*

d) Se $m < n$*, então* $m \cdot p < n \cdot p$ *(Monotonicidade da Multiplicação).*

Demonstração.

a) Considere $m < n$ e $n < p$. Por definição, existem $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m + q_1 = n$ e $n + q_2 = p$. Portanto, substituindo n na segunda igualdade temos:

$$p = (m + q_1) + q_2 = m + (q_1 + q_2) = m + x.$$

Como $p = m + x$, com $x = q_1 + q_2 \in \mathbb{N}$ temos que $m < p$.

b) Pela Proposição 1.1 item d), dados $m, n \in \mathbb{N}$ uma das três alternativas ocorre:ou $m = n$ ou existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k_1$ ou existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k_2$. Portanto $m = n$ ou $m < n$ ou $n < m$.

c) Por hipótese $m < n$, ou seja, $n = m + q$ para algum $q \in \mathbb{N}$. Assim

$$n + p = (m + q) + p \overset{\text{Proposição 1.1}}{=} (m + p) + q.$$

Logo $m + p < n + p$

d) Exercício.

■

OBS 2.3. Escrevemos $m \leq n$, para dizer que $m < n$ ou $m = n$. Lê-se: m menor ou igual a n.

2.1.2 Boa Ordenação

Definição 2.3. Seja $A \subset \mathbb{N}$. Dizemos que $p \in A$ é o menor elemento de A, se $p \leq n$, $\forall n \in A$.

Exemplo 2.2. 1 é o menor elemento de $\mathbb{N}$, pois se $n \neq 1$, ele é sucessor de alguém, ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n = n_0 + 1$. Portanto $1 \leq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.4. Dizemos que $p \in A$ é o maior elemento de A, se $p \geq n$, , $\forall n \in A$.

Pergunta: Existe $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ que não possui elemento máximo? e mínimo? Que não possui elemento máximo basta fazer $A = \mathbb{N}$. Já para mínimo, não conseguimos tal conjunto. Para isto, mostraremos o chamado **Princípio da Boa Ordenação**

Teorema 2.1. (Princípio da Boa Ordenação) *Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui menor elemento.*

Demonstração.
Seja $X = \{n \in \mathbb{N} : \{1, 2, 3 \ldots, n\} \subset \mathbb{N} - A\}$. Note que se $1 \in A$, 1 é o menor elemento de A pois 1 é o menor elemento de $\mathbb{N}$ (ver exemplo 2.2). Suponha então que $1 \notin A$. Logo $1 \in X$. Como $A \neq \emptyset$, temos que $X \neq \mathbb{N}$. Assim, pelo princípio de indução, existe $m \in X$ tal que $m + 1 \notin A$ (caso contrário $X = \mathbb{N}$). Ou seja $1, 2, 3 \ldots, m \notin A$. Logo $m + 1 \in A$ e $m + 1 \leq n$, $\forall n \in A$. ∎

Teorema 2.2. (Segundo Princípio de Indução) *Seja $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade:*

1. *dado $n \in \mathbb{N}$, se A contém todos os elementos m tal que $m < n$, então $n \in A$.*

Então $A = \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $X = \mathbb{N} - A$ e suponha $X \neq \emptyset$. Pelo Princípio da Boa Ordenação (Teorema 2.1) existe $p \in X$ tal que $p \leq n, \quad \forall n \in X$. Assim, se $q < p$ então $q \notin X$, ou seja, $q \in A$. Mas, pelas hipóteses sobre o conjunto A, $p \in A$, o que é uma contradição. Logo $X = \emptyset$, ou seja, $A = \mathbb{N}$. ■

Exercício 2.1. Mostre que o Segundo Princípio de Indução implica o Princípio de Indução (Axioma 3 de Peano)

Note que com o resultado do exercício anterior, temos uma equivalência entre Princípio da Boa ordenação, Segundo Princípio de Indução e Princípio de Indução. Portanto poderíamos ter construído os Números Naturais substituindo o Axioma 3 por qualquer um dos outros dois resultados.

2.2 Conclusão

Na aula de hoje, apresentamos a operação de multiplicação e um relação de ordem no conjuntos dos números naturais. Além disso provamos que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui menor elemento.
Agora, caro aluno, sabemos o que é um número natural e como se define as operações neste conjunto.

2.3 RESUMO

Propriedades da multiplicação: Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. Então

a) $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ e $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$ (Distributividade);

b) $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$ (Associatividade);

c) $m \cdot n = n \cdot m$ (Comutatividade);

e) $m \cdot p = n \cdot p \Longrightarrow m = n$ (Lei de cancelamento).

Relação de ordem: Seja $m, n \in \mathbb{N}$. Dizemos que n é menor que m (ou m é maior que n) e escrevemos $n < m$ (ou $m > n$) se existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n + q = m$

Propriedades da relação de ordem: Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$.

a) Se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$ (Transitividade);

b) Exatamente uma das seguinte alternativas ocorre: $m = n$; $m < n$; $n < m$ (Tricotomia);

c) Se $m < n$, então $m + p < n + p$ (Monotonicidade da adição);

d) Se $m < n$, então $m \cdot p < n \cdot p$ (Monotonicidade da Multiplicação).

Boa Ordenação: Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui menor elemento

2.4 Proxima aula

Na próxima aula definiremos números inteiros a partir dos números naturais. Os inteiros serão classes de equivalência, por isso, caro aluno é bom revisar o conceito de relação de equivalência.

2.5 Atividades

ATIV. 2.1. Usando a definição de multiplicação, mostre que $3.4 = 12$ e $4.2 = 8$

Sugestão: Veja exemplo 2.1.

ATIV. 2.2. Se $m < n$, então $m \cdot p < n \cdot p$ (Monotonicidade da Multiplicação)

Sugestão: Veja demonstração da Monotonicidade da Adição.

ATIV. 2.3. Mostre que o produto de números naturais possui as seguintes propriedades:

a) Distributividade: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + n \cdot p$ e $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$

b) Associatividade: $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$

c) Comutatividade: $m \cdot n = n \cdot m$

d) Lei do Cancelamento: $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = p$

2.6 Leitura Complementar

LIMA, Elon L., Análise na Reta Vol. 1, IMPA, Projeto Euclides, 5.ed., Rio de Janeiro, 2008.

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio 1, SBM, 5.ed,Rio de Janeiro, 2008.

DOMINGUES, H. Fundamentos de Aritmética, Atual Editora, São Paulo, 2001.