AULA 3

Números Inteiros

META:

Apresentar os números inteiros axiomaticamente através dos Números Naturais .

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir números inteiros axiomaticamente.

Realizar operações com os números inteiros com classes de equivalência .

PRÉ-REQUISITOS

Números naturais e suas propriedades.

3.1 Introdução

Prezado aluno, nesta aula definiremos o conjunto dos Números Inteiros como classes de equivalência dos números naturais. Ainda não trataremos os inteiros como são tratados no ensino fundamental. Primeiramente daremos sentido a soma e multiplicação dos inteiros como classes de equivalência.

3.2 A construção dos Números Inteiros

No conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ considere a relação $\sim$ definida por

$$\sim := \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 : a+d = b+c\}, \tag{3.1}$$

ou seja

$$(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow a+d = b+c.$$

Proposição 3.4. *A relação $\sim$ definida em (3.1) é um relação de equivalência.*

Demonstração. Temos que mostrar que para a relação $\sim$ vale a reflexividade, simetria e transitividade. Para mostrar a reflexividade, basta notar que para todo $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se verifica $a+b = b+a$, uma vez que a adição de números naturais é comutativa. Logo $(a,b) \sim (b,a)$.
Considere $(a,b) \sim (c,d)$, ou seja $a+d = b+c$. Como a adição é comutativa e a igualdade é uma relação simétrica, temos que $c+b = d+a$, ou seja, $(c,d) \sim (a,b)$. Portanto vale a simetria:

$$(a,b) \sim (c,d) \Longrightarrow (c,d) \sim (a,b)$$

Mostraremos que a relação $\sim$ é transitiva. Considere $(a,b) \sim (c,d)$ e $(c,d) \sim (e,f)$, ou seja,

$$a+d = b+c \;\text{ e }\; c+f = d+e.$$

Assim,

$$(a+d)+f = (b+c)+f \;\text{ e }\; b+(c+f) = b+(d+e).$$

Aplicando associatividade, a comutatividade, lei do corte da adição nos números naturais e a transitividade da igualdade obtemos

$$a+f = b+e,$$

ou seja, $(a,b) \sim (e,f)$. Assim que a relação $\sim$ é transitiva.

Portanto $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ■

Como $\sim$ é de equivalência, determina uma partição neste conjunto em classes de equivalência. Representamos $\overline{(a,b)}$ a classe do elemento (a,b), ou seja,

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + y = b + x\}.$$

Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto de todas as classes $\overline{(a,b)}$, para qualquer $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Então

$$\mathbb{Z} = \frac{(\mathbb{N} \times \mathbb{N})}{\sim} = \{\overline{(a,b)} : (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Definição 3.1. O conjunto $\mathbb{Z}$ é chamado Conjunto dos números inteiros e cada elemento deste conjunto é dito ser um número inteiro.

3.2.1 Adição de Números Inteiros

Definição 3.2. Seja $\mathbb{Z} = \{\overline{(a,b)} : (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$. Chama-se adição de $m = \overline{(a,b)}$ e $n = \overline{(c,d)}$ aplicação

$$\begin{aligned} + \ &: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ (\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}) &\longmapsto \overline{(a+c, b+d)} \end{aligned}$$

Proposição 3.5. *A aplicação de adição $+$ está bem definida.*

Demonstração. Sejam $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$ e $\overline{(x,y)} = \overline{(e,f)}$. Assim

$$a + d = b + c \ \text{ e } \ x + f = y + e.$$

Logo

$$(a + d) + (x + f) = (b + c) + (y + e),$$

e portanto

$$\begin{aligned}(a+x)+(d+f) &= (b+y)+(c+e)\\ \overline{(a+x,b+y)} &= \overline{(c+e,d+f)}\\ \overline{(a,b)}+\overline{(x,y)} &= \overline{(c,d)}+\overline{(e,f)}.\end{aligned}$$

Portanto a adição independe dos representantes, ou seja, está bem definida. ■

Proposição 3.6. *A adição de números inteiros possui as seguintes propriedades:*

a) $\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)} = \overline{(c,d)}+\overline{(a,b)}$, $\forall\ \overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$*(Comutatividade);*

b) $\left(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d,)}\right)+\overline{(e,f)} = \overline{(a,b)}+\left(\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}\right)$, $\forall\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}, \overline{(e,f)} \in \mathbb{Z}$*(Associatividade);*

c) Existe elemento neutro da adição, denominado **zero***;*

d) Existe inverso aditivo.

Demonstração.

a) Por definição, $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c,b+d)}$. Seja $(x,y) \in \overline{(a+c,b+d)}$. Assim $(a+c)+y = (b+d)+x$ e pela comutatividade da adição de números naturais chegamos, a $(c+a)+y = (d+b)+x$. Daí, concluímos que $(x,y) \in \overline{(c+a,d+b)}$. Como a classe independe dos representantes, temos que

$$\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)} = \overline{(a+c,b+d)} = \overline{(c+a,d+b)} = \overline{(c,d)}+\overline{(a,b)}.$$

b) Exercício.

c) Inicialmete note que $\overline{(x+a,x+b)} = \overline{(a,b)}$, $\forall \overline{(x,x)}, \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, pois $b+(x+a) = a+(x+b)$ e, por definição, $(a,b) \in \overline{(x+a,x+b)}$. Por outro lado,

$$\overline{(x,x)} + \overline{(a,b)} = \overline{(x+a,x+b)} = \overline{(a,b)}.$$

Portanto $\overline{(x,x)}$ é elemento neutro da adição.

d) Note que

$$\overline{(a,b)} + \overline{(b,a)} = \overline{(a+b,b+a)} = \overline{(a+b,a+b)} = \overline{(x,x)}.$$

Assim $\overline{(b,a)}$ é inverso aditivo de $\overline{(a,b)}$.

Definição 3.3. Seja $\mathbb{Z} = \{\overline{(a,b)} : (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$. Chama-se multiplicação de $m = \overline{(a,b)}$ e $n = \overline{(x,y)}$ aplicação

$$\begin{array}{rcc} \cdot\ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (\overline{(a,b)}, \overline{(x,y)}) & \longmapsto & \overline{(ax+by, ay+bx)} \end{array}$$

Proposição 3.7. *A operação de multiplicação está bem definida.*

Demonstração. Considere $\overline{(a,b)} = \overline{(a_1,b_1)}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c_1,d_1)}$. Então $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd, ad+bc)}$ e $\overline{(a_1,b_1)} \cdot \overline{(c_1,d_1)} = \overline{(a_1c_1+b_1d_1, a_1d_1+b_1c_1)}$. Mas como $(a,b) \sim (a_1,b_1)$ e $(c,d) \sim (c_1,d_1)$, então $a+b_1 = b+a_1$ e $c+d_1 = d+c_1$. Assim obtemos: $c(a+b_1) = c(b+a_1)$, $a_1(c+d_1) = a_1(d+c_1)$, $d(b+a_1) = d(a+b_1)$ e $b_1(d+c_1) = b_1(c+d_1)$. Desenvolvendo esses produtos, depois somando membro a membro as igualdades obtidas, efetuando os possíveis cortes, obtemos

$$(ac+bd) + (a_1d_1+b_1c_1) = (bc+ad) + (a_1c_1+b_1d_1),$$

ou seja,

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd, ad+bc)} = \overline{(a_1c_1+b_1d_1, a_1d_1+b_1c_1)} = \overline{(a_1,b_1)} \cdot \overline{(c_1,d_1)}.$$

■

Proposição 3.8. *Dados* $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}, \overline{(e,f)} \in \mathbb{Z}$ *temos que:*

a) $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(s,d)} \cdot \overline{(a,b)}$*(Comutatividade);*

b) $(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)}) \cdot \overline{(e,f)} = \overline{(a,b)} \cdot (\overline{(c,d)} \cdot \overline{(e,f)})$*(Associatividade);*

c) Existe elemento neutro da multiplicação, chamado **um**.

Demonstração.

a) Observe que pela definição de multiplicação e pela comutatividade da adição dos números naturais temos:

$$\begin{aligned} \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} &= \overline{(ac+bd, ad+bc)} = \\ &= \overline{(ca+db, da+cb)} = \\ &= \overline{(c,d)} \cdot \overline{(a,b)}. \end{aligned}$$

b) Exercício

c) Considere o número inteiro $\overline{(x+1,x)}$. Note que

$$\overline{(x+1,x)} \cdot \overline{(a,b)} = \overline{((x+1)a+xb, (x+1)b+ax)}.$$

Além disso, $a+(x+1)b+ax = b+(x+1)a+xb$, ou seja, $(a,b) \in \overline{((x+1)a+xb, (x+1)b+ax)}$ Logo $\overline{(x+1,x)} \cdot \overline{(a,b)} = \overline{(a,b)}$.

3.3 Conclusão

Na aula de hoje, apresentamos os Números Inteiros como classes de equivalência dos Naturais. É importante salientar que faz sentido a definição de classe de equivalência como apresentada, pois daremos sentido, a posteriori, a expressão do tipo 5-3 e que ela representa o mesmo inteiro 101-99, ou seja $5+99 = 101+3$ o que significa $\overline{(5,3)} = \overline{(101,99)}$.

3.4 RESUMO

Relação de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\sim := \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 : a + d = b + c\},$$

ou seja,

$$(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow a + d = b + c.$$

Definição do conjunto dos Números Inteiros:

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + y = b + x\}.$$

$$\mathbb{Z} = \frac{(\mathbb{N} \times \mathbb{N})}{\sim} = \{\overline{(a,b)} : (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Propriedades dos Números Inteiros: Dados $n, m, p \in \mathbb{Z}$ temos:

a) $m + (n + p) = (m + n) + p$ (Associatividade);

b) $m + n = n + m$ (Comutatividade);

c) Existe $\widetilde{m} \in \mathbb{Z}$ tal que $n + \widetilde{m} = n$, $\forall\ n \ \in \mathbb{Z}$ (Existência de Elemento neutro da adição)

d) Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n + k = \widetilde{m}$, $\forall\ n \ \in \mathbb{Z}$(Existência de Elemento inverso da adição)

e) $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ e $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$ (Distributividade);

f) $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$ (Associatividade);

g) $m \cdot n = n \cdot m$ (Comutatividade);

h) Existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot q = n$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$

3.5 Proxima aula

Na próxima aula, apresentaremos uma relação de ordem nos números inteiros e "enxergaremos"os números naturais como subconjuntos dos números inteiros. Além disso apresentaremos os princípios de indução e do menor elemento para os inteiros.

3.6 Atividades

ATIV. 3.1. Mostre, usando a caracterização dos inteiros como classes de equivalência, que a adição dos números inteiros é associativa. **Sugestão:** Veja demonstração da comutatividade da adição dos números inteiros.

ATIV. 3.2. Mostre, usando a caracterização dos inteiros como classes de equivalência, que a adição dos números inteiros é associativa. **Sugestão:** Veja demonstração da comutatividade da multiplicação dos números inteiros.

3.7 Leitura Complementar

LIMA, Elon L., Análise na Reta Vol. 1, IMPA, Projeto Euclides, 5.ed., Rio de Janeiro, 2008.

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio 1, SBM, 5.ed,Rio de Janeiro, 2008.

DOMINGUES, H. Fundamentos de Aritmética, Atual Editora, São Paulo, 2001.

Bahiano, C. Notas de aula. UFBA