AULA 4

Ordem dos Inteiros

META:

Apresentar ordem nos números inteiros e os Princípio de indução e do Menor elemento .

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Usar o processo de indução finita dos Inteiros.

Justificar a relação de ordem dos números inteiros.

PRÉ-REQUISITOS

Construção axiomática dos números inteiros.

4.1 Introdução

Prezado aluno, assim como nos números naturais, podemos definir uma ordem e aplicar o princípio de indução para os números inteiros. É o que faremos a seguir.

4.2 Ordem

4.2.1 Ordem dos Inteiros

Teste seção apresentaremos uma relação de ordem nos números inteiros.

Teorema 4.1. *A relação* $O_{\mathbb{Z}} = \{\overline{(x,y)}, \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + b \leq y + a\}$ *é de ordem total em* $\mathbb{Z}$.

Demonstração. Inicialmente afirmamos que a condição $\overline{(x,y)} \leq \overline{(a,b)}$ independe dos representantes. De fato, sejam $\overline{(x,y)} = \overline{(u,w)}$ e $\overline{(a,b)} = \overline{(e,d)}$. Então $x + w = y + u$ e $a + d = b + c$. Desta forma, pela comutatividade e associatividade da adição de números naturais, se $x + b \leq y + a$, temos

$$\begin{aligned}
(u+b)+(x+y) &= (x+b)+(y+u) \\
&\leq (y+a)+(y+u) = (y+a)+(x+w) \\
&= (w+a)+(x+y).S
\end{aligned}$$

Pela Lei do Cancelamento, $u + b \leq w + a$, o que significa $\overline{(u,w)} \leq \overline{(a,b)}$.
Como $x + y = y + x$, temos que $\overline{(x,y)} \leq \overline{(x,y)}$. Ou seja, $O_{\mathbb{Z}}$ é reflexiva.
Mostraremos agora a anti-simetria . Suponha $\overline{(x,y)} \leq \overline{(a,b)(a,b)} \leq \overline{(x,y)}$. Assim

$$x + b \leq y + a \quad \text{e} \quad a + y \leq b + x,$$

donde concluímos que $x + b = y + a$, ou seja, $\overline{(a,b)} = \overline{(x,y)}$.
Em $O_{\mathbb{Z}}$ vale a transitividade, pois se $\overline{(x,y)} \leq \overline{(a,b)}$ e $\overline{(x,y)(x,y)}$ temos que

$$x + b \leq y + a \quad \text{e} \quad a + d \leq b + c.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
(x+d)+(b+a) &= (x+b)+(d+a) \\
&\leq (y+a)+(b+c) \\
&= (y+c)+(b+a),
\end{aligned}$$

donde segue que $x + d \leq y + c$, ou seja, $\overline{(x,y)} \leq \overline{(c,d)}$.

Para concluir a demonstração do Teorema, falta mostrar que vale a tricotomia. Sejam $\overline{(x,y)}, \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$. Como a tricotomia é válida para os naturais temos que

$$x+b \leq y+a \quad \text{ou} \quad y+a \leq x+b.$$

Assim,

$$\overline{(x,y)} \leq \overline{(a,b)} \quad \text{ou} \quad \overline{(a,b)} \leq \overline{(x,y)}.$$

■

Proposição 4.9. *Seja $w \in \overline{(x,y)} \in \mathbb{Z}$. Representamos o símbolo "0 "a classe do elemento neutro para a adição em $\mathbb{Z}$. Considerando a ordem $O_{\mathbb{Z}}$, temos:*

a) $0 \leq w$ se, e somente se, $x \leq y$.

b) $w \leq 0$ se, e somente se, $y \leq x$

Demonstração.

a) Como o elemento neutro da adição é representado pela classe $\overline{(z,z)}$, $z \in \mathbb{N}$. Assim

$$0 \leq w \Longleftrightarrow \overline{(z,z)} \leq \overline{(x,y)} \Longleftrightarrow z+y \leq z+x \Longleftrightarrow y \leq x.$$

b) Exercício

■

Definição 4.1. Considere o conjunto dos números inteiros munido da ordem total $O_{\mathbb{Z}}$. Os conjuntos descritos abaixo são, respectivamente, chamados de conjuntos dos inteiros positivos e conjunto dos números negativos:

$$\mathbb{Z}_+ = \{w \in \mathbb{Z} : 0 \leq w \ \text{ e } \ w \neq 0\}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{w \in \mathbb{Z} : w \leq 0 \ \text{ e } \ w \neq 0\}.$$

Corolário 4.1. *A ordem $O_{\mathbb{Z}}$ particiona o conjunto $\mathbb{Z}$ em 3 conjuntos mutuamente disjuntos.*

Demonstração.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_-$$

■

O Teorema a seguir caracteriza os números inteiros positivos, negativos e nos permite pensar os números naturais como subconjunto dos números inteiros.

Teorema 4.2. *Considere o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros munidos, respectivamente, com suas ordens (menor ou igual). Então:*

$$\mathbb{Z}_+ = \{\overline{(x,1)} : x \in \mathbb{N} \quad e \quad 1 < x\}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{\overline{(1,x)} : x \in \mathbb{N} \quad e \quad 1 < x\}$$

Demonstração. Note que se $x \in \mathbb{N}$ e $1 < x$ então $z + 1 < z + x$, $\forall z \in \mathbb{N}$. Por outro lado assim $\overline{(z,z)} < \overline{(x,1)}$ e portanto $\overline{(x,1)} \in \mathbb{Z}_+$. Logo $\{\overline{(x,1)} : x \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ 1 < x\} \subset \mathbb{Z}_+$. Seja $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}_+$. Pela definição de $\mathbb{Z}_+$, $b < a$. Logo existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a = b + p$. Portanto $a + 1 = (b + p) + 1 \Rightarrow a + 1 = b + (p + 1)$ e assim $(p + 1, 1) \in \overline{(a,b)}$, ou seja, $\overline{(a,b)} = \overline{(p + 1, 1)}$. Logo $\mathbb{Z}_+ \subset \{\overline{(x,1)} : x \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ 1 < x\}$, donde $\mathbb{Z}_+ = \{\overline{(x,1)} : x \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ 1 < x\}$. ■

Corolário 4.2. *Se $\overline{(a,b)} = \overline{(x,1)}$ então o oposto aditivo de $\overline{(a,b)}$ representado por $-\overline{(a,b)}$, é $\overline{(1,x)} = \overline{(b,a)}$.*

Corolário 4.3. *O conjunto $\mathbb{Z}_+ = \{\overline{(x,1)} : x \in \mathbb{N} \quad e \quad 1 < x\}$ satisfaz os axiomas de Peano.*

Demonstração. Basta mostrar que existe uma bijeção que preserva soma entre $\mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$ e o conjunto $\mathbb{Z}_+$. Seja

$$\begin{aligned} \varphi : \ \mathbb{N} &\to \mathbb{Z}_+ \\ n &\mapsto \overline{(n+1, 1)} \end{aligned}$$

■

Note que $\varphi(n) + \varphi(m) = \overline{(n+1,1)} + \overline{(m+1,1)} = \overline{(m+n+2,2)}$. $(n+m+1,1) \in \overline{(m+n+2,2)}$. Note que $(m+n+1)+2 = (m+n+2)+1$, logo $(n+m+1,1) \in \overline{(m+n+2,2)}$. $\varphi(n)+\varphi(m) = \overline{(m+n+1,1)} = \varphi(m+n)$. Além disso, seja $\varphi(n) = \varphi(m)$. Assim $\overline{(n+1,1)} = \overline{(m+1,1)} \Rightarrow (n+1)+1 = 1+(m+1)$. Logo $m = n$. Note que $\overline{(x,1)} \in \mathbb{Z}_+$, 1<x, ou seja, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x = p+1$. Logo, $\overline{(x,1)} = \overline{(p+1,1)}$. Logo, $\varphi(p) = \overline{(x,1)}$. Logo φ é uma bijeção. $\mathbb{N} = \int_+$.

OBS 4.1. Pela função definida no corolário anterior, se $m\mathbb{Z}$, ou $m = \overline{(n+1,1)}$ ou $m = \overline{(1,n+1)}$ ou $m = \overline{(1,1)}$. Assim se fizermos $m = \overline{(1,1)} = 0$

a) $\overline{(1+1,1)} = \overline{(2,1)} = +1$, $\overline{(2+1,1)} = \overline{(3,1)} = +2$; e assim sucessivamente.

b) $\overline{(1,1+1)} = -\overline{(2,1)} = -1$, $\overline{(1,2+1)} = -\overline{(3,1)} = -2$.

Portanto torna-se válido escrever

$$\mathbb{Z} = \{.., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Por abuso e notação, se $x \in \overline{(a,b)}$, então $x \in \overline{((a+1)+1, (b+1)+1)} = \overline{(a+1,1)} + \overline{(1,b+1)} = \overline{(a+1,1)} - \overline{(b+1,1)} = a - b$.

Definição 4.2. Um conjunto $\emptyset \neq L \subset \mathbb{Z}$ é limitado inferiormente se existe $w \in \mathbb{Z}$ tal que $w \leq l, \forall l \in L$.

Princípio Do Menor Inteiro 4.1. *Todo subconjunto não vazio* $L \subset \mathbb{Z}$ *possui um menor elemento.*

Demonstração. Seja L um subconjunto não vazio limitado inferiormente e $w \in \mathbb{Z}$ tal que $w \leq l, \forall l \in L$. Se $w \in L$, w é o menor elemento de L. Suponha $w \notin L$ e considere o conjunto $S = \{l + (-w);\ l \in L\}$. Note que $S \subset \mathbb{Z}_+$. Como $\mathbb{Z}_+$ possui a propriedade da boa ordenação, S possui um menor elemento. Seja $\widetilde{l} - w$ o menor elemento de S $(\widetilde{l})$. Assim, $\widetilde{l} - w \leq l - w \Rightarrow \widetilde{l} \leq l$, para todo $l \in L$. Portanto $\widetilde{l}$ é o menor elemento de L. ■

Indução sobre os Inteiros 4.1. *Fixado* $w \in \mathbb{Z}$. *seja* $L = \{\lambda \in \mathbb{Z};\ w \leq \lambda\}$. *Seja* $\underline{P}$ *uma proposição tal que:*

1) $\underline{P}$ é válida para w.

2) Se $\underline{P}$ é válida para $\lambda \in L$, $\underline{P}$ é válida para $\lambda + 1$.

Então $\underline{P}$ é válida para todo $\lambda \in L$.

Demonstração. Seja S o conjunto dos elementos de L tais que a proposição $\underline{P}$ não é válida, ou seja, $S = \{\gamma \in L :\ \underline{P}(\gamma) \text{ é falsa}\}$. Suponha $S \neq \emptyset$. Como $S \neq \emptyset$ e S é limitado inferiormente, S possui um menor elemento $\eta \in S$. Mas w é o menor elemento de L, ou seja, $w \leq \eta$.

Afirmação: $w \neq \eta$. De fato, por hipótese $\underline{P}(w)$ é verdadeira, logo $w \notin S$.

Assim $w \leq \eta - 1 \leq \eta$. Como η é o menor elemento de S, a proposição $\underline{P}$ vale para $\eta - 1$. Assim $\underline{P}$ é válida para $(\eta - 1) + 1 = \eta$ $(\rightarrow\leftarrow)$. Portanto, $S \neq \emptyset$.

Antes de apresentar propriedades aritméticas dos inteiros apresentaremos algumas propriedades da multiplicação.

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Então:

a) $a(b-c) = ab - ac$

b) $a.0 = 0$

c) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

d) $(-a)(-b) = ab$

e) $ab = ac \Rightarrow bc \; (a \neq 0)$

Demonstração.

a)

$$\begin{aligned} a(b-c)+ac &= a((b-c)+c) \\ &= a(b+(-c+c)) \\ &= a(b+0) = ab \end{aligned}$$

Logo $a(b-c) = ab - ac$.

b) $a.0 = a.(0-0) = a.0 - a.0 = 0$

c) $a.(-b) = a.(0-b) = a.0-(a.b) = -(ab)$, $(-a).b = (0-a).b = 0.b - (ab) = -(ab)$

d) $(-a).(-b) = -(-a).b = ab$

e) $ab = ac \Rightarrow a.b - a.c = 0 \Rightarrow a.(b-c) = 0 \Rightarrow b-c = 0 \Rightarrow b = c$

■

4.3 Conclusão

Nesta aula, aprendemos a comparar dois números inteiros bem como usar os princípios de indução e do menor elemento. Isto é muito importante, pois vemos que todo conjunto limitado inferiormente dos inteiros se comporta de maneira similar aos números naturais. Identificamos também os números inteiros como o que aprendemos no ensino fundamental.

RESUMO

A relação $O_{\mathbb{Z}} = \{\overline{(x,y)}, \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + b \leq y + a\}$ é de ordem total em $\mathbb{Z}$.

A ordem $O_{\mathbb{Z}}$ particiona o conjunto $\mathbb{Z}$ em 3 conjuntos mutuamente disjuntos:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_-$$

a) $\overline{(1+1,1)} = \overline{(2,1)} = +1$, $\overline{(2+1,1)} = \overline{(3,1)} = +2$; e assim sucessivamente.

b) $\overline{(1,1+1)} = -\overline{(2,1)} = -1$, $\overline{(1,2+1)} = -\overline{(3,1)} = -2$.

Portanto torna-se válido escrever

$$\mathbb{Z} = \{.., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Por abuso de notação, se $x \in \overline{(a,b)}$, então $x \in \overline{((a+1)+1, (b+1)+1)} = \overline{(a+1,1)} + \overline{(1,b+1)} = \overline{(a+1,1)} - \overline{(b+1,1)} = a - b$.

Princípio Do Menor Inteiro 4.2. *Todo subconjunto não vazio $L \subset \mathbb{Z}$ possui um menor elemento.*

Indução sobre os Inteiros 4.2. *Fixado $w \in \mathbb{Z}$. seja $L = \{\lambda \in \mathbb{Z};\ w \leq \lambda\}$. Seja $\underline{P}$ uma proposição tal que:*

1) $\underline{P}$ é válida para w.

2) Se $\underline{P}$ é válida para $\lambda \in L$, $\underline{P}$ é válida para $\lambda + 1$.

Então $\underline{P}$ é válida para todo $\lambda \in L$.

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula, apresentaremos a noção de divisibilidade e o conceito de números primos. Fica a pergunta: Existem quantos números primos? Aguardem!

ATIVIDADES

..

ATIV. 4.1. a) O que significa S ser limitado superiormente?

b) Mostre que se S é limitado superiormente, então S possui um maior elemento.

Mostre, usando a caracterização dos inteiros como classes de equivalência, que as seguintes afirmações são verdadeiras:

a) Se $x \leq y$, então $x + z \leq y + z$ para todo $z \in \mathbb{Z}$

b) Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Se $x \leq y$ e $0 \leq z$, então $xz \leq yz$

c) Se $x \cdot y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

ATIV. 4.2. Mostre que $\sqrt{p}$ é irracional para cada p primo.

Mostre que dados $x, y \in Z$ então:

a) Se $x < 0$ e $y < 0$, então $xy > 0$

b) Se $x < 0$ e $y > 0$, então $xy < 0$

c) Se $x \cdot y = 1$, então $x = y = 1$ ou $x = y = -1$.

ATIV. 4.3. Mostre por indução que dados $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots ab^{n-2}b^{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Análise na Reta Vol. 1, IMPA, Projeto Euclides, 5.ed., Rio de Janeiro, 2008.

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio 1, SBM, 5.ed,Rio de Janeiro, 2008.

DOMINGUES, H. Fundamentos de Aritmética, Atual Editora, São Paulo, 2001.

Bahiano, C. Notas de aula. UFBA