AULA 7

Cálculo do MDC e MMC

META:

Apresentar o algoritmo do Cálculo do MMC e do MDC entre dois números

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Executar de maneira correta os algoritmos do Cálculo do MMC e do MDC.

PRÉ-REQUISITOS

Algoritmo da Divisão.

7.1 Introdução

Aprendemos na 5ª série do ensino fundamental como calcular MDC e MMC. Faremos isto de forma rigorosa nesta aula

7.1.1 Cálculo do MDC

Teorema 7.1. *Sejam $x, y, q, r \in \mathbb{Z}$, com x, y simultaneamente não nulos e $x = yq + r$. Então $mdc(x, y) = mdc(y, r)$.*

Demonstração. Sejam $d = mdc(x, y)$ e $d' = mdc(y, r)$. Como $d = mdc(x, y)$, $d|x$ e $d|y$ ($d > 0$). Assim $d|yq$ e, portanto $d|x - yq$, ou seja $d|r$. Logo $d|d'$ e assim $d \leq d'$. Agora, como $d'|y$ e $d'|r$, temos que $d'|x$, donde concluímos que $d' \leq d$. Portanto, $d = d'$. ■

Corolário 7.1. *Dados 2 números x, y não simultaneamente nulos com $y \neq 0$, tem-se que $mdc(x, y) = mdc(y, r)$, onde r é o resto encontrado no algoritmo da divisão de x por y.*

Demonstração. Como $y \neq 0$, pelo algoritmo da divisão $x = yq + r$, com $0 \geq < |y|$. Pelo teorema anterior, $mdc(x, y) = mdc(y, r)$. ■

Método das Divisões Sucessivas 7.1. *Seja x, y inteiros não simultaneamente nulos, com $y \neq 0$. Defina $a_0 = x$ e $a_1 = y$. Para $i \geq 2$ defina a_i como sendo o resto da divisão de a_{i-2} por a_{i-1}. Se a_n é o último resto não nulo da divisão, então $mdc(x, y) = a_n$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor $x, y > 0$. Considere o conjunto $A = \{a \in \mathbb{Z};\ 0 \leq a < y\}$. A finitude de A e o algoritmo da divisão garantem a existência de um n tal que

$$\begin{array}{ll} a_0 = a_1 q_1 + a_2, & 0 \leq a_2 < a_1 \\ a_1 = a_2 q_2 + a_3, & 0 \leq a_3 < a_2 < a_1 \\ \vdots & \\ a_{n-2} = a_{n-1} q_{n-1} + a_n, & 0 \leq a_n < a_{n-1} < a_{n-2} < ... < a_2 < a_1 \\ a_{n-1} = a_n q_n, & 0 < a_n \end{array}$$

Pelo corolário anterior, $mdc(x,y) = mdc(a_0, a_1) = mdc(a_1, a_2) = ... = mdc(a_{n-1}, a_n) = mdc(a_n, 0) = a_n$

■

OBS 7.1. O método descrito acima é ensinado na quinta série da seguinte forma:

- Desenha-se 3 linhas horizontais (paralelas) e duas verticais.
- Na segunda linha horizontal, a partir da segunda casa ficam os restos da divisão, onde nas duas primeiras ficam os números tais que queremos encontrar o MDC entre eles.

	q_1	q_2	$\cdots$		q_n
a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
a_2	a_3		$\cdots$	0	

Exemplo 7.1. Encontre o $mdc(53, 12)$.

$$\begin{cases} 53 = 12 \cdot 4 + 5 \\ 12 = 5 \cdot 2 + 2 \\ 5 = 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 = 2 \cdot 1 \end{cases}$$

	4	2	2	2
53	12	5	2	1
5	2	1	0	

Proposição 7.12. *Se $d = mdc(a,b)$, então $mdc(sa, sb) = sd$, onde $s \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
&sa = (sb)q + (sr_1), && 0 \leq sr_1 < |sb| \\
&sb = (sr_1)q_1 + (sr_2), && 0 \leq sr_2 < sr_1 \\
&\vdots \\
&(sr_{n-2}) = (sr_{n-1})q_{n-1} + (sr_n), && 0 \leq sr_n < ... < sr_2 < sr_1 \\
&(sr_{n-1}) = (sr_n)q_n,
\end{aligned}$$

Pelo resultado anterior $r_n = d$, e $mdc(sa, sb) = sd$. ■

Corolário 7.2. *Se a, b são divisores de c, $c \neq 0$, e $mdc(a,b) = 1$, então $ab|c$*

Demonstração. $mdc(a,b) = 1 \Rightarrow mdc(ca, cb) = c$. Mas $ab|ac$, pois $b|c$ e por motivo análogo $ab|bc$. Logo, $ab|c$. ■

Exercício 7.1. Encontre $mdc(389, 167)$ e o expresse na forma $389m + 167n$. Os números m, n são únicos?

Demonstração. $389 = 167.2 + 55$, $167 = 55.3 + 2$, $55 = 27.2 + 1$, $2 = 2.1$. Segue-se que $mdc(389, 167) = 1$. Agora podemos escrever: $1 = 55 - 2.27 = 55 - (167 - 3.55).27 = 55 - 27.167 + 81.55 = 82.55 - 27.167 = 82(389 - 2.167) - 27.167 = 82.389 - 164.167 - 27.167 = 82.389 - 191.167$ (falta responder unicidade) ■

Exercício 7.2. Escreva o número 100 como a soma de um múltiplo de 7 com um múltiplo de 9.

Demonstração. $9 = 7.1 + 2$, $7 = 2.3 + 1$, $2 = 2.1$. Desejamos encontrar x, y tais que $1 = 7x + 9y$. $1 = 7 - 2.3 = 7 - (9 - 7).3 = 7 - 9.3 + 7.3 = 7.4 - 9.3 \Rightarrow 7(400) + 9(-300)$. ∎

OBS 7.2. Seja $x = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$ e $y = p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2}...p_s^{\beta_s}$. onde os p_i's são primos e $s > r$. Assim $mdc(x, y) = p_1^{\gamma_1}.p_2^{\gamma_2}...p_r^{\gamma_r}$ onde $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$

7.1.2 Mínimo múltiplo Comum

Definição 7.1. Dados $x, y \in \mathbb{Z}$ dizemos que $m \in \mathbb{Z}$ é mínimo múltiplo comum de x e y se satisfaz:

(i) $x|m$ e $y|m$

(ii) Para todo $u \in \mathbb{Z}$, se $x|u$ e $y|u$, então $m|u$

Notação: Denotaremos o mínimo múltiplo comum de x e y por $mmc(x, y)$.

OBS 7.3. Se $x = 0$ ou $y = 0$, $mmc(x, y) = 0$.

Proposição 7.13. *O MMC de dois números inteiros é único.*

Demonstração. Suponhamos que m_1 e m_2 sejam dois mínimos múltiplos comuns de $x, y \in \mathbb{Z}$ com $xy \neq 0$. Como $m_1 = mmc(x, y)$ temos que $x|m_1$ e $y|m_1$. mas $x|m_1$ e $x|m_2$. Assim $m_1|m_2$ e portanto $m_1 \leq m_2$. De maneira análoga, $m_2 \leq m_1$. Logo $m_1 = m_2$. ∎

Teorema 7.2. *Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{Z}$ não simultaneamente nulos tem-se*

$$mmc(x, y).mdc(x, y) = |xy|$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha $x > 0$ e $y > 0$ (se $x = 0$ ou $y = 0$, $mmc(x, y) = 0$ e $xy = 0$; $mmc(x, y) = mmc(|x|, |y|)$ e $mdc(x, y) = mdc(|x|, |y|)$). Sejam $d = mdc(x, y)$ e $m = mmc(x, y)$. Note que $d|xy$, isto é, $xy = dz$ para algum $z \in \mathbb{Z}$.
Afirmação: $z = m$
De fato

(1) $x = ad$ e $y = bd$. Assim $xy = abd^2 = zd \Rightarrow abd = z$

(2) $z = b(ad) = bx$, ou seja $y|z$. Logo $m|z$. Assim $m \leq z$

(3) $d|x$ e $x|m \Rightarrow m = cd$, pois $x = ad$ e $m = \widetilde{a}x$.

(4) $x = ad$ e $y = bd \Rightarrow ad|cd$ e $bd|cd$ com $mcd(a, b) = 1 \Rightarrow a|c$ e $b|c \Rightarrow abd|cd \rightarrow z|m \Rightarrow z \leq m$.

Logo $z = m$. ■

7.1.3 Divisão em $\mathbb{Z}$

Dados , $b \in \mathbb{Z}$, se $a = cb$ podemos denotar $c = \frac{a}{b}$

OBS 7.4. $mmc(x, y) = \frac{|xy|}{mdc(x,y)}$

OBS 7.5. $mmc(a, b, c) = mmc(a, mmc(b, d))$

OBS 7.6. $mdc(a, b, c) = mdc(a, mdc(b, c))$

Exercício 7.3. Calcule $mmc(-26, 8)$

Solução: $mmc(-26, 8) = \frac{|-26.8|}{mdc(-26,8)} = \frac{|-208|}{mdc(|-26|,8)} = \frac{208}{mdc(26,8)}$. Por outro lado, $26 = 8.3 + 2$, $8 = 2.4$, donde $mdc(26, 8) = 2$. Logo $mmc(-26, 8) = \frac{208}{mdc(26,8)} = 104$

7.2 Conclusão

Calcular MDC entre e MMC entre dois números nada mais é que aplicar o algoritmo da divisão por diversas vezes.

RESUMO

..

Cálculo do MDC

O método descrito acima é ensinado na quinta série da seguinte forma:

- Desenha-se 3 linhas horizontais (paralelas) e duas verticais.
- Na segunda linha horizontal, a partir da segunda casa ficam os restos da divisão, onde nas duas primeiras ficam os números tais que queremos encontrar o MDC entre eles.

	q_1	q_2	$\cdots$		q_n
a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
a_2	a_3		$\cdots$	0	

Mínimo Múltiplo Comum - MMC

Dados $x, y \in \mathbb{Z}$ dizemos que $m \in \mathbb{Z}$ é mínimo múltiplo comum de x e y se satisfaz:

(i) $x|m$ e $y|m$

(ii) Para todo $u \in \mathbb{Z}$, se $x|u$ e $y|u$, então $m|u$

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula, apresentaremos os números racionais como classe de equivalência dos inteiros e mostraremos suas propriedades.

ATIVIDADES

ATIV. 7.1. Calcule $MDC(a, b)$ onde :

a) $a = 56$, $b = 12$;

b) $a = -20$,$b = 144$;

ATIV. 7.2. Calcule $MMC(a, b)$ onde :

a) $a = -120$, $b = 68$;

b) $a = 20$,$b = -74$;

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Análise na Reta Vol. 1, IMPA, Projeto Euclides, 5.ed., Rio de Janeiro, 2008.

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio 1, SBM, 5.ed,Rio de Janeiro, 2008.

DOMINGUES, H. Fundamentos de Aritmética, Atual Editora, São Paulo, 2001.

SANTOS, J. P. O. Introdução à Teoria dos Números, IMPA, Rio de Janeiro, 2007

Bahiano, C. Notas de aula. UFBA