AULA 8

Racionais

META:

Apresentar os números racionais como classe de equivalência de números inteiros.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Identificar números racionais como Classe de equivalência dos Inteiros.

PRÉ-REQUISITOS

Relação de equivalência e números inteiros.

8.1 Introdução

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Se a é múltiplo de b então existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bc$. Neste caso podemos denotar $c = \frac{a}{b}$
A operação $\frac{a}{b}$ só está definida em

$$I = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ b \neq 0 \text{ e } b|a\}.$$

Vamos então "aumentar"o conjunto onde podemos definir a operação $\frac{a}{b}$.

8.2 Construção dos Números Racionais

Seja $\mathbb{Z}^* = \{m \in \mathbb{Z};\ m \neq 0\}$. Consideremos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(m, n);\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}^*\}$ e a relação $\sim$ definida por:

$$(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow mq = np$$

Proposição 8.14. *A relação acima é de equivalência.*

Demonstração. A relação é reflexiva pois $m.n = n.m$. A relação é simétrica pois $(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow mq = np \Leftrightarrow pn = qm \Leftrightarrow (p, q) \sim (m, n)$. A relação é transitiva pois se $(m, n) \sim (p, q)$ e $(p, q) \sim (s, t)$ então $mq = np$ e $pt = qs$. Logo $mqt = npt$ e $npt = nqs$. Portanto $mqt = nqs$. Como $q \neq 0$, pela lei do corte, $mt = ns$, isto é, $(m, n) \sim (s, t)$. ■

A relação $\sim$ particiona $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ em um conjunto de classes de equivalência:

$$\mathbb{Q} = \{[s, m], [t, n], ...\}$$

Onde

$$[s,m] = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ (a,b) \sim (s,m)\}$$

$\mathbb{Q}$ é chamado o conjunto dos números racionais.

8.2.1 Adição e Multiplicação em $\mathbb{Q}$

A adição e a multiplicação são definidas em $\mathbb{Q}$ por

$$\begin{aligned} + : \qquad \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ ([s,m],[t,n]) &\mapsto [s,m] + [t,n] = [sn + mt, mn] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} . : \qquad \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ ([s,m],[t,n]) &\mapsto [s,m].[t,n] = [st, mn] \end{aligned}$$

Afirmação: As operações acima estão bem definidas. De Fato, mostraremos que "+"está bem definida e deixaremos "."como exercício.

Sejam $[s,m] = [a,b]$ e $[t,n] = [c,d]$. Logo $sb = ma$ e $td = nc$. Assim $sbnd = mand$ e $tdmb = ncmb$. Portanto

$$\begin{aligned} sbnd + ncmb &= mand + tdmb \\ (sd + cm)nb &= md(an + td) \Rightarrow \\ [sd + cm, md] &= [an + tb, nb] \\ [s,m] + [c,d] &= [a,b] + [t,] \end{aligned}$$

Logo "+"está bem definida.

OBS 8.1. Se representarmos $[s,m] = \frac{s}{m}$ então $[s,m] + [t,n] = \frac{s}{m} + \frac{t}{n} = \frac{sn+mt}{mn}$.

Propriedades da Adição:

Sejam $a = [s,m]$, $b = [t,n]$ e $c = [p,q]$ elementos em $\mathbb{Q}$. Então:

(a) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(b) $a + b = b + a$

(c) Existe um elemento $z \in \mathbb{Q}$ tal que $a + z = a$, para todo $a \in \mathbb{Q}$.

(d) Dado um $a \in \mathbb{Q}$, existe $(-a) \in \mathbb{Q}$ tal que $a + (-a) = z$

Demonstração.

(a) $(a+b)+c = ([s,m]+[t,n])+[p,q] = [sn+tm, mn]+[p,q] = [(sn+tm)q+(mn)p, (mn)q]$ e $a+(b+c) = [s,m]+([t,n]+[p,q]) = [s,m]+[tq+np, nq] = [snq+m(tq+np)+m(nq)] = [(sn+mt)q+(mn)p, (mn)q]$. Portanto, $(a+b)+c = a+(b+c)$.

(c) Seja $z = [o, m]$. Assim, $[s,m] + [0,m] = [sm, mm]$.

Afirmação: $[sm, mm] = [s, m]$.

De fato, $(sm)m = (mm)s$.

(d) Seja $(-a) = [-s, m]$. Assim, $a + (-a) = [s,m] + [-s,m] = [sm + m(-s), m^2] = [0, m^2] = z$.

OBS 8.2. $z = 0$.

Exercício 8.1. Mostrar que $(-a)$ é único.

Propriedades da multiplicação: Sejam $a = [s,m]$, $b = [t,n]$ e $c = [p,q]$ elementos de $\mathbb{Q}$. Então:

(a) $ab = ba$

(b) $a(bc) = (ab)c$

(c) Se $ab = cb$ e $b \neq 0$, então $a = c$.

(d) Existe $\widetilde{a} \in \mathbb{Q}$, tal que $a\widetilde{a} = a$ para todo $a \in \mathbb{Q}$.

(e) Dado $a \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$, Existe um elemento $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ tal que $a.a^{-1} = \widetilde{a}$.

Demonstração. Seja $a = [s, m]$ e $a^{-1} = [m, s]$. Note que a^{-1} está bem definido uma vez que $a \neq 0$ e $s \neq 0$. $a.a^{-1} = [s, m].[m, s] = [sm, ms] = [sm, sm] = \widetilde{a} = 1$ ■

OBS 8.3. Seja $\mathbb{K}$ um conjunto com uma operação soma (+) e de multiplicação (.). Suponha que $\mathbb{K}$ é fechado com relação à soma e à multiplicação. Suponha ainda que as operações satisfazem as seguintes propriedades:

(a) $(a + b) + c = a + (b + c)$, quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{K}$ e $(ab)c = a(bc)$.

(b) $a + b = b + a$ e $ab = ba$ quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{K}$.

(c) Existem $u, e \in \mathbb{K}$ tais que $a + u = a$ e $a.e = a$

(d) Existem $a', a'' \in \mathbb{K}$ tais que $a + a' = u$ e se $a \neq u$, $a.a'' = e$

(e) Dados $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a(b + c) = ab + ac$

Neste Caso dizemos que $\mathbb{K}$ é um corpo.

Exercício 8.2. Mostre que $\mathbb{Q}$ tem uma estrutura de corpo.

Propriedades:

1. Se $a, b, \in \mathbb{Q}$ e $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

   Demonstração. Suponha $a \neq 0$. Então existe a^{-1}. Logo $a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = b$. Mas $ab = 0$ e portanto

   $$b = a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0.$$

   ■

2. Se $ac = bc$ e $c \neq 0$, então $a = b$.

   Demonstração. Como $c \neq 0$, existe c^{-1}, logo $a(ac^{-1}) = (bc)c^{-1} \Rightarrow a(cc^{-1}) = b(cc^{-1}) \Rightarrow a = b$. ■

3. $ax = b \Leftrightarrow x = a^{-1}b$ $(a \neq 0)$

Demonstração. Trivial. ■

8.2.2 Divisão em $\mathbb{Q}$

Definamos a operação $: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}$ (divisão). Como:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^* &\to \mathbb{Q} \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b^{-1}. \end{aligned}$$

Propriedade: Se $a, b \in \mathbb{Q}$ e $c \in \mathbb{Q}^*$, então

$$(a + b) : c = a : c + b : c.$$

De fato,

$$(a + b) : c = (a + b) \cdot c^{-1} = ac^{-1} + bc^{-1} = a : c + b : c.$$

8.2.3 Somatórios e produtórios em $\mathbb{Q}$

Definimos somatório e produtório de números racionais como:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) + a_n$$

e

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right) a_n$$

Exercício 8.3. Sejam $a, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Q}$. Então

$$a \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (aa_i)$$

Se $n = 1$ temos,

$$a \left(\sum_{i=1}^{1} a_1 \right) = a \cdot a_1 = \sum_{i=1}^{1} (aa_1)$$

Suponha que a expressão acima seja válida para n. vamos mostrar que é válida para $n+1$. De fato:

$$\begin{aligned} a\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) &= a\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1}\right) \\ = a\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + aa_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n}(aa_i) + aa_{n+1} \\ = \sum_{i=1}^{n+1}(aa_i) \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução finita, o resultado é válido para todo $n \in \mathbb{Q}$

Exercício 8.4. Sejam $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Q}$. Então

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{-1}$$

Se $n = 1$, temos

$$\left(\prod_{i=1}^{1} a_i\right)^{-1} = a_i^{-1} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{-1}$$

Suponha o resultado válido para n. Vamos mostrar que ele também é válido para $n+1$.

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{-1} &= \left(\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right).a_{n+1}\right)^{-1} \\ = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{-1} \cdot (a_{n+1})^{-1} &= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{-1}\right).a_{n+1}^{-1} \\ = \prod_{i=1}^{n+1} a_i^{-1} \end{aligned}$$

8.2.4 Potências de Números Racionais

Seja $a \in \mathbb{Q}^*$. Definimos a potência n-ésima de a como:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a, \ n \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

Se $n \in \mathbb{Z}_-$, defininimos a potência como $a^n = (a_{-1})^{-n}$.

Proposição 8.15. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, $\forall a \in \mathbb{Q}^*$ e $\forall m, n \in \mathbb{Z}$

Demonstração. Note que se $n < 0$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$. De fato, se $n < 0$, $p = -n > 0$. $a^n a = (a_{-1})^p a = \left((a_{-1})^{p-1} a^{-1}\right) a = (a^{-1})^{p-1}.(a^{-1}a) = (a^{-1})^{p-1} = (a^{-1})^{-n-1} = a^{n+1}$

Mostraremos por indução que $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, se $n \geq 0$.

Se $n = 0$, $a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m a^0$. Suponha que $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. vamos mostrar que $a^{m+(n+1)} = a^m \cdot a^{n+1}$. $a^m a^{n+1} = a^m(a^n a) = (a^m a^n)a = a^{m+n}a = a^{m+n+1} = a^{m+(n+1)}$.

Suponha $m, n < 0$. Logo $m + n < 0$. Assim $a^{m+n} = (a^{-1})^{-m-n} = (a^{-1})^{-m} a^{-1})^{-m} = a^m a^n$. Logo se $m, n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{Q}^*$, temos que $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

8.3 Conclusão

Os racionais surgem naturalmente dos inteiros. Justamente nos casos em que um números não divide o outro. Note também que as operações são fáceis de se trabalhar.

RESUMO

..

Números Racionais

Seja $\mathbb{Z}^* = \{m \in \mathbb{Z};\ m \neq 0\}$. Consideremos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(m, n);\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}^*\}$ e a relação $\sim$ definida por:

$$(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow mq = np$$

A relação $\sim$ particiona $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ em um conjunto de classes de equivalência:

$$\mathbb{Q} = \{[s, m], [t, n], ...\}$$

Onde

$$[s, m] = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ (a, b) \sim (s, m)\}$$

$\mathbb{Q}$ é chamado o conjunto dos números racionais.

Propriedades

Propriedades da Adição:

Sejam $a = [s, m]$, $b = [t, n]$ e $c = [p, q]$ elementos em $\mathbb{Q}$. Então:

(a) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(b) $a + b = b + a$

(c) Existe um elemento $z \in \mathbb{Q}$ tal que $a + z = a$, para todo $a \in \mathbb{Q}$.

(d) Dado um $a \in \mathbb{Q}$, existe $(-a) \in \mathbb{Q}$ tal que $a + (-a) = z$

Propriedades da multiplicação: Sejam $a = [s, m]$, $b = [t, n]$ e $c = [p, q]$ elementos de $\mathbb{Q}$. Então:

(a) $ab = ba$

(b) $a(bc) = (ab)c$

(c) Se $ab = cb$ e $b \neq 0$, então $a = c$.

(d) Existe $\widetilde{a} \in \mathbb{Q}$, tal que $a\widetilde{a} = a$ para todo $a \in \mathbb{Q}$.

(e) Dado $a \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$, Existe um elemento $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ tal que $a.a^{-1} = \widetilde{a}$.

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula, caro aluno, mostraremos que $\mathbb{Q}$ é ordenado e que podemos olhar os inteiros como subconjunto dos racionais.

ATIVIDADES

ATIV. 8.1. Questão Mostre que em $\mathbb{Q}$ valem as seguintes propriedades:

a) $-(a+b) = -a + (-b)$, $a, b \in \mathbb{Q}$;

b) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, $a, b \in \mathbb{Q}^*$;

c) $(a^m)^n = a^{mn}$, $\forall a \in \mathbb{Q}^*, \forall m, n \in \mathbb{Z}$;

ATIV. 8.2. Determine $r \in \mathbb{Z}$ de maneira que $\frac{10r}{2r-1}$ represente um número inteiro.

ATIV. 8.3. Seja $\frac{m}{n}$ uma fração irredutível (m, n primos entre si). Mostre que, se $r \in \mathbb{Z}$, então $r + \frac{m}{n} = \frac{rn+m}{m}$ é irredutível.

ATIV. 8.4. Mostre por indução que:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

ATIV. 8.5. Calcule $[2,4] + [-5,13]$ e $[3,14]\cdot[-2,5]$

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Análise na Reta Vol. 1, IMPA, Projeto Euclides, 5.ed., Rio de Janeiro, 2008.

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio 1, SBM, 5.ed,Rio de Janeiro, 2008.

DOMINGUES, H. Fundamentos de Aritmética, Atual Editora, São Paulo, 2001.

LIPSCHUTZ , S. Teoria dos Conjuntos - Coleção Schaum