AULA 9

Ordem

META:

Apresentar uma ordem para os números racionais .

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Comparar números racionais e trabalhar com relações envolvendo desigualdades.

PRÉ-REQUISITOS

Números Racionais, inteiros e indução finita.

9.1 Introdução

Podemos comparar números racionais? a resposta é sim e como construímos ele como relação de equivalência de inteiros, é natural que esta ordem se de através da ordem dos inteiros.

9.2 Relação de Ordem em $\mathbb{Q}$

Seja $a = [s, m] \in \mathbb{Q}$. Dizemos que $a > 0$ se $sm > 0$. Neste caso dizemos $a \in \mathbb{Q}_+$ (Números racionais positivos). Se $sm < 0$ dizemos que $a \in \mathbb{Q}_-$ (Racionais negativos). Seja $b = [t, n] \in \mathbb{Q}$. Dizemos que

$$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$$

e

$$b < a \Leftrightarrow a - b > 0$$

Pela tricotomia dos números inteiros temos que $sm > 0$ ou $sm < 0$ ou $sm = 0$
Assim,

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$$

OBS 9.1. Sem perda de generalidade podemos supor, se $a = [s, m]$, que $m > 0$. De fato, $[s, m] = [-s - m]$, pois $s(-m) = m(-s) = -(sm)$ $(\frac{s}{m} = \frac{-s}{-m})$. Dizemos que $0 \leq a \in \mathbb{Q}$, se $a > 0$ ou $a = 0$. Note que se $a = [s, m]$ e $b = [t, n]$ $(m, n \in \mathbb{Z}_+)$ então $a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0 \Leftrightarrow [t.n] + [-s, m] \geq 0 \Leftrightarrow [tm - sn, mn] \geq 0 \Leftrightarrow (tm - sn)(mn) \geq 0 \Leftrightarrow tm \geq sn$

$$\frac{s}{m} \geq \frac{t}{n} \Leftrightarrow sn \geq tm$$

Exemplo 9.1. $\frac{-2}{4} < \frac{1}{2}$ pois $-4 < 4$.

OBS 9.2. $a = [s, m] \geq 0, m > 0 \Leftrightarrow s \geq 0$

Proposição 9.16. *Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$. Se $a < b$ então existe $h \in \mathbb{Q}_+$ tal que*

$$a + h = b.$$

Lema 9.1. *Dados $a = [s, m],\ b = [t, n] \in \mathbb{Q}$ existem $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tais que $a = [x, z]$ e $b = [y, z]$*

Demonstração. Suponha $[s, m] = [x, z]$ e $[t, n] = [y, z]$. Logo $sz = mx$ e $tz = ny$. Seja $p = mmc(m, n)$. Logo $p = mk$ e $p = n\widetilde{k}$.

$$sp = smk,\ tp = tm\widetilde{k} \Rightarrow sp = (sk)m,\ tp = (t\widetilde{k})n.$$

$$[s, m][sk, p],\ [t, n] = [t\widetilde{k}, p].$$

Logo, fazendo $z = mmc(m, n),\ x = sk$ e $y = t\widetilde{k}$, onde $p = mk,\ p = n\widetilde{k}$. Temos o resultado. ■

Demonstração. Suponha $a = [s, m],\ b = [t, n]$ com $m, n > 0$. Pelo lema anterior podemos escrever a e b como segue:

$$a = [x, p],\ b = [y, p].$$

Temos que $a < b$ e portanto $xp < yp$. Assim $x < y$, com $x, y \in \mathbb{Z}$. Desta forma existe $z > 0,\ z \in \mathbb{Z}$ tal que $y = x + z$, logo

$$b = [y, p] = [x + z, p] = [x, p] + [z, p] = a + h$$

■

Mostraremos agora que a relação $\leq$ em $\mathbb{Q}$ é de ordem total. Pelo já mencionado assumiremos que para cada elemento $[s, m] \in \mathbb{Q}$, podemos tomar $m > 0$.

(a) "$\leq$" é reflexiva. De fato, $[s, m] \leq [s, m]$ pois $sm \leq ms$.

(b) "$\leq$" é anti-simétrica. De fato, se $[s,m] \leq [t,n]$ e $[t,n] \leq [s,m]$ então $sn \leq mt$ e $tm \leq ns$. Logo $sn = tm$, ou seja, $[s,m] = [t,n]$.

(c) "$\leq$" é transitiva. Com efeito, se $[s,m] \leq [t,n]$ e $[t,n] \leq [p,q]$ então $sn \leq mt$ e $tq \leq np$. Assim, $snq \leq mtq$ e $mtq \leq mnp$ $(m > 0,\ q > 0)$. Pela transitividade de "$\leq$"em $\mathbb{Z}$, temos que $snq \leq mnp$. Como $n > 0$, $nq \leq mp$, ou seja, $[s,m] \leq [p,q]$.

(d) Temos $[s,m] \leq [t,n]$ ou $[t,n] \leq [s,m]$, pois $sn \leq mt$ ou $tm \leq ns,\ m,n,s,t \in \mathbb{Z}$. A relação "$\leq$" em $\mathbb{Q}$ é de ordem total.

Exercício 9.1. 1. Se $a,b \in \mathbb{Q}^*,\ c \in \mathbb{Q}^*$ e $a < b$, então $ac < bc$.

2. Se $a,b,c \in \mathbb{Q}$ e $a < b$ então então $a + c < b + c$.

OBS 9.3. Suponha que sobre um corpo $\mathbb{K}$, esteja definido uma relação "$\leq$" que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $a \leq a,\ \forall\ a \in k$.

(b) $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$.

(c) $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

(d) $a \leq b$ ou $b \leq a$.

(e) $a \leq b$ e $c \in k \Rightarrow a + c \leq b + c$.

(f) $a \leq b$ e $0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$.

Dizemos que $\mathbb{K}$ é corpo ordenado.

Imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$:. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(s) = [s,1] =$
$\frac{s}{1}$

f está bem definida. De fato, seja $[s,1] = [\widetilde{s},1]$. Assim $s \cdot 1 = 1 \cdot \widetilde{s} \Leftrightarrow s = \widetilde{s}$.

Note que f é injetora (*exercício*).

- f preserva a soma, pois

$$f(s_1+s_2)=[s_1+s_2,1]=[s_1,1]+[s_2,1].$$

- f preserva a multiplicação, pois

$$f(s_1\cdot s_2)=[s_1s_2,1]=[s_1,1]\cdot[s_2,1]=f(s_1)f(s_2).$$

- f preserva a ordem, pois $s_1\leq s_2\Rightarrow s_1\cdot 1\leq 1\cdot s_2\Rightarrow [s_1,1]\leq [s_1,1]\leq[s_2,1]\Rightarrow f(s_1)\leq f(s_2)$.

Assim $f:\mathbb{Z}\to Im(f)\subset\mathbb{Q}$ é um isomorfismo que preserva ordem.

Proposição 9.17. *Seja $a,b\in\mathbb{Q}$ tal que $a<b$. Então existe $c\in\mathbb{Q}$ tal que $a<c<b$.*

Demonstração. Como $a<b$, então

$$a+a<a+b$$

e

$$a+b<b+b,$$

pela transitividade, $a+a<a+b<b+b$. Note que $a+a=1\cdot a+1\cdot a=(1+1)a=2a$. Portanto

$$2a<a+b<2b.$$

Temos que $[1,2]=\frac{1}{2}>0$. Assim,

$$\frac{1}{2}(2a)=<\frac{a+b}{2}<\frac{1}{2}\cdot(2b).$$

Mas,

$$\frac{1}{2}(2a)=(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1})\cdot a=1\cdot a=a.$$

Portanto

$$a<\frac{a+b}{2}<b.$$

Seja $c=\frac{a+b}{2}$. ∎

Corolário 9.1. *O conjunto $\mathbb{Q}_+$ não possui elemento mínimo.*

Demonstração. De fato, se $a > 0$ então

$$0 < \frac{1}{2} \cdot a < a.$$

OBS 9.4. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado tal que para quaisquer $a, b \in \mathbb{K}$ com $a < b$, existe $c \in \mathbb{K}$ onde $a < c < b$. Neste caso dizemos que $\mathbb{K}$ é **denso**.

Proposição 9.18. *Se $a, b \in \mathbb{Q}$ com $b \in \mathbb{Q}_+$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nb > a$.* [2]

Demonstração.
Afirmação: A proposição vale com $\mathbb{Z}_+$ no lugar de $\mathbb{Q}_+$ e $\mathbb{Z}$ no lugar de $\mathbb{Q}$:
Demonstração da Afirmação: Com efeito, Dado $a \in \mathbb{Q}$, seja $n = |a| + 1$. Observe que $bn \geq n$ (pois $b \geq 1$). Assim $nb \geq n > a$
Demonstração da proposição: Sem perda de generalidade suponha

$$a = \frac{q_1}{p},\ b = \frac{q_2}{p}.$$

Onde $q_1 \in \mathbb{Z}$ e $q_2, p \in \mathbb{Z}^+$. Assim existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nq_2 > q_1$. Logo $\frac{nq_2}{p} > \frac{q_1}{p}$. Mas

$$n \cdot \frac{q_2}{p} = \frac{n}{1} \cdot \frac{q_2}{p} = \frac{nq_2}{p}.$$

Portanto,

$$n \cdot \frac{q_2}{p} > \frac{q_1}{p}.$$

■

OBS 9.5. Temos que se $m, n \in \mathbb{Z}$ $(n \neq 0)$.

$$m : n = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

[2] Um corpo $\mathbb{K}$ que satisfaz esta proposição é dito **arquimediano**.

Chamamos $\frac{m}{n}$ de fração. (ou número fracionário)

Definição 9.1. Dizemos que a fração $\frac{m}{n}$ é irredutível se $mdc(m, n) = 1$

9.3 Conclusão

A ordem de um número racional surge naturalmente da ordem dos inteiros. Como os naturais são classes de equivalência dos produto cartesiano dos inteiros, era de se esperar que houvesse alguma relação entre eles, o que justamente mostramos através da imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$

RESUMO

..

Relação de Ordem em $\mathbb{Q}$

Seja $a = [s, m] \in \mathbb{Q}$. Dizemos que $a > 0$ se $sm > 0$. Neste caso dizemos $a \in \mathbb{Q}_+$ (Números racionais positivos). Se $sm < 0$ dizemos que $a \in \mathbb{Q}_-$ (Racionais negativos). Seja $b = [t, n] \in \mathbb{Q}$. Dizemos que

$$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$$

e

$$b < a \Leftrightarrow a - b > 0$$

Pela tricotomia dos números inteiros temos que $sm > 0$ ou $sm < 0$ ou $sm = 0$

Assim,

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$$

Isomorfismo

Existe um isomorfismo $f : \mathbb{Z} \to Im(f) \subset \mathbb{Q}$ que preserva ordem. Assim, podemos supor $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Densidade

Seja $a, b \in \mathbb{Q}$ tal que $a < b$. Então existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $a < c < b$.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula apresentaremos mais propriedades dos números racionais. Mostraremos também que como podemos escrever um número racional como um números decimal (finito ou periódico) e vice e versa.

ATIVIDADES

ATIV. 9.1. Mostre que $\mathbb{Q}^-$ é fechado em relação à adição, mas não em relação à multiplicação.

ATIV. 9.2. O sentença $\frac{12}{7} > \frac{13}{8}$ é verdadeira? Justifique.

ATIV. 9.3. Mostre que se $a, b \in \mathbb{Q}^+$, então $a \cdot b > 0$

ATIV. 9.4. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(s) = [s, 1]$. Mostre que f é injetora.

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Análise na Reta Vol. 1, IMPA, Projeto Euclides, 5.ed., Rio de Janeiro, 2008.

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio 1, SBM, 5.ed,Rio de Janeiro, 2008.

DOMINGUES, H. Fundamentos de Aritmética, Atual Editora, São Paulo, 2001.

LIPSCHUTZ , S. Teoria dos Conjuntos - Coleção Schaum