AULA
10

Racionais

META:

Apresentar o conceito de módulo de números racionais e sua representação decimal.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Identificar a forma decimal de um números racional.

Identificar o inteiros mais próximo de um racional.

PRÉ-REQUISITOS

Números Racionais, inteiros e indução finita.

10.1 Introdução

Prezado Aluno, nesta aula estudaremos o porquê de um número decimal finito ou periódico ser um número racional e o porquê de um número racional ser finito ou periódico. Antes apresentaremos a você algumas propriedades modulares dos números racionais e a função maior inteiro.

10.1.1 Valor Absoluto de um Número Racional

Definimos $|a|$ com $a \in \mathbb{Q}$ como:
$$|a| = \begin{cases} a & , \quad \text{se} a \geq 0 \\ -a & , \quad \text{se} a < 0 \end{cases}$$
Propriedades:

(a) $-|a| \leq a \leq |a|$

(b) $|a+b| \leq |a| + |b|$

(c) $|ab| = |a||b|$

(d) Se $a \neq 0$, então $|a^{-1}| = |a|^{-1}$

As demonstrações são deixadas como exercício (basta seguir o que foi feito com os números inteiros) **Questões**

1. Mostre que $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n = a^{-n}$, para todo $a \in \mathbb{Q}^*$ e $n \in \mathbb{Z}$.

2. Se $a, b \in \mathbb{Q}_+$ então $ab \in \mathbb{Q}_+$.

3. Mostre que $\frac{1515}{3333} = 1533$.

4. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma aplicação bijetora $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ é um automorfismo de $\mathbb{K}$ se $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e $f(xy) = f(x)f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$. Mostre, através das seguintes etapas que o único automorfismo de $\mathbb{Q}$ é a identidade:

(a) $f(1) = 1$

(b) $f(-a) = -f(a)$

(c) $f(m) = m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.

(d) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

(e) $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ e para todo $n \in \mathbb{Z}^*$

Soluções:

1. Para $n = 1$ temos que $(a^1)^{-1} = a^{(-1)1} = a^{-1}$. Suponhamos o resultado válido para n e provemos que o mesmo é válido para $n+1$: $a^{(n+1)-1} = a^{-n} + -1 = a^{n(-1)-1} = a^{n(-1)}a^{1.(-1)} = a^{-1(n)}.a^{-1.1} = a^{-1(n)+(-1).1} = a^{-(n+1)} = (a^{-1})^{n+1}$. $(a^m)^n = a^{mn}$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Então $(a^{-1})^(n) = a^{-1.n} = a^{-n}$.

2. tome $a = \frac{s}{m}$ e $b = \frac{n}{t}$. Então $sm > 0$, $mt > 0$. Sejam $s, m, n, t \in \mathbb{Z}^+$.
$$ab = \frac{sn}{mt} > 0.$$
Sejam $s, m, n, t \in \mathbb{Z}_-$
$$ab = \frac{sn}{mt} > 0.$$
Sejam $s, m \in \mathbb{Z}_+$ e $n, t \in \mathbb{Z}^-$
$$ab = \frac{sn}{mt} > 0.$$
Sejam $s, m \in \mathbb{Z}_-$ e $n, t \in \mathbb{Z}_+$
$$ab = \frac{sn}{mt} > 0.$$

3. (a) (Exercício)

   (b) Como $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, pela lei do cancelamento, $f(0) = 0$. Assim, para todo $a \in \mathbb{Q}$ $f(-a) + f(a) = f((-a) + a) = f(0) = 0$

(c) (Exercício)

(d) $1 = f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\cdot n\right) = f\left(\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)+...+f\left(\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$

(e) Admitindo $n > 0$, o que sempre é possível, $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m\cdot\frac{1}{n}\right) = f(m)\cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = m\cdot\frac{1}{n} = \frac{m}{n}$.

10.1.2 A Função Maior Inteiro

Definição 10.1. Seja $a \in \mathbb{Q}$. Denotamos por $[a]$ o maior inteiro menor ou igual a a. isto é,

$$[a] = \max\{m \in \mathbb{Z};\ m \leq a\}$$

A função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = [a]$ é chamada função maior inteiro.

Exemplo 10.1. $[5/4] = 1$; $[8] = 8$; $[-1/2] = -1$.

Proposição 10.19. *Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$. Então*

(a) $[a] \leq a < [a] + 1$

(b) $a \leq b \Rightarrow [a] \leq [b]$

(c) $[a + m] = [a] + m$*, para todo* $m \in \mathbb{Z}$

(d) $[a] + [b] \leq [a + b] \leq [a] + [b] + 1$

Demonstração.

(a) Fica como exercício.

(b) Suponha $a \leq b$ e $[a] > [b]$. Assim $[b] + 1 \leq [a]$. Por (a), $[b] + 1 > b > [b]$. $b < [b] + 1 \leq [a] \leq a$, ou seja $b < a$, o que é uma contradição. Logo $[a] \leq [b]$.

(c) Do item (a), $0 \leq a - [a] < 1$. Seja $a_1 = a - [a]$. Assim $a = [a] + a_1$. Note que

$$[a + m] = [[a] + m + a_1] = [a] + m.$$

(d) Faça $a_1 = a - [a]$ e $b = b - [b]$ e $c = a + b - [a + b]$. Note que $0 \leq a_1 < 1$, $0 \leq b_1 < 1$ e $0 \leq c < 1$. $a+b = [a]+[b]+(a_1+b_1)$, onde $0 \leq a_1 + b_1 < 2$. $[a + b] = [[a] + [b] + (a_1 + b_1)] = [a] + [b] + [a_1 + b_1]$, mas $[a_1 + b_1] = 0$ ou $[a_1 + b_1] = 1$. Logo $[a + b] \leq [a] + [b] + 1$. Como $0 \leq a_1 + b_1 < 2$, temos que $[a_1 + b_1] \geq 0$. Logo $[a + b] \geq [a] + [b]$. Portanto,$[a] + [b] \leq [a + b] \leq [a] + [b] + 1$.

Exercício 10.1. Seja q um inteiro positivo o qual é quociente da divisão de m por n $(n > 0)$. Mostre que $q = \left[\frac{m}{n}\right]$.

Solução: Temos $m = qn + r$, onde $0 \leq r < n$.

Logo

$$\frac{m}{n} = \frac{qn + r}{n} = \frac{qn}{n} + \frac{r}{n} = q + \frac{r}{n}.$$

Logo

$$\left[\frac{m}{n}\right] = [q + \frac{r}{n}] = q + \left[\frac{r}{n}\right]$$

Mas, $0 \leq \frac{r}{n} < 1$. Assim $\left[\frac{r}{n}\right] = 0$, e portanto $q = \left[\frac{m}{n}\right]$.

Exercício 10.2. O expoente de um número primo p que aparece em $n!$ é

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + ...$$

Solução: Se $p > n$, temos que $n!$ não possui fatores de p, logo o expoente é zero. mas $n < p^r$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Assim

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + ... = 0$$

Se $n \geq p$, o quociente da divisão de n por p é $\left[\frac{n}{p}\right]$. Então p é divisor de um dos seguintes fatores de $n!$:

$$p, 2p, 3p, ..., \left[\frac{n}{p}\right] p$$

. $n! = n(n-1)...$, p é divisor desses $\left[\frac{n}{p}\right]$ fatores. De maneira análoga, desses $\left[\frac{n}{p}\right]$ fatores, os que são múltiplos de p^2 totalizam $\left[\frac{n}{p^2}\right]$. Logo o expoente de p em $n!$ é

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + ...$$

Exemplo 10.2. Qual o expoente de 3 em 20!?

$$\left[\frac{20}{3}\right] + \left[\frac{20}{3^2}\right] = 6 + 2 = 8$$

10.1.3 Representação Decimal

Seja o racional positivo $\frac{a}{b}$, $b > 1$, $a \in \mathbb{Z}$. Temos

$$a = q_0 b + r_0,\ 0 \leq r_0 < b$$

Assim,

$$10r_0 = q_1 b + r_1,\ 0 \leq r_1 < b$$

Como $r_0 < b$, temos $10r_0 < 10b$. Logo $q_1 < 10$.

Se $r_1 = 0$, então

$$r_0 = \frac{q_1}{10} \cdot b \Rightarrow a = q_0 b + \frac{q_1}{10} \cdot b \Rightarrow \frac{a}{b} = q_0 + \frac{q_1}{10}.$$

Assim escrevemos $\frac{a}{b} = q_0, q_1$ e chamaremos q_0, q_1 de representação decimal de $\frac{a}{b}$

Se $r_1 \neq 0$,

$$10r_1 = q_2 b + r_2,\ 0 \leq r_2 < b$$

se $r_2 = 0$, temos que

$$r_1 = \frac{q_2 b}{10} \Rightarrow r_0 = \frac{q_1}{10} \cdot b + \frac{q_2}{10^2} \cdot b \Rightarrow a = q_0 b + \frac{q_1 b}{10} b + \frac{q_2 b}{10^2} \Rightarrow \frac{a}{b} = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2}$$

Assim escrevemos

$$\frac{a}{b} = q_0, q_1 q_2$$

Se $r_2 \neq 0$, repete-se o processo.

Se $r_2 = r_1$, temos que $\frac{a}{b} = q_0, q_1q_2q_2q_2, ...$ (Dízima periódica simples).

Os restos são elementos do conjunto $\{0, 1, 2, ..., b - 1\}$. De modo que rb deve ser algum $r_1, ..., r_{b-1}$, digamos r_c. A representação neste caso é

$$\frac{a}{b} = q_0, q_1q_2 \cdots q_{b-1}q_{c+1}q_{c+2} \cdots q_{b-1}q_{c+1}q_{c+2} \cdots$$

Logo cada racional pode ser expresso como um decimal exato ou periódico.

Exemplo 10.3. (a) $\frac{5}{4} = 1, 25$.

(b) $\frac{3}{8} = 0, 375$

(c) $\frac{11}{6} = 1, 8\overline{3}$

(d) $\frac{85}{7} = 3, \overline{571428}$

OBS 10.1. Note que todo decimal exato é um número racional (por exemplo, $\frac{a}{b} = q_0, q_1 = q_0 + \frac{q_1}{10}$)

Teorema 10.1. *Cada decimal periódico é um número racional*

Demonstração. Considere o decimal periódico

$$x, yzdefdef... = x, yz + 0, 00def + 0, 00000def + ...$$

Temos que x, yz é um número racional e $0, 00def + 0, 00000def + ...$ é a soma de uma PG onde $a_1 = 0, 00def$ e $r = 0, 001$ Assim

$$A = \frac{a}{1 - r} = \frac{0, 00def}{1 - 0, 001} = \frac{0, 00def}{0, 999} = \frac{def}{99900}.$$

Logo A é racional. Concluímos assim que $x, yz\overline{def}$ é racional. ∎

10.2 Conclusão

Desta aula concluímos que todo números racionais e números decimais (finitos ou periódicos) são equivalentes. E os decimais não-periódicos? Até a proxima aula.

RESUMO

..

Representação decimal

Todo decimal exato é um número racional

Todo decimal periódico é um números racional

Todo racional é um número periódico (exato ou finito).

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula iniciaremos a saga da construção dos números reais via cortes de Dedekind.

ATIVIDADES

..

ATIV. 10.1. Dados $a, b \in \mathbb{Q}$ mostre que:

(a) $-|a| \leq a \leq |a|$

(b) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(c) $|ab| = |a||b|$

(d) Se $a \neq 0$, então $|a^{-1}| = |a|^{-1}$

ATIV. 10.2. Mostre que 1000! termina em 249 zeros

ATIV. 10.3. Encontre a representação decimal dos seguintes números racionais:

(a) $-\frac{15}{33}$

(b) $\frac{1}{5}$

(c) $\frac{285}{13}$

(d) $\frac{9}{10}$

ATIV. 10.4. Se $a, b \in \mathbb{Q}^+$, então $[a][b] \leq [ab]$

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Análise na Reta Vol. 1, IMPA, Projeto Euclides, 5.ed., Rio de Janeiro, 2008.

DOMINGUES, H. Fundamentos de Aritmética, Atual Editora, São Paulo, 2001.

LIPSCHUTZ , S. Teoria dos Conjuntos - Coleção Schaum