AULA 11

Reais

META:

Construção dos Números Reais .

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Identificar um Corte de Dedekind.

11.1 Introdução

Caro aluno se você imaginar um triângulo retângulo cujos lados que formam o ângulo reto tenham comprimento 1 cm, pelo Teorema de Pitágoras conseguimos encontrar a medida da hipotenusa. A pergunta que se faz é: Com os conjuntos construídos por nós até o momento, é possível encontrar esta número? Ou seja a equação $x^2 = 2$ tem solução em $\mathbb{Q}$?

Suponha que $x = \frac{p}{q}$ (fração irredutível), tal que $x^2 = 2$. Assim $\frac{p^2}{q^2} = 2$ e $p^2 = 2q^2$.

Portanto p^2 é par e consequentemente, p também é par, ou seja, $p = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Daí

$$\begin{aligned} (2k)^2 &= 2q^2 \\ 4(k^2) &= 2q^2 \\ 2k^2 &= q^2 \end{aligned}$$

Logo q^2 também é par, e assim q é par, absurdo. Logo não existe racional tal que $x^2 = 2$. Assim, apartir de agora construiremos um conjunto, apartir dos racionais que soluciona este e muitos outros problemas.

11.1.1 Cortes em $\mathbb{Q}$

Seja $a \subset \mathbb{Q}$, $A \neq \emptyset$ um elemento $a \in \mathbb{A}$ é chamado máximo de A, se $a \geq x$, para todo $x \in A$

Definição 11.1. Um conjunto $A \subset \mathbb{Q}$ é dito limitado superiormente se existe $x \in \mathbb{Q}$, tal que $x \geq a$, para todo $a \in A$. x é chamado cota superior.

Exemplo 11.1. Seja $B = \{x \in \mathbb{Q};\ -1 < x < 1\}$

- -1 é cota inferior e 1 é cota superior.

- B não possui elemento máximo nem mínimo, pois dado $\widetilde{x} \in \mathbb{B}$, $-1 < \frac{-1+\widetilde{x}}{2} < \widetilde{x} < \frac{1+\widetilde{x}}{2} < 1$

Se o conjunto da cotas inferiores de um conjunto A possui máximo, esse máximo é chamado de ínfimo do conjunto A e será denotado por $\inf A$

Se o conjunto das cotas superiores de um conjunto A possui mínimo, então esse mínimo é chamado de supremo e denotado por $\sup A$.

Definição 11.2. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado, se todo subconjunto limitado superiormente possui supremo dizemos que $\mathbb{K}$ é completo.

Note que $\mathbb{Q}$ não é completo. Basta o exemplo anterior.

Um dos nossos objetivos nesta unidade é construir um corpo ordenado completo que contém $\mathbb{Q}$.

Definição 11.3. Dizemos que um sub-conjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ é um **Corte de DEDEKIND** se satisfaz as seguintes propriedades, para todo $p, q, r \in \mathbb{Q}$:

I. $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$

II. Se $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$ e $q < p$ então $q \in \alpha$

III. Se $p \in \alpha$, então $p < r$, para algum $r \in \alpha$

OBS 11.1. o item (III) nos diz que um corte α não possui máximo

Exemplo 11.2.

1. $0^* = \mathbb{Q}^{-1} = \{x \in \mathbb{Q};\ x < 0\}$ é um corte. Se $x < 0$, $x < \frac{x+0}{2} < 0$

2. Para cada $z \in \mathbb{Q}$, $z^* = \{r \in \mathbb{Q};\ r < z\}$ é um corte de DEDEKIND.

3. $\widetilde{B} = \{r \in \mathbb{Q};\ r \leq 0\}$. Obviamente, (I) é satisfeita. Note que se $r \in \widetilde{B}$ e $\widetilde{r} < r$, temos $\widetilde{r} < r \leq 0$. Logo $\widetilde{r} \in \widetilde{B}$ (II) é satisfeita). (III) não é satisfeita. basta tomar $p = 0$.

4. $\{r \in \mathbb{Q};\ r > 0\}$ não é corte. (II) não é satisfeita.

5. $\alpha = \{x \in \mathbb{Q};\ x < 0 \text{ ou}(x \geq 0 \ \text{ e } \ x^2 < 2\}$.

Mostraremos que as propriedades I, II e III de corte para 5.

I Basta mostrar que $-1 \in \alpha$ e $5 \notin \alpha$.

II Tome $x \in \alpha$. Se $x \leq 0$ e $y < x$, logo $y < 0$. Assim $y \in \alpha$. Se $x > 0$, $x^2 < 2$ e $y < x$, então $y < 0$ ou $0 < y < x$. Se $y < 0$, $y \in \alpha$. No segundo caso, note que $0 < y < x \Rightarrow 0 < y^2 < x^2$. Como $x^2 < 2$, $y^2 < 2$ e portanto $y \in \alpha$.

III Seja $x \in \alpha$. Se $x \leq 0$, seja $y = 1$. Assim $x < y$ e $y^2 = 1 < 2$. Considere o caso que $x > 0$ e $x^2 < 2$. Tome $h = 2 - x^2$, então $x^2 + h = 0$ e $0 < h < 2$. Seja $\gamma = x + \frac{h}{5}$. Assim $\gamma^2 = \left(x + \frac{h}{5}\right) = x^2 + \frac{2xh}{5} + \frac{h^2}{25}$. Note que $x < 2$. Assim $2xh < 4h$. Observe que $0 < h < 2 \Rightarrow 0 < h^2 < 2h$. Logo $y^2 = x^2 + \frac{2xh}{5} + \frac{h^2}{25} < x^2 + \frac{4h}{5} + \frac{h^2}{25} = x^2 + \frac{22h}{25} < x + h = 2$. Logo $y > 0$ e $y^2 < 2$ $(y \in \alpha)$ e $y > x$

De I, II e III, α é um corte.

11.1.2 Construção dos Números Reais

Considere a seguinte família de todos os cortes de DEDEKIND:

$$\mathbb{R} = \{\alpha \subset \mathbb{Q};\ \alpha \text{ satisfaz} I, II, \ \text{ e } \ III\}$$

Vamos mostrar que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo. **Passo 1:** Defina a relação "$<$"da seguinte maneira:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$$

Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ então $\alpha < \gamma$ pois $\alpha\beta\gamma$

Vamos mostrar que dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ uma e somente uma das seguintes relações ocorre:

$$\alpha < \beta, \alpha = \beta, \beta < \alpha$$

Suponha que α não é subconjunto próprio de β. Portanto existe $p \in \alpha$ com $p \notin \beta$. Seja $q \in \beta$. Então $q < p$ (pois $p \in \beta$) e como α é corte, $q \in \alpha$. Logo $\beta\alpha$ ($\beta \neq \alpha$), ou seja, $\beta \subset \alpha$.

Logo $\mathbb{R}$ é ordenado.

Passo 2: $\mathbb{R}$ é completo.

Seja $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente e β uma cota superior de A. Defina γ como a união de todos os $\alpha \in A$:

$$\bigcup_{\alpha \in A} \alpha = \{a \in \mathbb{Q};\ \text{existe} \alpha \in A\ \text{com} a \in \alpha\}$$

Como $A \neq \emptyset$ existe $\alpha_0 \in A$, logo $\alpha_0 \subset \gamma$. Portanto $\gamma \neq \mathbb{Q}$. γ satisfaz I. Para mostrar I e II, seja $p \in \gamma$. Logo $p \in \alpha_1,\ \alpha_1 \in A$. Se $q < p$, então $q \in \alpha_1$ e portanto $q \in \gamma$, o que mostra II. A propriedade III fica como exercício.

Se $p \in \gamma$ então existe $r < p$, como $\beta \subset \gamma$, então existe algum $r \in \gamma$

Note que $\alpha \leq \gamma$, para todo $\alpha in A$.

Seja $\delta < \gamma$. Logo existe $s \in \gamma$ tal que $s \notin \delta$. Como $s \in \gamma$, $s \in \alpha$, para algum $\alpha \in A$. Então $\delta < \alpha$. Logo δ não é cota superior. Portanto $\gamma = \sup A$.

Passo 3: Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, defina

$$\alpha + \beta = \{r + s; r \in \alpha,\ s \in \beta\} = \{s + r; s \in \beta,\ r \in \alpha\}$$

Afirmação: $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$.

De fato, $\alpha + \beta \neq \emptyset$ pois $\alpha,\ \beta \neq \emptyset$. Tome $r' \notin \alpha$ e $s' \notin \beta$. Logo $r' + s' > r + s$ para todo $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Logo $r' + s' \notin \alpha + \beta$, donde vale I. Seja $p \in \alpha + \beta$. Logo $p = r + s$, com $r \in alpha,\ s \in \beta$. Seja $q < p$. Então $q - s < r$. Logo $q - s \in \alpha$. Note que $q = (q - s) + s \in \alpha + \beta$, donde vale II. o item III fica como exercício.

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

- Existe $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + \widetilde{\alpha} = \alpha$

De fato, seja $\widetilde{\alpha} = 0^*\{s \in \mathbb{Q};\ s < 0\}$ Seja $r \in \alpha$ e $s \in 0^*$. Note que $r + s < r$. Assim $r + s \in \alpha$, ou seja $\alpha + 0^* \subset \alpha$.
Seja $p \in \alpha$. Assim existe $r > p$, $r \in \alpha$. Logo $p - r \in 0^*$. Note que $p = r + (p - r) \in \alpha + 0^*$. Logo $\alpha \subset \alpha + 0^*$. Portanto, $\alpha = \alpha + 0^*$

- Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + \beta = 0^*$

Se $s \notin \alpha$, e $p = -s - 1$. Logo $s = -p - 1 \notin \alpha$. Logo $p \in \beta$ $(\beta \neq 0)$. Seja $q \in \alpha$. Então $-q \notin \beta$, pois $-(q) - r < q$, para todo $r \in \mathbb{Q}^+$. Assim $-(-q) - r \in \alpha$. Logo $\beta \neq \mathbb{Q}$ e vale I.
Seja $p \in \beta$ e $q < p$. Logo existe $r > 0$ tal que $-p - r \in \alpha$. Como $q < p$, $-q > -p \Rightarrow -q - r > -p - r$. Logo $q,\ r \notin \alpha$. $q \in \beta$ e, portanto vale II.
Seja $p \in \beta$ e $t = p + \frac{r}{2}$, $r > 0$, onde $-p - r \notin \alpha$. $-t - \frac{r}{2} = -p - \frac{r}{2} - \frac{r}{2} = -p - r \notin \alpha$. Logo $t \in \beta$ e vale III.
Relembrando:

$$B = \{p \in \mathbb{Q};\ \text{exister} \in \mathbb{Q}^+,\ \text{com} - p - r \notin \alpha\}$$

Vamos mostrar que $\alpha + \beta = 0^*$. Se $r \in \alpha$ e $s \in \beta$, então -$-s \notin \alpha$. Logo $r < -s$, ou seja $r + s < 0$ e $\alpha + \beta \subset 0^*$. Seja $v \in 0^*$ e tome $u = -\frac{v}{2}$. Logo $u > 0$. Assim existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nu \in \alpha$ e $(n+1)u \notin \alpha$ (isto segue da propriedade Arquimediana de $\mathbb{Q}$). Se $p = -(n+2)u$, então $p \in B$, pois $-p - u \notin \alpha$ e $v = nu + p \in \alpha + \beta$. Logo $0^* \subset \alpha + \beta$. Concluímos que $\alpha + \beta = 0^*$.
Denotamos β por $-\alpha$

11.2 Conclusão

Estamos construindo um conjunto através de classe de equivalência de subconjuntos de $\mathbb{Q}$. Não é uma construção trivial. Mas muito interessante.

RESUMO

..

Cortes em $\mathbb{Q}$

Seja $a \subset \mathbb{Q}$, $A \neq \emptyset$ um elemento $a \in \mathbb{A}$ é chamado máximo de A, se $a \geq x$, para todo $x \in A$.

Um conjunto $A \subset \mathbb{Q}$ é dito limitado superiormente se existe $x \in \mathbb{Q}$, tal que $x \geq a$, para todo $a \in A$. x é chamado cota superior.

Definição 11.4. Dizemos que um sub-conjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ é um **Corte de DEDEKIND** se satisfaz as seguintes propriedades, para todo $p, q, r \in \mathbb{Q}$:

I. $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$

II. Se $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$ e $q < p$ então $q \in \alpha$

III. Se $p \in \alpha$, então $p < r$, para algum $r \in \alpha$

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula concluiremos a construção de $\mathbb{R}$ e mostraremos a inclusão (via imersão) de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

ATIVIDADES

..

ATIV. 11.1. Seja $A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\}$. Mostre que $\sup A = 1$.

ATIV. 11.2. Mostre que $2^* + 3^* = 5^*$.(Não use a imersão de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$).

ATIV. 11.3. Seja p um número primo. Prove que $\sqrt{p}$ não é racional.

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Análise na Reta Vol. 1, IMPA, Projeto Euclides, 5.ed., Rio de Janeiro, 2008.

DOMINGUES, H. Fundamentos de Aritmética, Atual Editora, São Paulo, 2001.

LIPSCHUTZ , S. Teoria dos Conjuntos - Coleção Schaum

RUDIN, W. Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, 1976