AULA 12

Reais - Continuação

META:

Construção dos Números Reais .

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Identificar $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado completo.

Resolver inequações.

Diferenciar um número Racional de um irracional.

PRÉ-REQUISITOS

Cortes de Dedekind.

12.1 Introdução

Caro aluno, finalmente mostraremos que $\mathbb{R}$ é ordenado completo. Algumas demonstrações serão omitidas, mas vocês futuramente saberão estudá-las com mais maturidade. Além disso, identificaremos $\mathbb{Q}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$ e apresentaremos também algumas propriedades de $\mathbb{R}$ bem com resolver algumas inequações.

12.1.1 Continuação

Passo4: Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e $\beta < \gamma$ então $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.
Note que

$$\alpha + \beta = \{a + b;\ a \in \alpha,\ b \in \gamma\}$$

$$\alpha + \gamma = \{a + c;\ a \in \alpha,\ c \in \gamma\}$$

Como $\beta \subsetneq \gamma$, $\alpha + \beta \subsetneq \alpha + \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$
Passo 5: Se $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $\beta \in \mathbb{R}^+$, definimos

$$\alpha\beta = \{p \in \mathbb{Q};\ p \leq rs,\ r \in \alpha, s \in \beta,\ r > 0,\ s > 0\}$$

$1^* = \{q \in \mathbb{Q}^*;\ q < 1\}$
Vamos mostrar que $\alpha\beta$ é corte:
$\alpha\beta \neq \emptyset$ e $\alpha\beta \neq \mathbb{Q}$, donde vale I
Seja $q < p$, $p \in \alpha\beta$. Logo $a < p \leq rs$ para algum $0 < r \in \alpha$ e $s \in \beta$ e $0 < s \in \beta$. Logo $q \leq rs$, $0 < r \in \alpha$ e $0 < s \in \beta$ e assim $q \in \alpha\beta$, donde vale II.
Seja $p \in \alpha\beta$. Logo existem $r \in \alpha$ e $s \in \beta$ tal que $p \leq rs$. Como α e β são cortes, existem $r' \in \alpha$ e $s' \in \beta$ tal que $r < r'$ e $s < s'$. Seja $p' = r's'$. Logo $p' > p$ e $p' \in \alpha\beta$, ou seja, vale III
As propriedades de comutatividade, associatividade, elemento neutro e inverso multiplicativo seguem de maneira similar ao **Passo 3**. Observe que se $\alpha > 0^*$ e $\beta > 0^*$ então $\alpha\beta > 0^*$. (Exercício)

Passo 6: Defina $\alpha{\cdot}0^* = 0^*\alpha$ e $\alpha\beta = \begin{cases} (-\alpha)(-\beta) & ,\alpha < 0^*,\ \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta] & ,\ \alpha < 0^*,\ \beta < 0^* \\ -[\alpha(-\beta)] & ,\ \alpha > 0^*,\ \beta < 0^* \end{cases}$

Exercício 12.1. $\gamma = -(-\gamma)$

• $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ $(\gamma, \beta, \gamma > 0^* \Rightarrow$ exercício) Suponha $\alpha > 0^*,\ \beta < 0^*,\ \beta + \gamma > 0{*}$.

$\gamma = (\beta+\gamma) - \beta$; $\alpha\gamma = \alpha[(\beta+\gamma)-\beta]$ e $\alpha\gamma = \alpha(\beta+\gamma) + \alpha(-\beta) = \alpha(\beta+\gamma) - \alpha\beta$. Logo $\alpha\gamma + \alpha\beta = \alpha(\beta+\gamma)$

OBS 12.1. Dado $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$, $-5, -4, 0$ são cotas inferiores de A; 1 é o supremo e o máximo.

O ínfimo e o supremo podem ou não pertencer ao conjunto; o mínimo e o máximo deve está no conjunto; todo máximo é supremo; todo mínimo é ínfimo.

Passo 7: Relembremos que $r^* = \{p \in \mathbb{Q};\ p < q\}$

Vamos mostrar que

1. $r^* + s^* = (r+s)^*$
2. $r^*s^* = (rs)^*$
3. $r^* < s^* \Leftrightarrow r < s$

Prova de 1. Seja $p \in r^* + s^*$. Então $p = u + v$, com $u \in r^*$, $v \in s^*$. Logo $u < r$ e $v < s$. Logo $p < r + s$, ou seja $p \in (r+s)^*$. Portanto, $r^* + s^* \subset (r+s)^*$. Seja $p \in (r+s)^*$. Logo $p < r + s$. Seja t escolhido tal que $2t = r + s - p$. Seja $r' = r - t$ e $s' = s - t$. Note que $r' + s' = r = s - 2t = p$. Portanto, $(r+s)^* \subset r^* + s^*$, e assim, $r^* + s^* = (r+s)^*$. **Prova de 2.** Fica como exercício! **Prova de 3.** Se $r < s$, então $r \in s^*$, mas $r \notin r^*$. Note que se $a \in r^*$, então $a \in s^*$. Logo $r^* \subsetneq s^*$, ou seja, $r^* < s^*$. Suponha $r^* < s^*$. Logo existe $p \in s^*$ tal que $p \in r^*$. Logo $p \geq r$. e $p < s$. Logo $r \leq p < s \Rightarrow r < s$

Concluímos através destes três fatos que a função:

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto q^* \end{aligned}$$

Preserva soma (P,1), produto (P,2) e ordem (P,3).

Vamos mostrar que f é injetiva e assim, concluir que f é imersão de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ que preserva operações e ordem.

Se $r \neq s$ $(r < s)$, $r^* < s^*$, ou seja $f(r) \neq f(s)$. Logo podemos identificar $\mathbb{Q}$ como um subconjunto de $\mathbb{R}$ $(\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$, fazendo $r^* := r$

Assim

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$$

Definição 12.1. $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ é denominado conjunto dos números irracionais.

Proposição 12.20. *(a) Se $z \in \mathbb{R}$ com $z + a = a$, então $z = 0$.*

(b) Se $ab = o$ com $a, b \in \mathbb{R}$ então $a = 0$ ou $b = 0$

(c) Se $a \in \mathbb{R}^+$, então $a^2 > 0$

(d) $1 > 0$

(e) Seja $a \leq 0$ e $b \leq 0$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Então,

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

(f) Mostre que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, se $a, b > 0$

Demonstração.

(a) $z + 0 = z + (a + (-a)) = (z + a) + (-a) = a + (-a) = 0$

(b) Suponha $a \neq 0$. Logo existe $a_{-1} = \frac{1}{a}$. Assim $ab = 0 \Rightarrow \frac{1}{a}ab = \frac{1}{a}0 = \left(\frac{1}{a}a\right)b = 0 \Rightarrow b + 0$

(c) Se $a \in \mathbb{R}^*$, então $a^2 > 0$. Se $a \in \mathbb{R}^+$, então $a.a > 0$. Se $a \in \mathbb{R}^-$, $-a \in \mathbb{R}^+$, logo $(-a)(-a) > 0$ e, consequentemente $a^2 > 0$.

(d) $1 = 1.1 > 0$, donde $1 > 0$

(e) Suponha $a > 0$ e $b > 0$. Logo $a + b > 0$. Note que $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$. Como $b > a$ e $b + a > 0$, $(b - a)(b + a) > 0$. Logo $b^2 > a^2$

(f) Temos que $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

$\blacksquare$

12.1.2 Inequações

A resolução de inequações está baseada na relação de ordem dos números reais e suas propriedades.

(a) Determine o conjunto A formado por todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que:

$$3x + 5 < 3$$

Solução: $3x + 5 < 3 \Rightarrow 3x + 5 - 5 < 3 - 5 \Rightarrow 3x < -2 \Rightarrow \frac{1}{3}3x < \frac{1}{3} - 2 \Rightarrow x < -\frac{2}{3}$

(b) Resolva a inequação $x^2 - 5x + 3 < -3$ **Solução:**$x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \ \text{ e } \ x - 3 > 0 \ \text{ ou } \ x - 2 > 0 \ \text{ e } \ x - 3 < 0$ Note que $x - 2 < 0 \ \text{ e } \ x - 3 > 0$ é impossível de acontecer. Logo a solução $\{x \in \mathbb{R};\ 2 < x < 3\}$

12.1.3 Valor absoluto de um número real

Definição 12.2. O valor absoluto de um número real a denotado por $|a|$ é definido como: $|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$

OBS 12.2. $|a| \geq 0$

Propriedades:

(a) $|a|^2 = a^2$, para todo $a \in \mathbb{R}$

(b) $|ab| = |a||b|$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) $-|a| \leq a \leq |a|$

(d) $|a + b| \leq |a| + |b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$

Exercício 12.2. Resolva:

(a) $|2x + 1| < 7$ **Solução:** Note que: $-7 < 2x + 1 < 7 \Leftrightarrow -8 < 2x < 6 \Leftrightarrow -4 < x < 3$. Logo o conjunto solução é $\{x \in \mathbb{R};\ -4 < x < 3\}$.

12.2 Conclusão

Finalmente mostramos que existe um corpo ordenado completo que contém $\mathbb{Q}$. Vimos também que para resolver inequações polinomiais de 1 e 2 graus não há mistério.

RESUMO

..

$\mathbb{R}$ é ordenado completo.

Para resolver inequações, basta aplicar as propriedades de ordem de $\mathbb{R}$.

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula mostraremos que $\mathbb{R}$ também possui a propriedade arquimediana e que é não-enumerável.

ATIVIDADES

..

ATIV. 12.1. Seja $K := \{s+t\sqrt{2},\ s,t \in \mathbb{Q}\}$. Mostre que K satisfaz as seguintes afirmações

a) Se $x_1, x_2 \in K$, então $x_1 + x_2 \in K$ e $x_1 x_2 \in K$

b) Se $x \neq 0$ e $x \in K$, então $\frac{1}{x} \in K$

O conjunto K é chamado *subcorpo* de $\mathbb{R}$. Com a ordem induzida de $\mathbb{R}$, o conjunto K é um corpo ordenado que está entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

ATIV. 12.2. Se $x, y \in \mathbb{R}$, mostre que:

a) $|x| = \sqrt{x^2}$

b) $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|} (y \neq 0)$

c) $|x+y| = |x| + |y|$ se, e somente se, $xy \geq 0$.

ATIV. 12.3. Mostre que $|x-y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

LEITURA COMPLEMENTAR

..

LIMA, Elon L., Análise na Reta Vol. 1, IMPA, Projeto Euclides, 5.ed., Rio de Janeiro, 2008.

DOMINGUES, H. Fundamentos de Aritmética, Atual Editora, São Paulo, 2001.

LIPSCHUTZ , S. Teoria dos Conjuntos - Coleção Schaum

RUDIN, W. Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, 1976