AULA 13

Reais- Continuação

META:

Apresentar as propriedades arquimediana e da não-enumerabilidade dos Reais .

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Identificar um intervalo.

Aplicar o Teorema da não-enumerabilidade de $\mathbb{R}$

PRÉ-REQUISITOS

Propriedades dos números reais.

13.1 Introdução

Caro Aluno, nesta aula apresentaremos a propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$ e mostraremos a não-enumerabilidade de $\mathbb{R}$. Apresentaremos os números irracionais

13.1.1 Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$

Teorema 13.1. *Se $x \in \mathbb{R}$, então existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_x$.*

Demonstração. Suponha que $n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para algum $x \in \mathbb{R}$. Note que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é completo, existe $u \in \mathbb{R}$ tal que $u = \sup \mathbb{N}$. Subtraia 1 de u, ou seja, considere $u-1$. Como u é supremo, $u-1$ nào é cota superior de $\mathbb{N}$. Assim existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $u-1 < m$. Logo $u < m+1$, Absurdo. Portanto, dado $x \in \mathbb{R}$, existe n_x tal que $n_x > x$. ■

Corolário 13.1. $\mathbb{R}$ *é Arquimediano.*

Demonstração. Seja $a, b \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$. Pelo teorema anterior, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n < \frac{a}{b}$. Assim, $nb > a$. ■

Corolário 13.2. *Dado $a \in \mathbb{R}^+$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.*

Corolário 13.3. *Se $y > 0$, existe $n_y \in \mathbb{N}$ tal que $n_y - 1 \leq y < ny$.*

Demonstração.

- Considere $E_y = \{m \in \mathbb{N};\ y < m\} \subset \mathbb{N}$
- $E_y \neq \emptyset$.

■

Pelo Princípio da Boa ordem, existe um menor elemento de E_y, n_y. Segue-se que $n_y - 1 \leq y < ny$.

13.1.2 Desigualdade de Bernolli

Teorema 13.2. *Se* $x > -1$, *então* $(1+x)^n \geq 1 + nx$, *para todo* $n \in \mathbb{R}$ *(*$x \in \mathbb{R}$*)*

Demonstração. Usaremos indução sobre n.
Note que: $1 + x = (1+x)^1 = 1 + 1x$. Logo a desigualdade é válida para $n = 1$. Suponha a desigualdade válida para n, ou seja, $(1+x)^n \geq 1 + nx$, $x > -1$. Como $x > -1$, $1 + x > 0$. Logo, $(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2$. Como $nx^2 \geq 0$, temos que $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$.
Portanto pelo Princípio de indução, a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$

Teorema 13.3. *Se* $a \in \mathbb{R}$ *é tal que* $0 \leq a < \epsilon$, *para todo* $\epsilon > 0$ *então* $a = 0$.

Demonstração. Suponha $a > 0$ e seja $\epsilon_0 = \frac{a}{2}$. Por hipótese, $0 < a < \epsilon_0$, absurdo pois $\frac{a}{2} < a$. Logo $a = 0$ ■

Definição 13.1. Dizemos que $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ ordenado é denso em $\mathbb{K}$ se dados $x, y \in \mathbb{K}$ $(x < y)$, existe $l \in \mathbb{L}$ tal que $x < l < y$.

Teorema 13.4. $\mathbb{Q}$ *é denso em* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha que $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$. Suponha sem perda de generalidade que $x > 0$. Como $y - x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < y - x$. Assim, $nx + 1 < ny$. Note que $nx > 0$. Pelo corolário (??) existe $m \in \mathbb{N}$ tais que $m - 1 \leq nx < m \Rightarrow m \leq nx + 1 < ny$. Segue-se que $nx < m < ny \Rightarrow x < \frac{m}{n} < y$. Como $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, obtemos o desejado. ■

Exercício 13.1. Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = 2$.

Solução: Seja $S = \{s \in \mathbb{R};\ s \geq 0,\ s^2 < 2\}$. Note que $S \neq \emptyset$, pois $0 \in S$ e S é limitado, pois $2 \notin S$ $(2^2 > 2)$. Logo S possui um supremo, digamos, $x = \sup S$. Vamos mostrar que $x^2 = 2$. Suponha $x^2 < 2$. Note que

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + 2x\frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} < x^2 + \frac{1}{n}(2x+1)$$

Como $x^2 < 2$, escolha n tal que $\frac{1}{n} < \frac{2-x^2}{2x+1}$ (Propriedade Arquimediana). Logo, $\frac{1}{n}(2x+1) < 2 - x^2$, e portanto

$$\left(x + \frac{1}{n}\right) < x^2 + \frac{1}{n}(2x+1) < x^2 + (2 - x^2) = 2$$

Como $x = \sup S$, $x + \frac{1}{n}$ é cota superior. Logo $x^2 \geq 2$. $x^2 > 2$ é falso. (Exercício) $\left(x - \frac{1}{m}\right) > x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} > x^2 - \frac{2x}{m} > 2$

Objetivo: Mostrar que $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Definição 13.2. X é enumerável se existe uma função injetora $f : X \to \mathbb{N}$

Exemplo 13.1. $\mathbb{N}$ é enumerável. Basta definir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $f(x) = x$

Exemplo 13.2. $\mathbb{Z}$ é enumerável

Exemplo 13.3. $\mathbb{Q}$ é enumerável

Intervalos: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, definimos os seguintes conjuntos

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$$

$$(a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$$

$$[a,+\infty] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}$$

$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$$

$$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$$

$$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$$

Esses conjuntos são chamados de intervalos.

OBS 13.1. Se $a < b$, o intervalo (a,b) é infinito.

Teorema 13.5. *(Dos Intervalos Encaixados). Sejam* $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ... \supset I_n \supset ...$ *uma sequência decrescente de intervalos fechados e limitados, ou seja,* $I_n = [a_n, b_n]$. *Então,*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \neq \emptyset$$

Isto é, existe pelo menos um número real $x \in I_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$. Assim, $a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n$.. Então,

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq a_{n+1} \geq ... \geq ... \geq b_{n+1} \geq b_n \geq ... \geq b_1$$

Sejam $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ e $B = \{b_1, ..., b_n, ...\}$ Note que A é limitado superiormente (b_n é cota superior de A) e B é limitado inferiormente (a_n é cota inferior para B). Logo existe $a = \sup A$ e $b = \inf B$. Logo,

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a \geq b \geq ... \geq b_{n+1} \geq b_n \geq ... \geq b_1$$

■

ou Seja,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} = [a,b]$$

■

OBS 13.2. Seja $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$. Observe que $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ... \supset I_n \supset ...$. **Afirmação:**

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} = \emptyset$$

Suponha $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty}$. Note que $a \neq 0$, pois $o \notin I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $a > 0$. Pela Propriedade Arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$. Logo,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} = \emptyset$$

OBS 13.3. Seja $I_n = (n, +\infty)$. Mostre que a interseção de todos os I_n's é vazia.

Teorema 13.6. $\mathbb{R}$ *é não enumerável.*

Demonstração. Mostraremos que dado qualquer $X \subset \mathbb{R}$ enumerável, existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $x \notin X$. Inicialmente observe que dado $[a, b]$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, existe $J = [c, d]$ tal que $x_0 \notin [c, d]$ e $J \subset [a, b]$. Escrevemos $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\} \subset \mathbb{R}$. Considere um intervalo I_1 tal que $x_1 \notin I_1 = [a_1, b_1]$. Seja I_2 tal que $x_2 \notin I_2$ e $I_2 \subset I_1$. Assim, recursivamente conseguiremos intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$ tais que $x_n \notin I_n$ e $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ... \supset I_n \supset ...$. Como $I_n = [a_n, b_n]$, existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}$. Logo, $x \notin X$. Assim, $\mathbb{R}$ é não enumerável. ∎

Corolário 13.4. $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ *é não enumerável.*

Exercícios

1. Mostre que os números irracionais são não enumeráveis

2. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que $x \leq y$, para todo $x \in A$, para todo $y \in B$. Mostre que $\sup A \leq \inf B$

3. Dizemos que uma função $f : A \to \mathbb{R}^+$ é limitada superiormente se $f(A) = \{f(x); x \in A\}$ é um conjunto limitado su-

periormente. Se $f, g : A \to \mathbb{R}^+$ são limitadas superiormente, então $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$ ($\sup f = \sup\{f(x);\ x \in A\}$)

4. Mostre que se $x < 1$, então $(1-x)^n \geq 1 - nx$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução:

1. Note que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e $\mathbb{Q}$ é enumerável. Supondo $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ enumerável, temos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ é enumerável. Absurdo. Logo $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ é não enumerável.

2. Note que A é limitado superiormente por todo elemento de B, logo A possui supremo. Note também que B é limitado inferiormente por todo elemento de A. Logo B possui ínfimo (Por que?). Como $\sup A$ é a menor das cotas superiores de A e $\inf B$ é uma cota superior de A temos que $\sup A \leq \inf B$

3. Sabendo que $\sup(f+g) = \sup((f+g)(A))$ e $\sup f + \sup g = \sup(f(A)) + \sup(g(A))$, note que $(f+g)(A) \subset f(A) + g(A)$, pois dado $h \in (f+g)(A)$ temos que $h = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$ para algum $x \in A$. Assim $h \in f(A) + g(A)$. logo $\sup((f+g)(A)) \leq \sup(f(A) + g(A)) = \sup f(A) + \sup g(A)$. Portanto, $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$

4. Queremos mostrar que se $x < 1$, então $(1-x)^n \geq 1-nx$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x < 1$, temos que $-x > -1$. Logo pela desigualdade de Bernoulli temos que $(1+(-x))^n \geq 1+n(-x)$, isto é, $(1-x)^n \geq 1 - nx$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

13.2 Conclusão

Finalmente terminamos a construção dos números reais e apresentamos algumas propriedades. Neste aula mostramos que existem muito mais números irracionais do que racionais.

RESUMO

$\mathbb{R}$ é Arquimediano.

$\mathbb{R}$ é não enumerável.

Intervalos: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, definimos os seguintes conjuntos

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$$

$$(a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$$

$$[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Teorema 13.7. *(Dos Intervalos Encaixados). Sejam $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ... \supset I_n \supset ...$ uma sequência decrescente de intervalos fechados e limitados, ou seja, $I_n = [a_n, b_n]$. Então,*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \neq \emptyset$$

Isto é, existe pelo menos um número real $x \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula iniciaremos uma conversa sobre sistemas de numeração.

ATIVIDADES

ATIV. 13.1. Mostre que se r é racional ($r \neq 0$) e s é irracional, então $r + s$ e rs são irracionais.

ATIV. 13.2. Dados $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ prove que $(1+x)^{2n} > 1 + 2nx$

ATIV. 13.3. Exprima cada um dos conjuntos abaixo como reunião de intervalos:

a) O conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ tais que $|x - 3| + |x + 3| < 8$

b) idem $|x^2 - 2| < 1$.

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Análise na Reta Vol. 1, IMPA, Projeto Euclides, 5.ed., Rio de Janeiro, 2008.

DOMINGUES, H. Fundamentos de Aritmética, Atual Editora, São Paulo, 2001.

LIPSCHUTZ , S. Teoria dos Conjuntos - Coleção Schaum

RUDIN, W. Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, 1976