Matemática para o Ensino Médio I

Ângelo Alberti

São Cristóvão/SE
2010

Matemática para o Ensino Médio I

Elaboração de Conteúdo
Ângelo Alberti

Ficha catalográfica produzida pela Biblioteca Central
Universidade Federal de Sergipe

	Alberti. Ângelo
A334m	Matemática para o ensino médio I / Ângelo Alberti -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2010.
	1. Matemática . 2. Funções (Matemática). 3. Equações I. Título.
	CDU 517.5

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

PREFÁCIO

O presente material tem como objetivo, apresentar aos alunos de Licenciatura em Matemática, os conteúdos do primeiro ano do ensino médio, cubrindo o programa da disciplina: Matemática para o Ensino Médio I. O programa desta dsiciplina tem como tema central as funções reais de uma variável real, estudadas de um ponto de vista mais elementar, que não leva em conta o Cálculo Infinitesimal.

O presente texto, cobre todo o programa da disciplina e tem como principal referência bibliográfica, o texto de Elon Lages Lima com colaboração de outros autores, intitulado: A matemática do Ensino Médio I, o qual é parte de um projeto da Sociedade Brasileira de Matemática, que visa oferecer ao professor maior apoio bibliográfico.

Os conteúdos são tratados de uma maneira mais formal e em alguns casos, de maneira inédita, se comparado a forma que aparecem nos livros didáticos escolares, os quais pouco diferem um dos outros. Procuraremos mostrar, seguindo o modelo proposto pelo autor citado, que as funções afins, quadráticas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, cada uma delas é estudada como o modelo matemático adequado para representar uma situação específica. A fim de saber qual o tipo de função que se deve empregar ao resolver um problema, é necessário comparar as características desse problema com as características da função que se tem em mente. Assim se torna necessário conhecer os teoremas de caracterização de cada uma destas funções. Os teoremas e suas demonstrações são postos de forma elementar e não exigem do aluno grande esforço para seu entendimento. Possivelmente, quando em

sala de aula, no ensino médio, estes teoremas (na sua maioria) não serão repassados aos alunos a menos que o professor entenda que seja possível fazê-lo.
Também, são apresentadas aplicações para estas funções, com o intuito a despertar o interesse e exibir a eficiência e utilidade dos métodos matemáticos apresentados.

Aracaju, março de 2010.

Sumário

AULA

1

Produto Cartesiano e o plano $\mathbb{R}^2$

META:

Definir elementos, que permitirão o estudo de funções reais de uma variável real.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir o produto cartesiano e identificar o gráfico de uma função real como um subconjunto do produto cartesiano, satisfazendo certas condições.

Identificar quando um subconjunto do produto cartesiano define o gráfico de uma função.

Definir e caracterizar o plano $\mathbb{R}^2$.

PRÉ-REQUISITOS

Noções sobre teoria de Conjuntos.

1.1 Introdução

Neste capítulo e nos próximos capítulos, vamos estudar as funções reais de uma variável real, ou seja, dado $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto de números reais, consideramos a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde para cada $x \in \mathbb{R}$ o valor $f(x)$ é um número real. Começaremos abordando os casos mais simples.

Primeiramente estudaremos a função Afim e para atingir tal objetivo, faremos uma breve revisão sobre produto cartesianoe o plano $\mathbb{R}^2$.

1.2 Produto Cartesiano

Definição 1.1. Um par ordenado $p = (a, b)$ é formado por um objeto a, chamado de primeira coordenada de p e um objeto b, chamado de segunda coordenada de p.

Dois pares ordenados $p = (a, b)$ e $q = (c, d)$ serão chamados de iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$, ou seja, dois pares ordenados são iguais se suas primeiras coordenadas são iguais e suas segundas coordenadas são iguais.

Sejam X e Y dois conjuntos.

Definição 1.2. O *Produto Cartesiano* $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y é o conjunto $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y), cuja primeira corrdenada x pertence a X e a segunda coordenada y pertence a Y.

Simbolicamente, denotamos por:

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y\}.$$

Exemplo 1.1. Consideremos os subconjuntos de números reais $X = \{3, -5, \sqrt{2}\}$ e $Y = \{3, 0\}$. Então o produto cartesiano $X \times Y$ é o conjunto formado pelos pares ordenados $(3, 3), (3, 0), (-5, 3)$, $(-5, 0), (\sqrt{2}, 3)$ e $(\sqrt{2}, 0)$, ou seja, o produto cartesiano neste caso é o conjunto

$$X \times Y = \{(3, 3), (3, 0), (-5, 3), (-5, 0), (\sqrt{2}, 3), (\sqrt{2}, 0)\}.$$

Note que o par ordenado $(3, -5)$ não pertence ao produto cartesiano $X \times Y$, pois seu segundo elemento, -5 não pertence ao conjunto Y. Além disso, observe que o número de elementos do produto cartesiano $X \times Y$ é seis, ou seja, o número de elementos do conjunto X vezes o número de elementos do conjunto Y. Mais Geralmente, se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ são dois conjuntos finitos, com n e m elementos respectivamente, o produto cartesiano $X \times Y$ tem um número finito de elementos com mn elementos.

Exemplo 1.2. Seja C uma circunfêrencia e AB um segmento de reta. O produto cartesiano $C \times AB$ é representado por um cilindro. Para vermos este fato, consideremos o segmento de reta AB per-

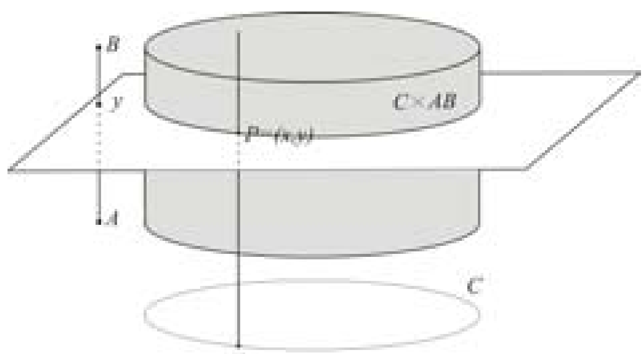

Figura 1.1: O produto Cartesiano $C \times AB$.

pendicular ao plano que contém o círculo C. Cada par ordenado (x, y) de $C \times AB$ pode ser representado pelo ponto P, interseção da reta perpendicular ao plano de C tirada pelo ponto x em C com o plano perpendicular ao segmento AB tirado pelo ponto y em AB. Veja Figura 1.2.

Definição 1.3. O Gráfico de uma função $f : X \longrightarrow Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados da forma (x, y), onde x é qualquer elemento de X e y, para cada x, é dado por $y = f(x)$. Assim

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in X\}.$$

Uma pergunta natural que surge neste momento é: Todo subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$, define o gráfico de uma função? A resposta para esta questão é não. Lembramos que para termos uma função do conjunto X no conjunto Y, para cada valor $x \in X$, devemos associar um único valor $y = f(x)$ em Y. Descrevemos agora então, quais são as condições necessárias e suficientes para que um subconjunto $G \in X \times Y$ seja o gráfico de alguma função $f : X \longrightarrow Y$.

Condição 1: Para cada $x \in X$ existe um par ordenado $(x, y) \in G$, cuja primeira coordenada é x.

Condição 2: Se $p = (x, y)$ e $q = (x, z)$ são pares pertencentes a G com a mesma primeira coordenada x, então $y = z$ e consequentemente $p = q$.

O conceito de produto cartesiano está intimamente ligado ao conceito de relação binária.

Definição 1.4. Uma relação binária R entre os elementos de um conjunto X e de um conjunto Y é um conjunto de condições que permitam determinar, dados $x \in X$ e $y \in Y$, se x está, ou não, relacionado com y, segundo a relação R. No caso afirmativo escreve-se xRy.

Exemplo 1.3. Sejam $X = Y = \mathbb{R}$, ou seja, X e Y o conjunto dos números reais e consideremos a relação R como sendo a *relação de menor que*. Uma condição que nos permite escrever $x < y$ é $x - y < 0$. Note que neste exemplo $4R8$ (quatro está relacionado com oito), pois $4 - 8 < 0$.

Um exemplo particular de relação e a relação funcional. Quando temos uma função $f : X \longrightarrow Y$, dizemos que o elemento $x \in X$ está relacionado com o elemento $y \in Y$ quando $y = f(x)$. O gráfico de uma relação R entre os conjuntos X e Y é o subconjunto $G(R)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado pelos pares ordenados (x, y) tais que xRy.

Observação 1.1. Os textos escolares de matemática em nosso país definem uma função $f : X \longrightarrow Y$ como um subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$ com as propriedades descritas pelas Condições 1 e 2, acima enunciadas. Segundo o autor Elon L. Lima, esta definição apresenta o incoviniente de ser formal, estática e não transmitir a idéia intuitiva de função como correspondência. Ainda, segundo o mesmo autor, os matemáticos e os usuários da matemática olham para uma função como uma correspondência, não como um conjunto de pares ordenados .

1.3 O plano Numérico $\mathbb{R}^2$

Consideremos o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que denotaremos por $\mathbb{R}^2$. Os elementos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ são naturalmente os pares ordenados de números reais. Eles surgem como as coordenadas do ponto P do plano Π, quando se fixa neste plano um par de eixos ortogonais OX e OY que se intersectam no ponto O, chamado origem do sistema de coordenadas. Dado o ponto $P \in \Pi$, a abcissa de P é o número x, coordenada do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo OX, enquanto a ordenada de P é a coordenada y do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo OY.

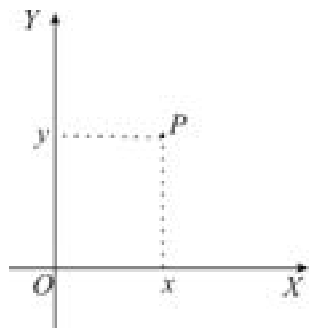

Figura 1.2: Coordenadas do ponto $P = (x, y)$ no plano $\mathbb{R}^2$.

Diz-se então que (x, y) é o par de *coordenadas* do ponto P relativamente ao sistema de eixos OXY. Os eixos OX e OY devidem o plano em quatro regiões, chamadas de quadrantes, caracterizadas pelo sinal das coordenadas de seus pontos. Assim no primeiro quadrante temos $x \geq 0$ e $y \geq 0$, no segundo quadrante $x \leq 0$ e $y \geq 0$, no terceiro quadrante $x \leq 0$ e $y \leq 0$ e no quarto quadrante $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

Consideremos a função $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(P) = (x, y)$, ou seja, que associa a cada ponto P do plano Π seu par de coordenadas (x, y) relativamente ao sistema de eixos OXY, é uma relação biunívoca. Esta função permite traduzir conceitos e propriedades geométricas para uma linguagem algébrica e, reciprocamente, interpretar geometricamente relações entre números reais. É através desta identificação, que podemos associar uma reta (figura geométrica) a uma equação algébrica (como conjunto de pontos (x,y) do plano numérico $\mathbb{R}^2$). Desta maneira podemos dizer que $\mathbb{R}^2$ é o modelo aritmético do plano Π e que Π é o modelo geométrico de $\mathbb{R}^2$. Do nosso ponto de vista, olharemos para $\mathbb{R}^2$ como o plano numérico e chamaremos seus elementos $P = (x, y)$ de pontos e procuraremos assim um melhor entendimento das propriedades das funções reais que vamos estudar.

Neste sentido, dados dois pontos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ a distância destes dois pontos em função de suas coordenadas é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}.$$

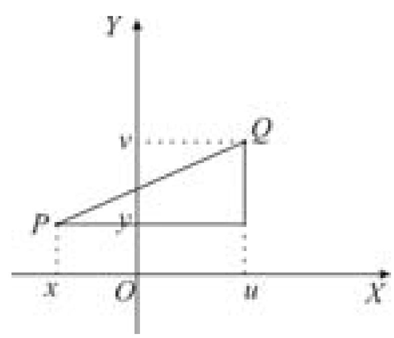

Figura 1.3: Distância entre dois pontos.

Para ver este fato, considere o ponto auxiliar S de coordenadas (u, y). Desta maneira o segmento PS é paralelo ao eixo OX (pois P e S possuem a mesma ordenada y) e o segmento SQ é paralelo ao eixo OY (pois os pontos S e Q possuem a mesma abcissa x). Portanto PSQ forma um triângulo retângulo com hipotenusa sendo o segmento PQ e cujos catetos medem $|x-u|$ e $|y-v|$ e pelo toerema de Pitágoras, segue o resultado.

Exemplo 1.4. Seja C uma circunferência com centro no ponto $A=(a,b)$ e com raio $r>0$. Então pela definição de circunferência, um ponto $P=(x,y)$ pertence a C se, e somente se, $d(P,A)=r$. Pela fórmula de distância obtida acima, temos que a circunferência C é o conjunto

$$C=\{(x,y);(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\},$$

e diz-se então que

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

é a equação da circunferência com centro no ponto $A=(a,b)$ e raio r. Por sua vez o disco D de centro em A e raio r é formado pelos pontos $P=(x,y)$ tais que a distância ao ponto A é menor igual a r. Portanto

$$D=\{(x,y);(x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2\}.$$

O gráfico de uma função real de variável real $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ é um subconjunto do plano numérico $\mathbb{R}^2$ e portanto pode ser visualizado (nos casos mais simples) como uma linha, formada pelos pontos de coordenadas $(x,f(x))$, quando x varia em X.

Exemplo 1.5. Considere a função $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ onde $X=[-1,1]$ definida por $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Vamos tentar reconhecer o gráfico de f. Observe que um ponto (x,y) pertence ao gráfico de f se, e somente se,

$$\begin{aligned}&-1\leq x\leq 1\quad e\quad y=\sqrt{1-x^2}\\ &\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1\quad e\quad y^2=1-x^2\\ &\Leftrightarrow y\geq 0\quad e\quad x^2+y^2=1.\end{aligned}$$

Agora usando a fórmula da distância entre dois pontos, vemos que o gráfico de f é a parte da circunferência com centro em $(0,0)$ e raio 1, situada no semi-plano $y \geq 0$.

No caso de funções reais de uma variável real, as condições 1 e 2 enunciadas acima, adquirem uma forma mais geométrica, que pode ser rusumida como: Seja X um conjunto que consideraremos situado sobre o eixo horizontal. Um subconjunto $G \subset \mathbb{R}^2$ é o gráfico de uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se, e somente se, toda reta paralela ao eixo vertical, traçada a partir de um ponto de X, intersecta G num único ponto.

RESUMO

Na aula de hoje, definimos os elementos preliminares para estudar as funções reais de uma variável real. Como desejamos entender o comportamento destas funções e esse objetivo é completamente atingido quando obtemos o gráfico da função. Por isso, se faz necessário as definições de produto cartesiano em $\mathbb{R}^2$ e a definição de gráfico de uma função

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.