

# Matemática para o Ensino Médio I

Ângelo Alberti



São Cristóvão/SE  
2010

# Matemática para o Ensino Médio I

Elaboração de Conteúdo

Ângelo Alberti

---

---

Copyright © 2010 , Universidade Federal de Sergipe / CESAD.  
Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização por escrito da UFS.

**FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Alberti. Ângelo  
A334m Matemática para o ensino médio I / Ângelo Alberti -- São  
Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2010.

1. Matemática . 2. Funções (Matemática). 3. Equações  
I. Título.

CDU 517.5

**Presidente da República**  
Luiz Inácio Lula da Silva

**Chefe de Gabinete**  
Ednalva Freire Caetano

**Ministro da Educação**  
Fernando Haddad

**Coordenador Geral da UAB/UFS**  
**Diretor do CESAD**  
Antônio Ponciano Bezerra

**Secretário de Educação a Distância**  
Carlos Eduardo Bielschowsky

**Vice-coordenador da UAB/UFS**  
**Vice-diretor do CESAD**  
Fábio Alves dos Santos

**Reitor**  
Josué Modesto dos Passos Subrinho

**Vice-Reitor**  
Angelo Roberto Antonioli

---

**Diretoria Pedagógica**  
Clotildes Farias de Sousa (Diretora)

**Núcleo de Serviços Gráficos e Audiovisuais**  
Giselda Barros

**Diretoria Administrativa e Financeira**  
Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)  
Sylvia Helena de Almeida Soares  
Valter Siqueira Alves

**Núcleo de Tecnologia da Informação**  
João Eduardo Batista de Deus Anselmo  
Marcel da Conceição Souza  
Raimundo Araujo de Almeida Júnior

**Coordenação de Cursos**  
Djalma Andrade (Coordenadora)

**Assessoria de Comunicação**  
Edvar Freire Caetano  
Guilherme Borba Gouy

**Núcleo de Formação Continuada**  
Rosemeire Marcedo Costa (Coordenadora)

**Núcleo de Avaliação**  
Hérica dos Santos Matos (Coordenadora)  
Carlos Alberto Vasconcelos

---

**Coordenadores de Curso**  
Denis Menezes (Letras Português)  
Eduardo Farias (Administração)  
Haroldo Dorea (Química)  
Hassan Sherafat (Matemática)  
Hélio Mario Araújo (Geografia)  
Lourival Santana (História)  
Marcelo Macedo (Física)  
Silmara Pantaleão (Ciências Biológicas)

**Coordenadores de Tutoria**  
Edvan dos Santos Sousa (Física)  
Geraldo Ferreira Souza Júnior (Matemática)  
Janaína Couvo T. M. de Aguiar (Administração)  
Priscila Viana Cardozo (História)  
Rafael de Jesus Santana (Química)  
Ítala Santana Souza (Geografia)  
Trícia C. P. de Sant'ana (Ciências Biológicas)  
Vanessa Santos Góes (Letras Português)  
Lívia Carvalho Santos (Presencial)

---

## **NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO**

Hermeson Menezes (Coordenador)  
Arthur Pinto R. S. Almeida  
Carolina Faccioli dos Santos  
Cássio Pitter Silva Vasconcelos

Isabela Pinheiro Ewerton  
Lucas Barros Oliveira  
Nevertton Correia da Silva  
Nycolas Menezes Melo

---

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**  
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"  
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze  
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE  
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474



## PREFÁCIO

*O presente material tem como objetivo, apresentar aos alunos de Licenciatura em Matemática, os conteúdos do primeiro ano do ensino médio, cobrindo o programa da disciplina: Matemática para o Ensino Médio I. O programa desta disciplina tem como tema central as funções reais de uma variável real, estudadas de um ponto de vista mais elementar, que não leva em conta o Cálculo Infinitesimal.*

*O presente texto, cobre todo o programa da disciplina e tem como principal referência bibliográfica, o texto de Elon Lages Lima com colaboração de outros autores, intitulado: A matemática do Ensino Médio I, o qual é parte de um projeto da Sociedade Brasileira de Matemática, que visa oferecer ao professor maior apoio bibliográfico.*

*Os conteúdos são tratados de uma maneira mais formal e em alguns casos, de maneira inédita, se comparado a forma que aparecem nos livros didáticos escolares, os quais pouco diferem um dos outros. Procuraremos mostrar, seguindo o modelo proposto pelo autor citado, que as funções afins, quadráticas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, cada uma delas é estudada como o modelo matemático adequado para representar uma situação específica. A fim de saber qual o tipo de função que se deve empregar ao resolver um problema, é necessário comparar as características desse problema com as características da função que se tem em mente. Assim se torna necessário conhecer os teoremas de caracterização de cada uma destas funções. Os teoremas e suas demonstrações são postos de forma elementar e não exigem do aluno grande esforço para seu entendimento. Possivelmente, quando em*

*sala de aula, no ensino médio, estes teoremas (na sua maioria) não serão repassados aos alunos a menos que o professor entenda que seja possível fazê-lo.*

*Também, são apresentadas aplicações para estas funções, com o intuito a despertar o interesse e exibir a eficiência e utilidade dos métodos matemáticos apresentados.*

*Aracaju, março de 2010.*

# Sumário

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Aula 1: Produto Cartesiano e o plano <math>\mathbb{R}^2</math></b> | <b>13</b> |
| 1.1 Introdução . . . . .  | 14        |
| 1.2 Produto Cartesiano . . . . .                                      | 14        |
| 1.3 O plano Numérico $\mathbb{R}^2$ . . . . .                         | 17        |
| <b>RESUMO</b> . . . . .   | 21        |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .                           | 21        |
| <br>  |           |
| <b>Aula 2: Função Afim</b>  | <b>23</b> |
| 2.1 Introdução . . . . .  | 24        |
| 2.2 Função Afim . . . . .   | 24        |
| 2.3 Função Linear . . . . .   | 28        |
| 2.4 Caracterização da Função Afim . . . . .                           | 33        |
| 2.5 Conclusão . . . . .   | 36        |
| <b>RESUMO</b> . . . . .   | 37        |
| <b>ATIVIDADES</b> . . . . .   | 38        |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .                           | 40        |
| <br>  |           |
| <b>Aula 3: Funções Quadráticas</b>                                    | <b>41</b> |
| 3.1 Introdução . . . . .  | 42        |
| 3.2 Função Quadrática . . . . .                                       | 42        |
| 3.2.1 Um problema Antigo . . . . .                                    | 45        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>RESUMO</b> . . . . .                                | 47        |
| <b>ATIVIDADES</b> . . . . .                            | 47        |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .            | 48        |
| <b>Aula 4: Gráfico da Função Quadrática</b>            | <b>49</b> |
| 4.1 Introdução . . . . .                               | 50        |
| 4.2 Forma Canônica do Trinômio . . . . .               | 50        |
| 4.3 Gráfico da Função Quadrática . . . . .             | 53        |
| 4.4 Aplicações . . . . .                               | 59        |
| 4.4.1 Uma Propriedade da Parábola . . . . .            | 60        |
| 4.4.2 O movimento uniformemente variado . . . . .      | 64        |
| <b>RESUMO</b> . . . . .                                | 66        |
| <b>ATIVIDADES</b> . . . . .                            | 67        |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .            | 71        |
| <b>Aula 5: Caracterização das</b>                      |           |
| <b>    Funções Quadráticas</b>                         | <b>73</b> |
| 5.1 Introdução . . . . .                               | 74        |
| 5.2 Teoremas de Caracterização das funções quadráticas | 74        |
| 5.3 Conclusão . . . . .                                | 79        |
| <b>RESUMO</b> . . . . .                                | 79        |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .            | 79        |
| <b>Aula 6: Funções Polinomiais</b>                     | <b>81</b> |
| 6.1 Introdução . . . . .                               | 82        |
| 6.2 Funções Polinomiais e Polinômios . . . . .         | 82        |
| 6.3 Determinando um Polinômio a partir de seus Valores | 85        |
| 6.4 Gráfico de Polinômios . . . . .                    | 86        |
| <b>RESUMO</b> . . . . .                                | 89        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>ATIVIDADES</b> . . . . .  | 90         |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA</b> . . . . .                                 | 91         |
| <b>Aula 7: Funções Logarítmicas</b>  | <b>93</b>  |
| 7.1 Introdução . . . . .   | 94         |
| 7.2 Definição e Propriedades da Função Logarítmica . .                     | 95         |
| <b>RESUMO</b> . . . . .  | 103        |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .                                | 104        |
| <b>Aula 8: Função Logarítmo Natural<br/>e Área de Faixas de Hipérboles</b> | <b>105</b> |
| 8.1 Introdução . . . . .   | 106        |
| 8.2 Área de uma Faixa de Hipérbole . . . . .                               | 106        |
| 8.3 Propriedade Fundamental . . . . .                                      | 110        |
| 8.4 Função Logarítmo Natural . . . . .                                     | 113        |
| 8.4.1 Gráfico da função $\ln$ . . . . .                                    | 115        |
| <b>RESUMO</b> . . . . .  | 115        |
| <b>ATIVIDADES</b> . . . . .  | 116        |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .                                | 118        |
| <b>Aula 9: Funções Logarítmicas:<br/>Uma Abordagem Geométrica</b>          | <b>119</b> |
| 9.1 Introdução . . . . .   | 120        |
| 9.2 Funções Logarítmicas: Uma abordagem Geométrica                         | 120        |
| <b>RESUMO</b> . . . . .  | 123        |
| <b>ATIVIDADES</b> . . . . .  | 124        |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .                                | 125        |
| <b>Aula 10: Funções Exponenciais</b>                                       | <b>127</b> |
| 10.1 Introdução . . . . .  | 128        |

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 10.2   | Potências de Expoente Racional . . . . .                 | 128 |
| 10.2.1 | Gráfico da Função exponencial . . . . .                  | 136 |
| 10.3   | Funções Exponenciais $\times$ Funções Logarítmicas . . . | 137 |
| 10.4   | Função Exponencial na base $e$ . . . . .                 | 138 |
|        | <b>RESUMO</b> . . . . .                                  | 142 |
|        | <b>ATIVIDADES</b> . . . . .                              | 143 |
|        | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .              | 144 |

**Aula 11: Caracterização das funções**

|        |   |            |
|--------|---|------------|
|        | <b>Exponenciais e Logarítmicas</b>                | <b>145</b> |
| 11.1   | Introdução . . . . .                              | 146        |
| 11.2   | Caracterização das Funções Exponenciais . . . . . | 146        |
| 11.2.1 | Aplicações . . . . .                              | 150        |
| 11.3   | Caracterização das funções Logarítmicas . . . . . | 152        |
| 11.4   | Conclusão . . . . .                               | 154        |
|        | <b>RESUMO</b> . . . . .                           | 154        |
|        | <b>ATIVIDADES</b> . . . . .                       | 156        |
|        | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .       | 156        |

**Aula 12: Trigonometria:**

|      |  |            |
|------|--|------------|
|      | <b>Noções Elementares</b>                      | <b>157</b> |
| 12.1 | Introdução . . . . .                           | 158        |
| 12.2 | Trigonometria do Triângulo Retângulo . . . . . | 158        |
| 12.3 | Função de Euler e Medida de Ângulos . . . . .  | 160        |
|      | <b>RESUMO</b> . . . . .                        | 165        |
|      | <b>ATIVIDADES</b> . . . . .                    | 166        |
|      | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .    | 167        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Aula 13: Funções Trigonométricas</b>            | <b>169</b> |
| 13.1 Introdução . . . . .                          | 170        |
| 13.2 Função Seno e Cosseno . . . . .               | 170        |
| 13.2.1 Propriedades . . . . .                      | 171        |
| 13.3 Função Tangente . . . . .                     | 174        |
| 13.3.1 Propriedades da função Tangente . . . . .   | 175        |
| 13.4 Função Cotangente . . . . .                   | 177        |
| 13.4.1 Propriedades da função Cotangente . . . . . | 177        |
| 13.5 Função Secante . . . . .                      | 178        |
| 13.5.1 Propriedades da função Secante . . . . .    | 179        |
| 13.6 Função Cossecante . . . . .                   | 180        |
| 13.6.1 Propriedades da função Cossecante . . . . . | 181        |
| 13.7 Relações Fundamentais . . . . .               | 182        |
| <b>RESUMO</b> . . . . .                            | <b>186</b> |
| <b>ATIVIDADES</b> . . . . .                        | <b>187</b> |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .        | <b>188</b> |

**Aula 14: Fórmulas de Adição e**

|   |            |
|---|------------|
| <b>Leis Fundamentais</b>                        | <b>189</b> |
| 14.1 Introdução . . . . .                       | 190        |
| 14.2 Fórmulas de Adição . . . . .               | 190        |
| 14.3 Lei dos Senos e Lei dos Cossenos . . . . . | 194        |
| <b>RESUMO</b> . . . . .                         | <b>197</b> |
| <b>ATIVIDADES</b> . . . . .                     | <b>198</b> |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .     | <b>200</b> |

**Aula 15: Equações e**

|                                   |            |
|-----------------------------------|------------|
| <b>Inequações Trigonométricas</b> | <b>201</b> |
| 15.1 Introdução . . . . .         | 202        |

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| 15.2   | Equações Fundamentais . . . . .                             | 202 |
| 15.2.1 | $\text{sen } x = \text{sen } a$ . . . . .                   | 202 |
| 15.2.2 | $\text{cos } x = \text{cos } a$ . . . . .                   | 203 |
| 15.2.3 | $\text{tg } x = \text{tg } a$ . . . . .                     | 204 |
| 15.2.4 | A equação $a \text{sen } x + b \text{cos } x = c$ . . . . . | 205 |
| 15.3   | Inequações Trigonômicas . . . . .                           | 206 |
| 15.3.1 | Inequação do tipo $\text{sen } x > m$ . . . . .             | 207 |
| 15.3.2 | Inequação do tipo $\text{tg } x > m$ . . . . .              | 208 |
|        | <b>RESUMO</b> . . . . .                                     | 210 |
|        | <b>ATIVIDADES</b> . . . . .                                 | 210 |
|        | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .                 | 212 |

## Produto Cartesiano e o plano $\mathbb{R}^2$

### **META:**

Definir elementos, que permitirão o estudo de funções reais de uma variável real.

### **OBJETIVOS:**

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir o produto cartesiano e identificar o gráfico de uma função real como um subconjunto do produto cartesiano, satisfazendo certas condições.

Identificar quando um subconjunto do produto cartesiano define o gráfico de uma função.

Definir e caracterizar o plano  $\mathbb{R}^2$ .

### **PRÉ-REQUISITOS**

Noções sobre teoria de Conjuntos.

## 1.1 Introdução

Neste capítulo e nos próximos capítulos, vamos estudar as funções reais de uma variável real, ou seja, dado  $X \subset \mathbb{R}$  um subconjunto de números reais, consideramos a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , onde para cada  $x \in \mathbb{R}$  o valor  $f(x)$  é um número real. Começaremos abordando os casos mais simples.

Primeiramente estudaremos a função Afim e para atingir tal objetivo, faremos uma breve revisão sobre produto cartesiano e o plano  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.2 Produto Cartesiano

**Definição 1.1.** Um par ordenado  $p = (a, b)$  é formado por um objeto  $a$ , chamado de primeira coordenada de  $p$  e um objeto  $b$ , chamado de segunda coordenada de  $p$ .

Dois pares ordenados  $p = (a, b)$  e  $q = (c, d)$  serão chamados de iguais se, e somente se,  $a = c$  e  $b = d$ , ou seja, dois pares ordenados são iguais se suas primeiras coordenadas são iguais e suas segundas coordenadas são iguais.

Sejam  $X$  e  $Y$  dois conjuntos.

**Definição 1.2.** O *Produto Cartesiano*  $X \times Y$  de dois conjuntos  $X$  e  $Y$  é o conjunto  $X \times Y$  formado por todos os pares ordenados  $(x, y)$ , cuja primeira coordenada  $x$  pertence a  $X$  e a segunda coordenada  $y$  pertence a  $Y$ .

Simbolicamente, denotamos por:

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y\}.$$

**Exemplo 1.1.** Consideremos os subconjuntos de números reais  $X = \{3, -5, \sqrt{2}\}$  e  $Y = \{3, 0\}$ . Então o produto cartesiano  $X \times Y$  é o conjunto formado pelos pares ordenados  $(3, 3), (3, 0), (-5, 3), (-5, 0), (\sqrt{2}, 3)$  e  $(\sqrt{2}, 0)$ , ou seja, o produto cartesiano neste caso é o conjunto

$$X \times Y = \{(3, 3), (3, 0), (-5, 3), (-5, 0), (\sqrt{2}, 3), (\sqrt{2}, 0)\}.$$

Note que o par ordenado  $(3, -5)$  não pertence ao produto cartesiano  $X \times Y$ , pois seu segundo elemento,  $-5$  não pertence ao conjunto  $Y$ . Além disso, observe que o número de elementos do produto cartesiano  $X \times Y$  é seis, ou seja, o número de elementos do conjunto  $X$  vezes o número de elementos do conjunto  $Y$ . Mais Geralmente, se  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  e  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  são dois conjuntos finitos, com  $n$  e  $m$  elementos respectivamente, o produto cartesiano  $X \times Y$  tem um número finito de elementos com  $mn$  elementos.

**Exemplo 1.2.** Seja  $C$  uma circunferência e  $AB$  um segmento de reta. O produto cartesiano  $C \times AB$  é representado por um cilindro. Para vermos este fato, consideremos o segmento de reta  $AB$  per-

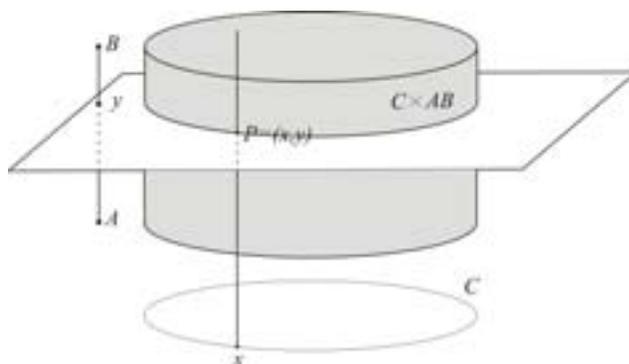


Figura 1.1: O produto Cartesiano  $C \times AB$ .

perpendicular ao plano que contém o círculo  $C$ . Cada par ordenado  $(x, y)$  de  $C \times AB$  pode ser representado pelo ponto  $P$ , interseção da reta perpendicular ao plano de  $C$  tirada pelo ponto  $x$  em  $C$  com o plano perpendicular ao segmento  $AB$  tirado pelo ponto  $y$  em  $AB$ . Veja Figura 1.2.

**Definição 1.3.** O Gráfico de uma função  $f : X \rightarrow Y$  é o subconjunto  $G(f)$  do produto cartesiano  $X \times Y$  formado por todos os pares ordenados da forma  $(x, y)$ , onde  $x$  é qualquer elemento de  $X$  e  $y$ , para cada  $x$ , é dado por  $y = f(x)$ . Assim

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in X\}.$$

Uma pergunta natural que surge neste momento é: Todo subconjunto do produto cartesiano  $X \times Y$ , define o gráfico de uma função? A resposta para esta questão é não. Lembramos que para termos uma função do conjunto  $X$  no conjunto  $Y$ , para cada valor  $x \in X$ , devemos associar um único valor  $y = f(x)$  em  $Y$ . Descrevemos agora então, quais são as condições necessárias e suficientes para que um subconjunto  $G \in X \times Y$  seja o gráfico de alguma função  $f : X \rightarrow Y$ .

**Condição 1:** Para cada  $x \in X$  existe um par ordenado  $(x, y) \in G$ , cuja primeira coordenada é  $x$ .

**Condição 2:** Se  $p = (x, y)$  e  $q = (x, z)$  são pares pertencentes a  $G$  com a mesma primeira coordenada  $x$ , então  $y = z$  e consequentemente  $p = q$ .

O conceito de produto cartesiano está intimamente ligado ao conceito de relação binária.

**Definição 1.4.** Uma relação binária  $R$  entre os elementos de um conjunto  $X$  e de um conjunto  $Y$  é um conjunto de condições que

permitam determinar, dados  $x \in X$  e  $y \in Y$ , se  $x$  está, ou não, relacionado com  $y$ , segundo a relação  $R$ . No caso afirmativo escreve-se  $xRy$ .

**Exemplo 1.3.** Sejam  $X = Y = \mathbb{R}$ , ou seja,  $X$  e  $Y$  o conjunto dos números reais e consideremos a relação  $R$  como sendo a *relação de menor que*. Uma condição que nos permite escrever  $x < y$  é  $x - y < 0$ . Note que neste exemplo  $4R8$  (quatro está relacionado com oito), pois  $4 - 8 < 0$ .

Um exemplo particular de relação é a relação funcional. Quando temos uma função  $f : X \rightarrow Y$ , dizemos que o elemento  $x \in X$  está relacionado com o elemento  $y \in Y$  quando  $y = f(x)$ . O gráfico de uma relação  $R$  entre os conjuntos  $X$  e  $Y$  é o subconjunto  $G(R)$  do produto cartesiano  $X \times Y$  formado pelos pares ordenados  $(x, y)$  tais que  $xRy$ .

**Observação 1.1.** Os textos escolares de matemática em nosso país definem uma função  $f : X \rightarrow Y$  como um subconjunto do produto cartesiano  $X \times Y$  com as propriedades descritas pelas Condições 1 e 2, acima enunciadas. Segundo o autor Elon L. Lima, esta definição apresenta o inconveniente de ser formal, estática e não transmitir a idéia intuitiva de função como correspondência. Ainda, segundo o mesmo autor, os matemáticos e os usuários da matemática olham para uma função como uma correspondência, não como um conjunto de pares ordenados .

### 1.3 O plano Numérico $\mathbb{R}^2$

Consideremos o produto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , que denotaremos por  $\mathbb{R}^2$ . Os elementos  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  são naturalmente os pares ordenados

de números reais. Eles surgem como as coordenadas do ponto  $P$  do plano  $\Pi$ , quando se fixa neste plano um par de eixos ortogonais  $OX$  e  $OY$  que se intersectam no ponto  $O$ , chamado origem do sistema de coordenadas. Dado o ponto  $P \in \Pi$ , a abscissa de  $P$  é o número  $x$ , coordenada do pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre o eixo  $OX$ , enquanto a ordenada de  $P$  é a coordenada  $y$  do pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre o eixo  $OY$ .

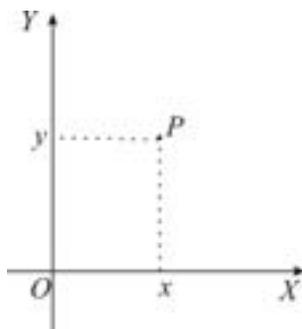


Figura 1.2: Coordenadas do ponto  $P = (x, y)$  no plano  $\mathbb{R}^2$ .

Diz-se então que  $(x, y)$  é o par de *coordenadas* do ponto  $P$  relativamente ao sistema de eixos  $OXY$ . Os eixos  $OX$  e  $OY$  dividem o plano em quatro regiões, chamadas de quadrantes, caracterizadas pelo sinal das coordenadas de seus pontos. Assim no primeiro quadrante temos  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ , no segundo quadrante  $x \leq 0$  e  $y \geq 0$ , no terceiro quadrante  $x \leq 0$  e  $y \leq 0$  e no quarto quadrante  $x \geq 0$  e  $y \leq 0$ .

Consideremos a função  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(P) = (x, y)$ , ou seja, que associa a cada ponto  $P$  do plano  $\Pi$  seu par de coordenadas  $(x, y)$  relativamente ao sistema de eixos  $OXY$ , é uma relação biunívoca. Esta função permite traduzir conceitos e propriedades geométricas para uma linguagem algébrica e, reciprocamente, interpretar

geometricamente relações entre números reais. É através desta identificação, que podemos associar uma reta ( figura geométrica) a uma equação algébrica ( como conjunto de pontos  $(x,y)$  do plano numérico  $\mathbb{R}^2$ ). Desta maneira podemos dizer que  $\mathbb{R}^2$  é o modelo aritmético do plano  $\Pi$  e que  $\Pi$  é o modelo geométrico de  $\mathbb{R}^2$ . Do nosso ponto de vista, olharemos para  $\mathbb{R}^2$  como o plano numérico e chamaremos seus elementos  $P = (x, y)$  de pontos e procuraremos assim um melhor entendimento das propriedades das funções reais que vamos estudar.

Neste sentido, dados dois pontos  $P = (x, y)$  e  $Q = (u, v)$  a distância destes dois pontos em função de suas coordenadas é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

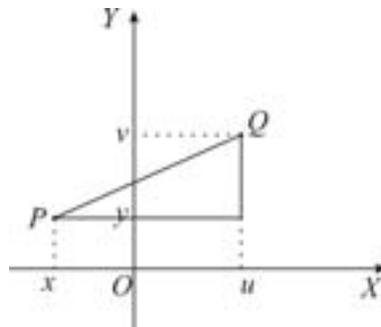


Figura 1.3: Distância entre dois pontos.

Para ver este fato, considere o ponto auxiliar  $S$  de coordenadas  $(u, y)$ . Desta maneira o segmento  $PS$  é paralelo ao eixo  $OX$  ( pois  $P$  e  $S$  possuem a mesma ordenada  $y$ ) e o segmento  $SQ$  é paralelo ao eixo  $OY$  ( pois os pontos  $S$  e  $Q$  possuem a mesma abscissa  $u$ ). Portanto  $PSQ$  forma um triângulo retângulo com hipotenusa

sendo o segmento  $PQ$  e cujos catetos medem  $|x - u|$  e  $|y - v|$  e pelo toerema de Pitágoras, segue o resultado.

**Exemplo 1.4.** Seja  $C$  uma circunferência com centro no ponto  $A = (a, b)$  e com raio  $r > 0$ . Então pela definição de circunferência, um ponto  $P = (x, y)$  pertence a  $C$  se, e somente se,  $d(P, A) = r$ . Pela fórmula de distância obtida acima, temos que a circunferência  $C$  é o conjunto

$$C = \{(x, y); (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\},$$

e diz-se então que

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

é a equação da circunferência com centro no ponto  $A = (a, b)$  e raio  $r$ . Por sua vez o disco  $D$  de centro em  $A$  e raio  $r$  é formado pelos pontos  $P = (x, y)$  tais que a distância ao ponto  $A$  é menor igual a  $r$ . Portanto

$$D = \{(x, y); (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}.$$

O gráfico de uma função real de variável real  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é um subconjunto do plano numérico  $\mathbb{R}^2$  e portanto pode ser visualizado ( nos casos mais simples) como uma linha, formada pelos pontos de coordenadas  $(x, f(x))$ , quando  $x$  varia em  $X$ .

**Exemplo 1.5.** Considere a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $X = [-1, 1]$  definida por  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Vamos tentar reconhecer o gráfico de  $f$ . Observe que um ponto  $(x, y)$  pertence ao gráfico de  $f$  se, e somente se,

$$-1 \leq x \leq 1 \quad e \quad y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad e \quad y^2 = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \quad e \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Agora usando a fórmula da distância entre dois pontos, vemos que o gráfico de  $f$  é a parte da circunferência com centro em  $(0, 0)$  e raio 1, situada no semi-plano  $y \geq 0$ .

No caso de funções reais de uma variável real, as condições 1 e 2 enunciadas acima, adquirem uma forma mais geométrica, que pode ser resumida como: Seja  $X$  um conjunto que consideraremos situado sobre o eixo horizontal. Um subconjunto  $G \subset \mathbb{R}^2$  é o gráfico de uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  se, e somente se, toda reta paralela ao eixo vertical, traçada a partir de um ponto de  $X$ , intersecta  $G$  num único ponto.

## RESUMO

..

Na aula de hoje, definimos os elementos preliminares para estudar as funções reais de uma variável real. Como desejamos entender o comportamento destas funções e esse objetivo é completamente atingido quando obtemos o gráfico da função. Por isso, se faz necessário as definições de produto cartesiano em  $\mathbb{R}^2$  e a definição de gráfico de uma função

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

..

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.

