AULA

2

Função Afim

META:

Definir e caracterizar função Afim e função linear.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir função Afim e Função linear e identificar suas propriedades.

Mostrar que o gráfico de uma função linear é uma reta.

Caracterizar um função afim e uma função linear.

Estabelecer a relação entre função afim e progressões aritméticas.

PRÉ-REQUISITOS

Noções sobre produto cartesiano e o plano $\mathbb{R}^2$, como também propriedades básicas de progressões aritméticas.

2.1 Introdução

Nesta seção vamos definir o conceito de função afim, mostrando que estas funções são aquelas cujos gráficos, são retas.

2.2 Função Afim

Definição 2.1. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se Afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Fica evidente identificar uma função afim pela definição acima, se lhe é dado a lei de formação da função. Porém, se a função é dada por uma tabela de dados ou se, dado um fenômeno e queremos representá-lo através de uma função, como identificar se a melhor função que descreve este fenômeno é uma função afim. Por isso torna-se necessário caracterizar uma função afim. Este é o objetivo principal desta aula.

Exemplo 2.1. A função identidade $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim. Ainda, são casos particulares de função afim as funções lineares, $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = b$.

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função afim. Determinamos explicitamente os coeficientes a e b. Primeiramente é fácil ver que $b = f(0)$, o qual é chamado *valor inicial* da função f. O Coeficiente a pode ser determinado desde que conhecemos dois valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ da função f em dois pontos distintos x_1 e x_2. Com efeito, sejam

$$f(x_1) = ax_1 + b \qquad e \qquad f(x_2) = ax_2 + b,$$

donde obtemos

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1),$$

e portanto

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Dados $x, x + h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número $a = f(x + h) - f(x)/h$ chama-se *taxa de crescimento* ou *taxa de variação* da função no intervalo de extremos x e $x + h$.

Exemplo 2.2. Um exemplo de um modelo de uma função afim é o preço a pagar de uma corrida de taxi. O preço pode ser dado pela função $f : x \longmapsto ax + b$, onde x é a distância percorrida(medida em quilômetros). O valor inicial b é chamada de bandeira e o coeficiente a é o preço de cada quilômetro rodado.

Sejam

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1, ax_1 + b) \\ P_2 &= (x_2, ax_2 + b) \\ P_3 &= (x_3, ax_3 + b) \end{aligned}$$

três pontos do gráfico da função afim $f(x) = ax+b$. Vamos mostrar que dados três quaisquer pontos do gráfico de uma função afim são colineares. Para mostrar este fato, basta verificar que a maior das três distâncias $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$, seja igual a soma dos outros dois. (Observe que se uma das distâncias fosse menor que a soma das outras duas, os três pontos seriam os vértices de um triângulo). Podemos supor, sem perda de generalidade que $x_1 < x_2 < x_3$. Da fórmula da distância entre dois pontos obtemos que:

$$\begin{aligned} d(P_1,P_2) &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+a^2(x_2-x_1)^2} &&= (x_2-x_1)\sqrt{1+a^2}, \\ d(P_2,P_3) &= \sqrt{(x_3-x_2)^2+a^2(x_3-x_2)^2} &&= (x_3-x_2)\sqrt{1+a^2}, \\ d(P_1,P_3) &= \sqrt{(x_3-x_1)^2+a^2(x_3-x_1)^2} &&= (x_3-x_1)\sqrt{1+a^2}. \end{aligned}$$

Daí segue imediatamente que $d(P_1,P_3) = d(P_1,P_2) + d(P_2,P_3)$ e obtemos assim o resultado.

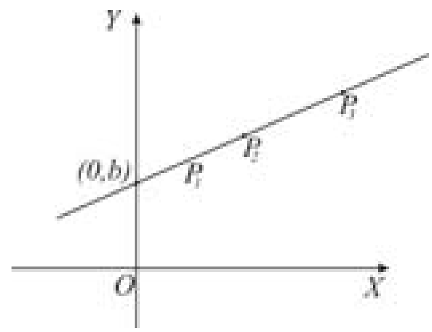

Figura 2.1: Os pontos $P_1 = (x_1, ax_1+b)$, $P_2 = (x_2, ax_2+b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3+b)$ colineares.

Geometricamente, b é a ordenada do ponto de interseção da reta que é o gráfico da função $f : x \longmapsto ax+b$ com o eixo OY. O número a chama-se *inclinação* ou *coeficiente angular* dessa reta (em relação ao eixo horizontal OX). Quanto maior o valor de a, mais esta reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$ o gráfico de f é uma reta ascendente (quando se percorre no sentido positivo de x) e quando $a < 0$, a reta é descendente.

De maneira geral, para conhecer-mos uma função $f : X \longrightarrow Y$ devemos ter uma regra que determina o valor de $f(x)$ para todo $x \in X$. No caso de uma função Afim; como mostramos que seu gráfico é uma reta e uma reta fica determinada quando se conhece dois de seus pontos; segue que basta conhecer dois valores da f,

$f(x_1)$ e $f(x_2)$, em dois números distintos x_1 e x_2 (arbitrários) e assim f fica inteiramente determinada.

Proprosição 2.1. *Dados arbitrariamente* (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, *com* $x_1 \neq x_2$, *existe uma, e somente uma, função afim* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x_1) = y_1$ *e* $f(x_2) = y_2$.

Prova: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função afim tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$ e $x_1 \neq x_2$. Mostraremos que f é escrita de maneira única na forma $f(x) = ax + b$ e para isso precisamos determinar de forma única a e b. Mas de $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$ obtemos o sistema:

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1, \\ ax_2 + b &= y_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

As incógnitas do sistema são a e b. Desde que o determinante da matriz dos coeficientes associado ao sistema é $x_1 - x_2$ e desde que $x_1 \neq x_2$, o determinante é diferente de zero e o sistema possui solução única, dada por:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Mostramos que o gráfico de uma função afim é uma reta. Além disso, é possível mostrar que toda reta r, não vertical, é o gráfico de uma função afim. Este problema está proposto como uma atividade. Assim dada a função afim $f(x) = ax + b$ o seu gráfico é a reta com equação $ax + b = 0$. Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), com os valores das constantes a e b determinadas na prova da Proposição 2.1, obtemos que a equação da reta que passa por esses dois pontos é:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ou

$$y = y_2 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2).$$

a primeira equação nos informa que se começamos no ponto (x_1, y_1) e caminharmos sobre a reta, fazendo x variar, a ordenada y começa com o valor y_1 e sofre um incremento igual ao incremento $x - x_1$ dado a x, vezes a taxa de variação

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

A interpretação da segunda equação é análoga.

Comentário sobre Terminologia: Destacamos algumas observações sobre a terminologia. Considere a função afim $f(x) = ax+b$. Não é considerado adequado chamar o número a de coeficiente angular da função f e sim, devemos chamá-lo de taxa de variação. Isto se deve, pois em geral não há ângulo no problema estudado. O termo coeficiente angular usa-se quando estamos considerando a equação de uma reta. Também não é adequado chamar função afim de *função do primeiro grau*, mesmo que a expressão que representa a função $f(x) = ax + b$ é um polinômio de primeiro grau (quando $a \neq 0$). Função não tem grau.

Antonio Trajano em a Aritmética Progressiva (1883), dá a seguinte definição para grandezas proporcionais:
Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo caso, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

2.3 Função Linear

Uma função linear é um caso particular de uma função afim, mais especificamente no caso em que $b = 0$ e desta maneira uma função linear é dada pela fórmula $f(x) = ax$. O conceito de função linear está estritamente ligado ao conceito de proporcionalidade. Usaremos o conceito de proporcinalidade apresentado por Elon L. Lima, o qual é uma versão moderna da definição de Antonio Trajano (1983).

Definição 2.2. Uma proporcionalidade é uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, pra quaisquer números reais x e c, tenhamos $f(cx) = cf(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(cx) = f(x)/c$ (proporcionalidade inversa).

Exemplo 2.3. Uma firma asfaltou uma estrada de 36 km em 14 horas. Quantos dias seriam necessários para esta mesma firma, nas mesmas condições, asfaltar 54 km. E em quantos dias asfaltaria x km? Denotamos por $f(x)$ o número de dias necessários para asfaltar x km de estrada. Observe que para construir 36 km são necessários 14 dias, logo para construir 1 km são necessários 14/36 dias. Logo para construir xkm desta estrada são necessários $f(x) = \frac{14}{36}x$ dias. ainda, se multiplicarmos o número de quilômetros por $n \in \mathbb{N}$, teremos $f(xn) = \frac{14}{36}xn = nf(x)$, mostrando que f é uma proporcionalidade.

Proprosição 2.2. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma proporcionalidade (direta) então temos que para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, onde $a = f(1)$.*

Prova: Da definição de proporcionalidade (direta) $f(cx) = cf(x)$, para todo c e todo x, então escrevendo $a = f(1)$, tem-se $f(c) = f(c.1) = cf(1) = ca$, ou seja $f(c) = ac$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Logo usando a notação mais comum, temos que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, portanto f é uma função linear. ∎

Em outras palavras, a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x qaundo existe uma constante a (chamada a *constante de proporcionalidade*) tal que $y = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.4. No Exemplo 2.3, a proporcionalidade (comprimento da estrada) $\longrightarrow$ (dias necessários para asfaltá-la) tem fator de proporcionalidade $k = 14/36$.

Nem sempre a constante de proporcionalidade a é explicita. Mas nos problemas relativos à proporcionalidade, o que importa é saber que se $y = f(x)$ e $y' = f(x')$ então $y'/x' = y/x$ é constante. Vejamos um exemplo deste fato.

Exemplo 2.5. Considere o triângulo de vértices A, B e C e sejam X e Y pontos sobre o segmento AB e AC respectivamente de modo que o segmento XY é paralelo ao segmento BC. Pelo Teorema de Tales, o comprimento y do segmento AY é proporcional ao comprimento x do segmento AX. Mas qual seria a constante de proporcionalidade?

O teorema de Tales afirma que quando duas retas transversais cortam um feixe de retas paralelas, as medidas dos segmentos delimitados pelas transversais são proporcionais.

A questão que surge neste momento é saber quando a correspondência $y \longmapsto x$ é uma proporcionalidade? Pela definição que temos, teríamos que verificar que $f(cx) = cf(x)$ para todos os valores de $c, x \in \mathbb{R}$, e em particular para todo c. Mas há uma dificuldade de verificar este fato quando c é um número inteiro ou irracional. O teorema que apresentamos abaixo determina quando uma função é linear. Começamos, lembrando alguns conceitos sobre funções.

Observação 2.1. Lembremos que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$ chama-se:

(a)- *Crescente* quando $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

(b)- *Monótona não-decrescente* quando $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

(c)- *Monótona não-crescente* quando $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;

Em qualquer dos quatro casos dizemos que f é *monótona*. Nos casos (a) e (b) diz-se que f é *estritamente monótona* e nestes casos f é injetiva.

Teorema 2.1. Teorema Fundamental da Proporcionalidade. *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = nf(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$.

(2) *Sendo* $a = f(1)$, *tem-se* $f(x) = ax$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(3) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

Prova: Vamos mostrar que (1) $\Longrightarrow$ (2), (2) $\Longrightarrow$ (3) e (3) $\Longrightarrow$ (1). Provamos primeiramente que (1) $\Longrightarrow$ (2), e começamos provando que para todo racional $r = m/n$, a hipótese (1) implica que $f(rx) = rf(x)$ para todo número racional r e $x \in \mathbb{R}$. De fato,

$$n.f(rx) = f(nrx) = f(mx) = m.f(x),$$

logo

$$f(rx) = \frac{m}{n} f(x) = rf(x).$$

Ainda, sendo $a = f(1)$ e desde que $f(0) = 0$ (pois f(0)=f(0.0)=0.f(0)), a monotocidade de f nos dá $a = f(1) > f(0) = 0$. Além disso, $f(r) = f(r.1) = r.f(1) = ar$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.
Mostramos agora que $f(ax) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha por absurdo que exista um número real (necessariamente irracional) tal que $f(x) \neq ax$. Suponhamos, sem perda de generalidade que $f(x) > ax$. (O caso em que $f(x) < ax$ é tratado de modo análogo.)
Temos

$$\frac{f(x)}{a} > x.$$

Seja $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{f(x)}{a} > r > x.$$

Então $f(x) > ar > ax$, ou seja, $f(x) > f(r) > ax$. Mas isto é um absurdo, pois f é crescente logo, como $r > x$, deveríamos ter $f(r) > f(x)$. Isto completa a prova de (1) $\Longrightarrow$ (2).

Para provar que (2) $\Longrightarrow$ (3), observe que assumindo (2), $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.

Assuma a hipótese (3). Seja $n \in \mathbb{N}$ então segue que $f(nx) = f(x + x + \ldots x)$ e aplicando sucessivas vezes $f(x + x) = f(x) + f(x)$ obtemos que $f(nx) = nf(x)$. O caso em que n é um inteiro negativo segue de maneira semelhante. Assim prova-se que (3) $\Longrightarrow$ (1). ∎

Observação 2.2. As vezes o teorema da proporcionalidade deve ser aplicado a grandezas, cujas medidas são expressas por números positivos. Neste caso devemos introduzir a função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(0) = 0$, $F(x) = f(x)$ e $F(-x) = -f(x)$ para todo $x > 0$ e aplicamos o teorema para F obtendo condições equivalentes a (1), (2) e (3) para f. Como consideramos a função f crescente temos que $a = f(1) > 0$, mas poderíamos supor que f é decrescente com a única diferença que teríamos $a < 0$.

Exemplo 2.6. Suponhamos que investimos uma quantia x em uma aplicação financeira. Depois de um certo tempo temos um montante $f(x)$. É evidente que $f(x)$ é uma função crescente em x, pois quanto maior o capital aplicado, maior será o montante final. Mostramos agora que $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, se aplicarmos um capital $x' = nx$ (um capital n vezes o capital x) e se fizermos n aplicações do capital x numa mesma data, obteremos no final um mesmo montante.

2.4 Caracterização da Função Afim

Um problema que surge nos problemas práticos é saber, se numa determinada situação, o modelo matemático a ser adotado é uma função afim. O próximo teorema caracteriza uma função afim.

Teorema 2.2. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ um função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \psi(h)$ depender apenas de h e não de x, então f é uma função afim.*

Prova: Suponhamos que f seja uma função crescente (caso de f ser descrescente se mostra de maneira análoga) e então $\psi(h)$ também é uma função crescente em h. De fato, Se $h_1 < h_2$ então $f(x+h_1) < f(x+h_2)$ pois $x+h_1 < x+h_2$ e f é crescente e assim $= \psi(h_1) = f(x+h_1) - f(x) < f(x+h_2) - f(x) = \psi(h_2)$. Além disso $\psi(0) = 0$. Sejam $h, k \in \mathbb{R}$ arbitrários. Então

$$\begin{aligned}
\psi(h+k) &= f(x+h+k) - f(x) \\
&= f((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x) \\
&= \psi(h) + \psi(k)
\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Proporcionalidade, pondo $a = \psi(1)$, tem-se $\psi(h) = ah$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Assim

$$f(x+h) - f(x) = ah$$

. Chamando $b = f(0)$ e fazendo $x = 0$ na ultima equação, obtemos $f(h) = ah + b$ e, com uma mudança de variável, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ∎

Uma maneira natural de dizermos que $f(x+h) - f(x)$ não depende de x é dizendo "à acréscimos iguais de x correspondem acréscimos iguais em $f(x)$", ou de outra maneira, acréscimos sofridos por $f(x)$ são proporcionais aos acréscimos dados a x.

Exemplo 2.7. Suponhamos que uma partícula se move sobre uma linha reta e sua posição é $s(t)$, dada no instante t. O movimento se diz *uniforme* quando a partícula se desloca sempre no mesmo sentido (ou seja a função s é monótona) e, além disso a partícula percorre espaços iguais em tempos iguais. Ou seja, $s(t+h)-s(t)$ que é o espaço percorrido no tempo h, a partir da posição $s(t)$, depende apenas do acréscimo h e não de t. Desta forma, s é uma função afim e portanto $s(t) = at + b$, onde $a = s(t+1) - f(t)$ o espaço percorrido na unidade de tempo, chama-se *velocidade* e $b = s(0)$ é a *posição inicial.*

Existe uma conexão interessante entre funções afim e progressões aritméticas. Uma *Progressão Aritmética* pode ser vista geométricamente como uma seqüência de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ igualmente espaçadas na reta. Isto quer dizer que se h é a razão, $h = x_{i+1} - x_i$, nào depende de i.

Proprosição 2.3. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função afim e $x_1, x_2, \ldots,$ $x_i, \ldots$ uma progressão aritmética. Então $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_i), \ldots$ também formam uma progressão aritmética.*

Prova: Seja $y = f(x) = ax + b$ a função afim e $h = x_{i+1} - x_i$ a razão da progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$. Temos que:

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = y_{i+1} - y_i = ax_{i+1} + b - (ax_i + b) = a(x_{i+1} - x_i) = ah.$$

Logo a sequência de pontos $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_i = f(x_i), \ldots$ está igualmente espaçada em ah unidades e portanto forma uma progressão aritmética de razão ah. ∎

Um resultado recíproco também é verdadeiro, como mostra a proposição:

Proprosição 2.4. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona que transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ numa progressão aritmética $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_i = f(x_i), \ldots$. Então f é uma função afim.*

Prova: Construímos uma função auxiliar $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(0)$. Então $g(0) = 0$ e g transforma toda progressão aritmética noutra progressão aritmética. De fato, se $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ é uma progressão aritmética de razão h então:

$$\begin{aligned} g(x_{i+h}) - g(x_i) &= f(x_{i+h}) - f(0) - (f(x_i) - f(0)) \\ &= f(x_{i+h}) - f(x_i) = h_1, \end{aligned}$$

pois $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_i = f(x_i), \ldots$ é uma progressão aritmética por hipótese. Mostramos agora que g é linear. Para todo real x, os números $-x, 0, x$ formam uma progressão aritmética, logo o mesmo ocorre com os números $g(-x), 0, g(x)$. Desta maneira temos que $-g(x) = g(-x)$ (pois a distância entre os pontos $g(-x)$ e 0 e 0 e $g(x)$ são as mesmas e portanto $g(-x)$ e $g(x)$ são simétricos em relação a origem). Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então os números $0, x, 2x, \ldots, nx$ formam uma progressão aritmética, o mesmo ocorrendo com os números $g(0) = 0, g(x), g(2x), \ldots, g(nx)$, cuja razão é $g(x)$. Segue então do termo geral de uma progressão aritmética que $g(nx) = g(0) + ng(x) = ng(x)$. Se n é inteiro negativo, então $-n \in \mathbb{N}$ e $g(nx) = -g(-nx) = -(-ng(x)) = ng(x)$ e assim $g(nx) = ng(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Pelo Teorema da Proporcionalidade, segue que g é linear e desta forma, $g(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pondo $b = f(0)$, obtemos:

$$f(x) = g(x) + f(0) = ax + b,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. ∎

2.5 Conclusão

Nesta aula, definimos função afim e estudamos alguns casos particulares como o caso da função linear. O conceito de função linear está estritamente ligado ao conceito de proporcionalidade. Mostramos, através do Teorema da Proporcionalidade como ter certeza que a correspondência $x \longmapsto y$ é uma proporcionalidade e este teorema ainda é útil para mostrar outros resultados importantes sobre funçào afim. Terminamos a aula caracterizando as funções afim, ou seja apresentando um teorema que permita saber, se numa dada situação o modelo matemático a ser usado é o da função afim.

RESUMO

Função Afim

Definição: Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Uma função linear é um caso particular de uma função afim, mais especificamente no caso em que $b \neq 0$ e desta maneira uma função linear é dada pela fórmula $f(x) = ax$.

Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Sendo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Caracterização da Função Afim: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ um função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h)-f(x) = \psi(h)$ depender apenas de h e não de x, então f é uma função afim.

Funções Afim e Progressões Aritméticas Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função afim e $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ uma progressão aritmética. Então $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_i), \ldots$ também formam uma progressão aritmética.

Proposição Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona que transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ numa progressão aritmética $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_i = f(x_i), \ldots$. Então f é uma função afim.

ATIVIDADES

..

Atividade. 2.1. Mostre que uma função afim é crescente quando $a > 0$, decrescente quando $a < 0$ e cosntante quando $a = 0$.

Atividade. 2.2. Mostre que toda reta não-vertical é o gráfico de uma função afim.

Atividade. 2.3. No enunciado do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, foi feita a hipótese de que a função f fosse monótona. Mostre o mesmo teorema assumindo a hipótese que f é contínua. bf obs: *Note que a monotocidade, na demonstração só foi usada para provar que* $f(ar) = ar$ *para todo* $r \in \mathbb{Q}$ *e então* $f(ax) = ax$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Admita que* f *é contínua e conclua que* $f(ax) = ax$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Atividade. 2.4.

As leis da física, muitas vezes descrevem relações de proporcionalidade direta ou inversa entre grandezas. Para cada uma das leis abaixo, escreva a expressão matemática correspondente.

(a)- (*Lei de gravitação universal*) Matéria atrai matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado das distâncias.

(b)- (*Gases perfeitos*) A pressão exercida por uma determinada massa de um gás é diretamente proporcional à temperatura absoluta e inversamente proporcional ao volume ocupado pelo gás.

(c)- (*Resistência Elétrica*) A resistência de um fio condutor é diretamente proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional à área de sua seção reta.

(d)- (*Dilatação térmica*) A dilatação térmica sofrida por uma barra é diretamente proporcional ao comprimento da barra e à varaição de temperatura.

Atividade. 2.5. As grandezas X e Y são inversamente proporcionais. Se X sofre um acréscimo de 25%, qual a variação percentual sofrida por Y.

Atividade. 2.6.

Os termos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de uma P.A são os valores $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ de uma função afim.

(a)- Mostre que cada a_i é igual a área de um trapézio delimitado pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas retas verticais de equação $x = i - 1/2$ e $x = i + 1/2$.

(b)- Mostre que a soma $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ é igual a área do trapézio delimitado pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas retas verticais $x = n - 1/2$ e $x = n + 1/2$.

(c) Conclua que $S = \frac{a_1+a_n}{2}n$.

Atividade. 2.7. As grandezas X e Y são inversamente proporcionais. Se X sofre um acréscimo de 25%, qual a variação percentual sofrida por Y.

Atividade. 2.8. Dada as progressões aritméticas

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \qquad (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots),$$

mostre que existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2, \ldots$, $f(a_n) = b_n$, $\ldots$.

Atividade. 2.9. Defina uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $f(x) = 2x$ se x é racional e $f(x) = 3x$ se x for irracional. Mostre que se tem $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$, mas f não é linear.

Atividade. 2.10. Prove que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 7x + \operatorname{sen}(2\pi x)$ é crescente e, para todo $x \in \mathbb{R}$ fixado, transforma a progressão aritmética $x, x+1, x+2, \ldots$ numa progressão aritmética. Entretanto, f não é afim.

REFERÊNCIAS BILBIOGRÁFICAS

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.