AULA

Funções Quadráticas

3

META:

Definir e identificar uma função quadrática.

OBJETIVOS:

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de: Definir função quadrática.

Entender como surgiu o estudo de funções quadráticas ao longo da história.

PRÉ-REQUISITOS

Resolução de sistemas lineares e critérios de colinearidade de pontos no plano.

3.1 Introdução

O estudo das funções quadráticas vem de longa data. Sua natureza, está ligada ao estudo da equação quadrática como também ao estudo de seu gráfico, o qual é uma parábola.

3.2 Função Quadrática

Definição 3.1. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Os coeficientes a, b e c da função quadrática ficam inteiramente determinados pelos valores que esta função assume. Assim se $ax^2 + bx + c = a_1x^2 + b_1x + c + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$ então $a = a_1$, $b = b_1$ e $c = c_1$. Este fato é fácil de ser verificado e deixaremos como uma atividade.

Observação 3.1. Um *trinômio do segundo grau* é uma expressão formal do tipo $aX^2 + bX + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. A palavra "formal"usada na definição é para dizer que a letra X é apenas um símbolo, sendo X^2 um modo de escrever XX. Dois trinômios $aX^2 + bX + c$ e $a_1X^2 + b_1X + c_1$ são iguais se $a = a_1$, $b = b_1$ e $c = c_1$. Mais ainda, um trinômio pode ser identificado por uma terna de números reais (a, b, c). Assim podemos identificar um trinômio do segundo grau com uma função quadrática. Acada trinômio corresponde a função quadrática definida por $x \longmapsto ax^2 + bx + c$. Pelas observações acima esta correspondência é biunívoca.

Proprosição 3.5. *Se duas funções quadráticas assumem os mesmos valores em três pontos distintos x_1, x_2 e x_3, então estas funções* *são iguais , isto é, assumem o mesmo valor para qualquer número real x.*

Prova: Consideramos as funções $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c$ duas funções quadráticas que assumem os mesmos valores $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$, para três números distintos x_1, x_2 e x_3. Temos que $f(x_1) - g(x_1) = 0$, $f(x_2) - g(x_2) = 0$ e $f(x_3) - g(x_3) = 0$. Isto significa que:

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c - (a'x_1^2 + b'x_1 + c') = 0. \\ ax_2^2 + bx_2 + c - (a'x_2^2 + b'x_2 + c') = 0. \\ ax_3^2 + bx_3 + c - (a'x_3^2 + b'x_3 + c') = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Agora definindo $\alpha = a - a'$, $\beta = b - b'$ e $\gamma = c - c'$. Assim o sistema (3.2) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0. \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0. \\ \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Subtraindo a primeira equação de cada uma das outras do sistema (3.3), vem:

$$\begin{aligned} \alpha(x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1) = 0. \\ \alpha(x_3^2 - x_1^2) + \beta(x_x - x_1) = 0. \end{aligned}$$

Como $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$, podemos dividir a primeira destas equações por $x_2 - x_1$ e a segunda $x_3 - x_1$, obtendo

$$\begin{aligned} \alpha(x_1 + x_2) + \beta = 0. \\ \alpha(x_1 + x_3) + \beta = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Subtraindo membro a membro do sistema (3.4), temos que $\alpha(x_3 - x_2) = 0$. Como $x_3 - x_2 \neq 0$, resultta que $\alpha = 0$. Substituindo nas equações anteriores, obtemos sucessivamente $\beta = 0$ e $\gamma = 0$. ∎

Mais geralmente, dados arbitrariamente os números reais y_1, y_2 e y_3, existe um, e somente um terno ordenado de números a, b, c tais que

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1. \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2. \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Observe que neste sistema as incógnitas são a, b e c. Aplicando os mesmos passos da proprosição acima é possível resolver este sistema. Deixaremos esta tarefa como atividade. Em particular, ao resolver os sistema acima obtemos o seguinte valor para a incógnita a.

$$a = \frac{1}{x_3 - x_2}\left[\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right] \tag{3.6}$$

Proprosição 3.6. *Sejam x_1, x_2, x_3 três números reais distintos e y_1, y_2, y_3 números tais que os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ são não-colineares em $\mathbb{R}^2$. Existe uma, e somente uma, função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.*

Prova: Dados três números reais distintos x_1, x_2 e x_3 e três números reais arbitrários y_1, y_2 e y_3, existe apenas um terno de números a, b, c tais que a função

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

compre $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$. Porém esta função pode não ser quadrática, a menos que tenhamos $a \neq 0$. Pela expressão obtida para a incógnita a na equação (3.6), o valor de a é zero se, e somente se, tivermos

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{3.7}$$

Se considerarmos os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ em $\mathbb{R}^2$, a condição da equação (3.7) significa que as retas AC e AB têm a mesma inclinação, isto é, os pontos A, B e C são colineares.

Observação 3.2. Dados os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ distintos em $\mathbb{R}^2$ a condição apresentada nos textos escolares do ensino médio, para que estes pontos seja colineares é que

$$det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{3.8}$$

Resolvendo este determinante obtemos $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0$, que é equivalente a equação (3.7). Ou seja, a mesma condição de colinearidade para os pontos A, B, C que obtemos, com a vantagem que não requer o conhecimento de determinantes.

3.2.1 Um problema Antigo

Encontrar as raízes da equação do segundo grau $x^2 - sx + p = 0$ é um conhecimento milenar. Porém até o século XVI não se usavam fórmulas para tal, pois não se representavam por letras os coeficientes da equação. Isto começou a ser feito por *François Viète* (1540-1603).

Um problema muito antigo, que data de mais de quatro mil anos é encontrar dois números conhecendo-se sua soma e seu produto. Em termos geométricos, este problema pode ser posto em encontrar os lados de um retângulo, conhecendo o semi-perímetro s e a área p. Chamamos um dos números de x, logo o outro número será $s - x$ (pois a soma dos dois deve ser s). Assim o produto é dado por

$$p = x(s - x) = sx + x^2,$$

logo teremos que

$$x^2 - sx + p = 0 \tag{3.9}$$

e assim os números procurados são as raízes da equação (3.9). Observe que se o número α é raíz desta equação, então o número $\beta = s - \alpha$ também é. Para isto basta mostrar que β também é raíz da equação (3.9). Deixaremos este fato como atividade para o leitor.

A regra para encontrar dois números cuja soma e cujo produto são dados era enunciada pelos bablilônios da seguinte maneira:

Eleve ao quadarado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raíz quadrada da diferença. Some o resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.

Na notação moderna, esta regra fornece as raízes

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \qquad e \qquad s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

para a equação $x^2 - sx + p = 0$. Uma explicação de como se chegou a esta conclusão, acreditá-se ser dada assim:

Seja α e β os números procurados e digamos que $\alpha < \beta$. Estes números são equidistantes de sua média aritmética $\frac{s}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Se conhecermos a diferença $d = \beta - (s/2) = (s/2) - \alpha$ teremos os dois números $\alpha = (s/2) - d$ e $\beta = (s/2) + d$. Mas observe que

$$p = \alpha\beta = \left(\frac{s}{2} - d\right)\left(\frac{s}{2} + d\right) = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d^2,$$

logo

$$d^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p \qquad e \qquad d = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Assim

$$\alpha = (s/2) - d = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p},$$

e

$$\beta = (s/2) + d = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Como os dados do problema s e p eram sempre positivos, os Babilônios nunca tiveram a preocupação com eventuais soluções negativas fornecidas por esta regra. Porém em casos, como por exemplo de encontrar dois números cujos produto e soma são ambos iguais a 2, eles afirmavam simplesmente que tais números não existiam, o que é verdade no âmbito dos números reais.

Observação 3.3. Se procurarmos dois números cuja soma é 6 e cujo produto é 9, obteremos 3 e 3. Para não necessitarmos no enunciado fazer esta distinção, usamos a notação de costume, segunda a qual palavra dois significa "dois ou um". Quando quisermos garantir que significa "dois", diremos "dois números distintos".

RESUMO

..

Definição: Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2+bx+c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

O resultado, mais importante, visto nesta seção é que se são dados três pontos não colineares $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ são em $\mathbb{R}^2$ então existe uma, e somente uma, função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

ATIVIDADES

..

Atividade. 3.1. Se $ax^2 + bx + c = a_1x^2 + b_1x + c + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mostre que então $a = a_1$, $b = b_1$ e $c = c_1$.

Atividade. 3.2. Dados arbitrariamente os números reais y_1, y_2 e y_3, prove que existe um, e somente um terno ordenado de números a, b, c tais que

$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1.$$
$$ax_2^2 + bx_2 + c = y_2.$$
$$ax_3^2 + bx_3 + c = y_3$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.