AULA

4

Gráfico da Função Quadrática

META:

Obter propriedades das funções quadráticas e esboçar seu gráfico.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Esboçar o gráfico de uma função quadrática.

Provar a relação para as raízes de uma equação quadrática.

Estudar o movimento uniformemente variado através de uma função quadrática.

PRÉ-REQUISITOS

Definição e propriedades da função quadrática.

4.1 Introdução

Nesta seção vamos discutir e deduzir a forma canônica da equação quadrática, a qual permite provar que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Também vamos mostrar aplicações da função quadrática.

4.2 Forma Canônica do Trinômio

Considere o trinômio

$$ax^2 + bx + c.$$

Considerando $a \neq 0$ e dividindo esta equação por a, obtemos:

$$ax^2 + bx + c = a\Big[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\Big].$$

As duas primeiras parcelas do colchete são as mesmas do desenvolvimento do quadrado $\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2$. Assim completando quadrado, podemos escrever

$$ax^2 + bx + c = a\Big[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\Big],$$

ou

$$ax^2 + bx + c = a\Big[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\Big]. \qquad (4.10)$$

Esta maneira de escrever o trinômio do segundo grau é chamada de *forma canônica.*

Proprosição 4.7. *As raízes da equação $ax^2+bx+c = 0$ são dadas por:*

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad e \qquad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Prova: Sendo $a \neq 0$, temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\iff \left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2+\tfrac{4ac-b^2}{4a^2}=0 && (1)\\ &\iff \left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2=\tfrac{b^2-4ac}{4a^2} && (2)\\ &\iff \left(x+\tfrac{b}{2a}\right)=\pm\tfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && (3)\\ &\iff x=\tfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. && (4) \end{aligned}$$

∎

A passagem da linha (2) para a linha (3) só tem sentido quando

$$b^2-4ac := \Delta \tag{4.11}$$

chamado de *discriminante* é maior ou igual a zero ($\Delta \geq 0$). Caso tenhamos $\Delta < 0$, a equivalência entre as linhas (1) e (2) significa que a equação dada não possui solução real, pois o quadrado $x+\frac{b}{2a}$ não pode ser negativo.

Da fórmula (4) segue imediatamente que, se o discriminante $\Delta = b^2-4ac$ é positivo, a equação

$$ax^2+bx+c=0.$$

tem duas raízes distintas

$$\alpha=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad e \qquad \beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},$$

com $\alpha < \beta$, cuja soma é $s=-b/a$ e cujo produto é

$$p=(b^2-\Delta)/4a^2=4ac/4a^2=c/a.$$

Em particular, a média aritmética das raízes é $-b/2a$ e desta maneira, as raízes α e β estão equidistante do ponto $-b/2a$. Quando $\Delta=0$, a equação dada possui somente uma raíz, chamada de *raíz dupla*, igual a $-b/2a$.

Proprosição 4.8. *Seja* $f(x) = ax^2+bx+c$ *uma função quadrática. Se* $a > 0$ *então a função assume um menor valor no ponto* $x = -\frac{b}{2a}$ *e se* $a < 0$ *a função assume um valor máximo em* $x = -\frac{b}{2a}$.

Prova: Suponhamos que $a > 0$. A forma canônica

$$ax^2 + bx + c = a\Big[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\Big].$$

exibe no interior do colchetes, uma soma de duas parcelas. A primeira depende de x e é sempre maior ou igual a zero. A segunda é constante. Segue que o menor valor dessa soma é atingido quando

$$\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 = 0,$$

ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$. Neste ponto, $f(x)$ também assume seu valor mínimo $f(-b/2a) = c - \frac{b^2}{4a}$. Quando $a < 0$, o valor $f(-b/2a) = c - \frac{b^2}{4a}$é o maior valor dos números $f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. ∎

Ainda usando a forma canônica, vemos que quando $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ não assume valor máximo, ou seja, é uma função ilimitada superiomente. Analogamente, quando $a < 0$, $f(x)$ não assume um valor mínimo, sendo portanto, ilimitada inferiormente. Outro resultado que caracteriza a função quadrática, que segue da forma canônica é o seguinte

Proprosição 4.9. *Seja* $f(x) = ax^2+bx+c$ *uma função quadrática e* x *e* x' *dois pontos equidistantes de* $-b/2a$. *Então* $f(x) = f(x')$.

Prova: Olhando para a forma canônica (4.16), vemos que $f(x) = f(x')$ se, e somente se,

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = (x' + \frac{b}{2a})^2,$$

e como estamos considerando $x \neq x'$, da equação acima, segue que

$$x' + \frac{b}{2a} = x + \frac{b}{2a},$$

isto é,

$$\frac{x + x'}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

∎

4.3 Gráfico da Função Quadrática

Nesta seção vamos mostrar um resultado já conhecido, que nos diz que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Lembramos inicialmente a definição da parábola como o lugar geométrico de pontos no plano.

Definição 4.1. Seja d uma reta no plano e F um ponto fora desta reta. A Parábola de foco F e reta diretriz d é o conjunto de pontos do plano que distam igualmente de F e d. Ou seja, se $P = (x, y)$ é um ponto da Parábola, necessariamente

$$d(P, d) = d(P, F).$$

A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco F, chama-se *eixo da parábola.* O ponto mais próximo da diretriz chama-se *vértice da parabola.* Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz. Lembramos que a distância de um ponto a uma reta é o comprimento do segmento perpendicular baixado do ponto sobre a reta.

Exemplo 4.1. Seja $f(x) = x^2$. Então o gráfico de f é a parábola cujo foco é o ponto $F = (0, 1/4)$ e cuja reta diretriz é a reta

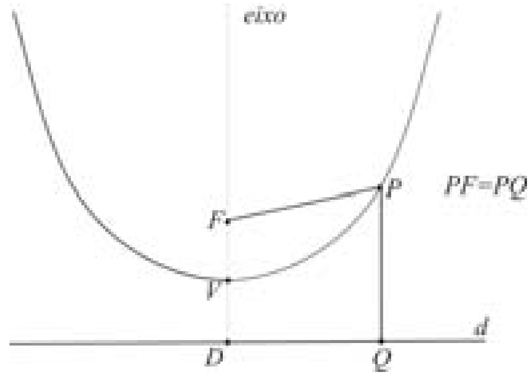
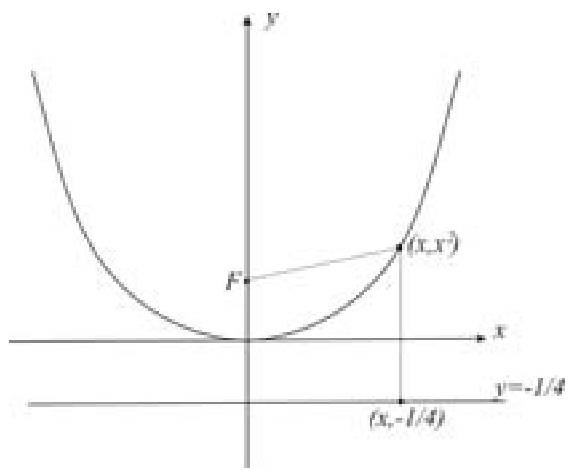


Figura 4.1: Elementos da Parábola.

horizontal $y = -1/4$. De fato, a distância de um ponto qualquer $P = (x, x^2)$ do gráfico de f ao ponto $F = (0, 1/4)$ é

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1/4))^2}.$$



A distância do mesmo ponto $P = (x, x^2)$ à reta $y = -1/4$ é

$$d(P, d) = x^2 + 1/4,$$

pois observe que a reta perpendicular a $y = -1/4$ baixada de P, intersecta a reta $y = -1/4$ em um ponto $Q = (x, -1/4)$ que tem a mesma abcissa que P. Logo a distância entre P e a reta $y = -1/4$ é a distância entre os pontos P e Q, ou seja $x^2 + 1/4$. Como se trata de dois números positivos, para verificarmos a igualdade $d(P, d) = d(P, F)$, basta ver que seus quadrados são iguais, o que de fato é verificado.

Observe que estamos usando o seguinte resultado: Sejam $x, y \in \mathbf{R}^+$, ou seja, $x > 0$ e $y > 0$ reais. Então $x = y$ se, e somente se, $x^2 = y^2$.

Exemplo 4.2. Seja $f(x) = ax^2$ com $a \neq 0$. Então o gráfico desta função quadrática é a parábola cujo foco é $F = (0, 1/4a)$ e cuja reta diretriz é a reta horizontal $y = -1/4a$. De fato, a distância de um ponto qualquer $P = (x, ax^2)$ do gráfico de f ao ponto $F = (0, 1/4a)$ é

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + (ax^2 - 1/4a))^2}. \tag{4.12}$$

Enquanto que a distância do ponto $P = (x, ax^2)$ do gráfico de f a reta $y = -1/4a$ é dada por

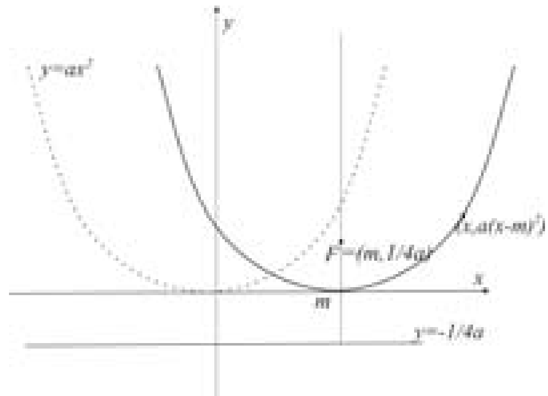
$$d(P, d) = (ax^2 + 1/4a). \tag{4.13}$$

e agora observamos que $x \in \mathbb{R}$ vale a seguinte igualdade:

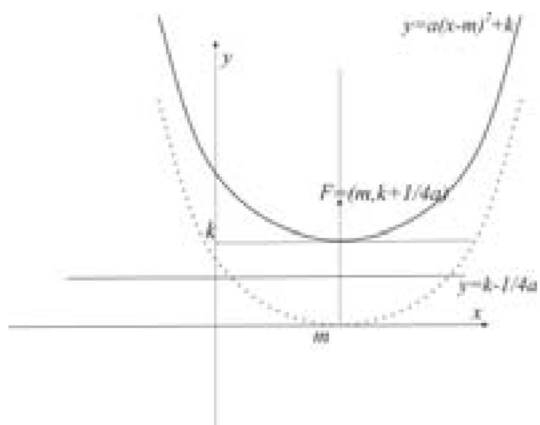
$$x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2,$$

onde o primeiro termo é o quadrado da distância $d(P, F)$ e o segundo o quadrado da distância $d(P, d)$. Conforme o caso em que $a > 0$ a concavidade da parábola é voltada para cima e quando $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo.

Exemplo 4.3. Seja $f(x) = a(x-m)^2$ com $a \neq 0$ e $m \in \mathbb{R}$ qualquer. Então o gráfico da função quadrática f é uma parábola cujo foco é o ponto $F = (m, 1/4a)$ e cuja reta diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$. Para verificar este fato observamos que o gráfico de $f(x) = a(x - m)^2$ resulta do gráfico de $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \longmapsto (x+m, y)$, a qual leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$.



Exemplo 4.4. Dados $a, m, k \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é uam parábola cujo foco é $F = (m, k + \frac{1}{4a})$ e cuja reta diretriz é a reta horizontal $y = k - \frac{1}{4a}$. Para verificar este fato, observe que o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é obtido do gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2$ por meio da translação vertical $(x, y) \longmapsto (x, y + k)$, que leva o eixo OX na reta $y = k$ e a reta $y = -\frac{1}{4a}$ na reta $y = k - \frac{1}{4a}$.



Proprosição 4.10. *O gráfico da função quadrática* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, com* $a \neq 0$ *é uma parábola cujo foco é o ponto* $F = (\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2+1}{4a})$ *e cuja reta diretriz é a reta horizontal* $y = \frac{4ac-b^2-1}{4a}$.

Prova: A forma canônica nos dá:

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + k,$$

onde $m = \frac{-b}{2a}$ e $k = (4ac - b^2)/4a$. Usando o Exemplo 4.4 concluímos a prova. ∎

O ponto mais próximo da diretriz é aquele cuja abcissa é $\bar{x} = -b/2a$. Neste ponto, $f(\bar{x})$ atinge seu valor mínimo quando $a > 0$ e seu valor máximo quando $a < 0$. Ainda quando $\bar{x} = -b/2a$, o ponto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ é o vértice da parábola que constitui o gráfico de $f(x)$. Observamos ainda que a reta vertical $x = -b/2a$ é chamada *eixo da parábola* e é um eixo de simetria do gráfico de f. De fato, provamos na aula anterior que que a função quadrática f assume valores iguais $f(x) = f(x')$ se, e somente se, $x = x'$.
O gráfico da função quadrática, é de vital importância para entendermos o comportamento desta função. Por exemplo os pontos deste gráfico onde a função intersecta o eixo OX são as raízes da equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Se denotarmos por α e β as abcissas destes pontos então a abcissa do vértice da parábola é o ponto médio do segmento $[\alpha, \beta]$.

Observação 4.1. Consideremos algumas observações sobre translações de gráficos de funções reais.

- Aplicando a translação horizontal $(x, y) \longmapsto (x + m, y)$ ao gráfico da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, obtém-se o gráfico da função

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(x) = f(x - m)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, todo ponto $(x, f(x))$ é levado pela translação no ponto $(x+m, f(x))$. Escrevendo $\bar{x} = x+m$ donde $x = \bar{x}-m$, vemos que a transformação leva cada ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f no ponto $(\bar{x}, f(\bar{x} - m)) = (\bar{x}, g(\bar{x}))$ do gráfico de g.

- A Translação vertical $(x, y) \longmapsto (x, y + k)$ transforma o gráfico da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no gráfico da função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $h(x) = f(x) + k$. Com efeito, esta transformação, leva cada ponto $(x, f(x))$ do gráfico de $f(x)$, no ponto $(x, f(x) + k) = (x, g(x))$ do gráfico da $g(x)$.

Mostraremos agora que a parábola que é o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é transformado no gráfico da função $h(x) = ax^2$ mediante a uma translação horizontal, seguida de uma translação vertical. De fato, dada a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

cujo gráfico é uma parábola e tem vértice cuja abcissa tem coordenada $m = -b/2a$, submetida a translação horizontal $(x, y) \longmapsto (x - m, y)$, determina uma nova parábola, cujo vértice tem abcissa zero e está sobre o eixo OY. Pelo que vimos anteriormente na Observação 4.1, esta nova parábola é o gráfico da função quadrática

$$\begin{aligned} g(x) = f(x - m) &= f(x - \tfrac{b}{2a}) \\ &= a\Big(x - \tfrac{b}{2a}\Big)^2 + b\Big(x - \tfrac{b}{2a}\Big) + c \\ &= ax^2 + k \end{aligned}$$

onde $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$. Em seguinda aplicamos a translação vertical $(x, y) \longmapsto (x, y + k)$, obtendo-se uma nova parábola cujo vértice agora é a origem $(0, 0)$. Segue da Observação 4.1 que esta parábola é o gráfico da função

$$h(x) = g(x) - k = ax^2 + k - k = ax^2.$$

Os gráficos das funções $f(x) = ax^2$ e $\psi(x) = -ax^2$ são congruentes, pois se usarmos a relexão em torno do eixo horizontal, ou seja, a transformação $(x, y) \longmapsto (x, -y)$, leva o gráfico de $\psi(x) = -ax^2$ no gráfico de $f(x) = ax^2$. Diante de tudo que discutimos acima, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proprosição 4.11. *Se $a = \pm a'$ então os gráficos das funções $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ são parábolas congruentes.*

Também vale a reciproca do resultado acima, ou seja, se os gráficos de $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ são parábolas congruentes então teremos $a = \pm a'$. Para verificar este fato, basta considerar as funções $f_1(x) = ax^2$ e $g_1(x) = a'x^2$,(pelo que já discutimos anteriormente, o gráfico da função f pode ser levado ao gráfico da função f_1, via translações, de modo que sejam congruentes) com $a > 0$ e $a' > 0$. Se $a \neq a'$ então ou $a > a'$ e então $ax^2 > a'x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou $a < a'$ e então $ax^2 < a'x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em ambos os casos teremos que as parábolas que são gráficos de f_1 e g_1 não são congruentes.

4.4 Aplicações

Nesta seção vamos apresentar dois exemplos que mostram a aplicabilidade e a importância da função quadrática.

4.4.1 Uma Propriedade da Parábola

Definição 4.2. Uma superfície parabólica ou parabolóide de revolução é a superfície obtida quando giramos uma parábola em torno do seu eixo.

Um exemplo do uso destas superfícies parabólicas, é dado pelas antenas parabólicas empregadas na rádio-astronomia ou até mesmo em aparelhos de televisão, onde estas refletem os sinais proviniente de um satélite sobre sua superfície, fazendo-os convergir para um único ponto, o foco e desta forma tornando o sinal mais forte.

Esta superfície possuí uma série de aplicações, decorrente de uma propriedade da parábola que vamos discutir nesta seção.

Começamos nossa discussão lembrando do princípio físico que estabelece que num raio refletido em uma superfície refletora, o ângulo de incidência é igual ao ângulo refletido. No caso da superfície parabólica, para entendermos os ângulos de incidência e refletido, substituímos esta superfície pela parábola obtida pela intersecção da superfície com o plano que contem o ângulo incidente, o ângulo refletido e o eixo de rotação. Observamos, que necessitamos definir o ângulo entre uma curva e uma reta. O ângulo entre uma curva e uma reta que se intersectam num ponto P, é por definição o ângulo entre esta reta e a reta tangente a esta curva no ponto P.

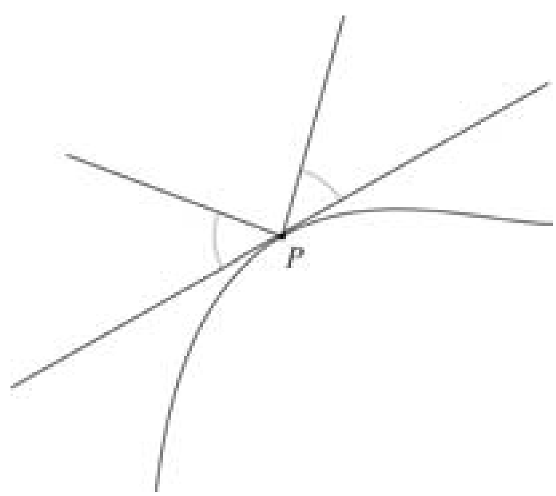


Figura 4.2: Ângulo entre uma reta e uma curva.

Proprosição 4.12. *Se a parábola é o gráfico da função* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, então a reta tangente a esta parábola no ponto* $P = (x_0, y_0)$ *é a reta que passa por este ponto e tem equação* $y = 2ax_0 + b$*.*

Lembramos que a reta tangente a uma parábola no ponto P é a reta que passa por este ponto e todos os demais pontos da parábola estão num mesmo lado desta reta. Vamos a demonstração da proposição.

Prova:

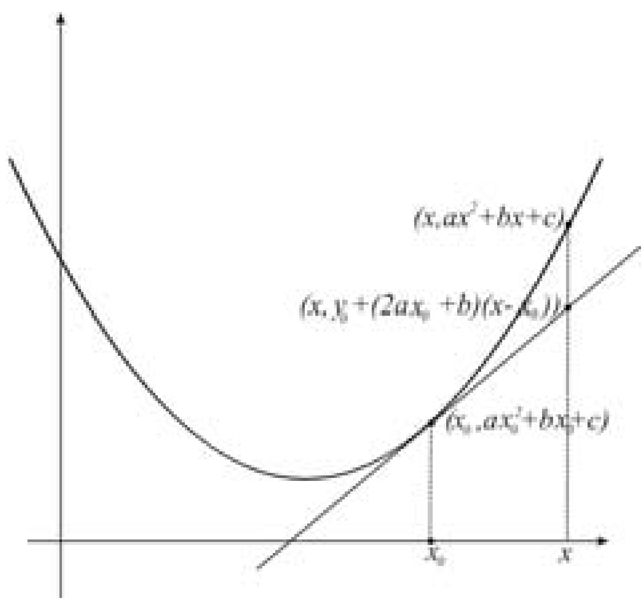


Figura 4.3: Equação da reta tangente a Parábola.

Suponhamos, sem perda de generalidade que $a > 0$. Lembramos que a reta que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0) = (x_0, ax_0^2 + bx_0 + c)$ e tem inclinação $2ax_0 + b$ tem equação

$$y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c.$$

Então segue que:

$$\begin{aligned} x \neq x_0 \quad &\Longrightarrow ax^2 + bx + c - [(2ax_0 + b)(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c] \\ &= a(x - x_0)^2 > 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que a reta que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e tem inclinação $2ax_0 + b$ é tal que para todo ponto de abcissa $x \neq x_0$ da parábola está acima da reta mencionada. Logo esta reta é tangente a parábola neste ponto. ∎

Como acabamos de ver na prova da proposição acima, se $a > 0$ então a parábola se situa acima de qualquer de suas tangentes e analogamente, se $a < 0$ ela se situa abaixo de qualquer uma de suas tangentes.

Consideremos a parábola que é o gráfico da função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

cuja tangente no ponto $P = (x, y)$ tem inclinação $2ax + b$. Seja s a reta que une o foco F ao ponto Q, pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz d. Vamos supor que $2ax + b \neq 0$, ou seja, $x \neq 2a/b$ e assim o ponto P não é o vértice da parábola. A inclinação da reta s é a fração cujo numerador é a diferença entre as ordenadas de Q e F e cujo denominador é a diferença entre as abcissas destes dois pontos. Vimos já que $F = (m, k + 1/4a)$ e $Q = (x, k - 1/4a)$, onde $m = -b/2a$ e $k =$ ordenada do vértice da parábola. Logo a inclinação de s é:

$$\frac{k - \frac{1}{4a} - \left(k + \frac{1}{4a}\right)}{x - m} = \frac{-1}{2a(x - m)} = \frac{-1}{2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)} = -\frac{1}{2ax + b}. \tag{4.14}$$

Isto mostra que a reta s é perpendicular à reta tangente à parabola no ponto P. Se P é o vértice da parábola ($x = -b/2a$) a reta s

seria vertical e a reta tangente no ponto P teria inclinação nula e logo seria horizontal e neste caso, também teríamos as duas retas perpendiculares.

As retas $y = ax = b$ e $y = a'x + b'$, com $a \neq 0$ e $a' \neq 0$, são perpendiculares se, e somente se, $a' = 1/a$.

Proprosição 4.13. *A tangente à parábola num ponto P faz ângulos iguais com a paralela ao eixo e com a reta que une o foco F a esse ponto.*

Prova: Seja Q o pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz. Pela definição da parábola, temos que $\bar{FP} = \bar{PQ}$ e desta forma o triângulo FQP é isósceles. Além disso, acabamos de ver que FQ é perpendicular à tangente, ou seja, a tangente é a altura deste triângulo isóceles, logo é também bissetriz. Logo os ângulos $F\hat{P}T'$ e $T'\hat{P}Q$ são iguais. Logo $F\hat{P}T'$=$T'\hat{P}Q = \alpha$. ∎

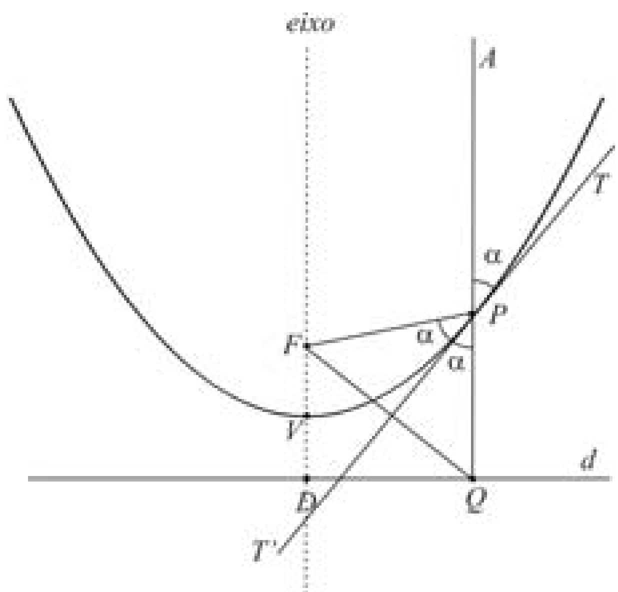


Figura 4.4: A tangente à parábola num ponto P faz ângulos iguais com a paralela ao eixo e com a reta que une o foco F a esse ponto.

No exemplo de uma antena parabólica, se esta estiver voltada para a posição do satélite, a grande distância faz com que os sinais emitidos por este seja trajetórias praticamente paralelas ao eixo da superfície da antena. Logo eles se refletem na superfície e convergem para o foco, de acordo com a proposição que acabamos de demonstrar.

4.4.2 O movimento uniformemente variado

Suponhamos que a posição de um corpo $f(t)$ no instante t é dada pela função quadrática

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c. \tag{4.15}$$

O movimento dado pela função dada pela Equação (4.15), é chamado de *movimento uniformemente variado.* A constante a chama-se *aceleração*, b é a *velocidade inicial* (no instante $t = 0$) e c é a *posição inicial* do corpo.

Em qualquer movimento, dado pela função f, o quociente

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{\text{espaço percorrido}}{\text{tempo percorrido}}$$

chama-se *velocidade média* do ponto no intervalo cujos extremos são t e $t + h$. No caso em que f é dada pela fórmula (4.15), a velocidade média do móvel entre os instantes t e $t + h$ é igual a $at + b + ah/2$. De fato:

$$\begin{aligned} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} &= \frac{\frac{1}{2}a(t+h)^2+b(t+h)+c-(\frac{1}{2}at^2+bt+c)}{h} \\ &= at + b + ah/2. \end{aligned}$$

Se tomarmos h cada vez menor, este valor se aproxima de $at + b$. Por isso diz-se que

$$v(t) = at + b$$

é a velocidade do ponto no instante t. Quando temos $t = 0$ temos $v(0) = b$, por isso b se chama a velocidade inicial. Além disso, vê-se que $a = [v(t+h) - v(t)]/h$ para quaisquer t, h, logo a aceleração constante a é a taxa de variação da velocidade. Por isso o movimento se chama uniformemente variado.(Uniformemente acelerado ou retardado, conforme v tenha o mesmo sinal de a (isto é, $t > -b/a$) ou v tenha sinal oposto ao de a (ou seja, $t < -b/a$)). Um exemplo prático do Movimento Uniformemente Variado é a queda de corpos no vácuo, sujeitos à ação apenas da gravidade. Neste caso a aceleração é a da gravidade, normalmente indicada pela letra g. Através de nosso conhecimento da função quadrática podemos obter uma descrição completa do movimento uniformemente variado.

Outro exemplo do movimento uniformemente variado é o movimento de um projétil (uma bala, por exemplo) lançado por uma força instantânea e a partir daí, sujeito apenas à ação da gravidade, sendo desprezada a resistência do ar. Embora o processo ocorra no espaço tridimensional a trajetória do projétil está contida no plano determinado pela reta vertical no ponto de partida e pela direção da velocidade.

Observação 4.2. Quando o movimento ocorre no plano ou no espaço, a velocidade é expressa por um vetor (segmento de reta orientado), cujo comprimento se chama *velocidade escalar* do móvel. A direção e o sentido desse valor indicam a direção e o sentido do movimento.

No plano em que se dá o movimento, tomemos um sistema de coordenadas cuja origem é o ponto de partida do projétil e cujo eixo OY é a reta vertical que passa por este ponto. A velocidade inicial do projétil é o vetor $v = (v_1, v_2)$ cuja primeira coordenada v_1 fornece a velocidade da componente horizontal do movimento (deslocamento da sombra, ou projeção do projétil sobre o eixo horizontal OX). Como a única força atuando sobre o projétil é a força gravitacional que não possuí componente horizontal, resulta que , se $P = (x, y)$ é a posição do projetil no instante t, tem-se $x = v_1 t$.

A aceleração da gravidade é constante, vertical, e igual a $-g$. (O sinal menos se deve ao sentido da gravidade ser oposto à orientação do eixo vertical OY.) Portanto, a componente vertical do movimento de P é um movimento uniformemente acelerado sobre o eixo OY, com aceleração igaul a $-g$ e velocidade inicial v_2.

Logo em cada instante t, a ordenada y do ponto $P = (x, y)$ é dada por $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t$ (não há termo cosntante, pois $y = 0$ quando $t = 0$). Se $v_1 = 0$ então, para todo t, tem-se $x = v_1 t = 0$, logo $P = (0, y)$, com

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t.$$

Neste caso, a trajetória do projétil é vertical. Suponhamos agora que $v_1 \neq 0$. Então, de $x = v_1 t$ vem $t = x/v_1$. Substituindo t por este valor na expressão de y, obtemos

$$y = ax^2 + bx, \quad \text{onde} \quad a = -g/2v_1^2, \quad \text{e} \quad b = v_2/v_1$$

isto mostra que a trajetória do projétil é uma parábola.

RESUMO

..

Funções Quadráticas Dada a função quadrática

$$ax^2 + bx + c.$$

a mesma pode ser escrita da seguinte maneira:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \qquad (4.16)$$

a qual é chamada forma canônica. A forma canônica permite obter importantes informações sobre o comportamento desta função, como demonstrar que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola, ou seja,

Proposição: O gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F = (\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2+1}{4a})$ e cuja reta diretriz é a reta horizontal $y = \frac{4ac-b^2-1}{4a}$.

Ainda, a forma canônica, permite provar as fórmula clássica para as raízes de uma equação quadrática

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad e \qquad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Outra propriedade da função quadrática, é enunciada como:

Proposição: Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática. Se $a > 0$ então a função assume um menor valor no ponto $x = -\frac{b}{2a}$ e se $a < 0$ a função assume um valor máximo em $x = -\frac{b}{2a}$.

Ainda obtemos como aplicação da função quadrática, uma propriedade interessante da parábola, a qual nos informa que retas paralelas ao eixo da parábola refletem passando pelo foco. Esta propriedade tem inúmeras aplicações no cotidiano. Outra aplicação é no estudo do Movimento Uniformemente Variado.

ATIVIDADES

..

Atividade. 4.1. Considere a função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se seja x_1, x_2 e x_3 três números distintos. Dados arbitrariamente os números reais y_1, y_2 e y_3 então existe um, e somente um, terno de números a, b e c tais que a função f cumpre $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

Atividade. 4.2. Qual o valor máximo do produto de dois números cuja soma é constante.

Atividade. 4.3. Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

onde onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. De acordo com o que foi visto no texto, determine:

(a)- As coordenadas do vértice do gráfico da função.

(b)- O eixo da parábola.

(c)- Suponha que a função f possua duas raízes α e β, $\alpha \neq \beta$. Conclua que a abcissa do vértice é o ponto médio do segmento $[\alpha, \beta]$.

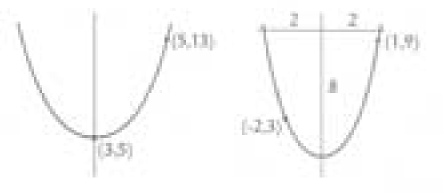
Atividade. 4.4. (a)- Considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Defina as operações (translações) para trasnformar esta parábola na parábola $h(x) = ax^2$. Dizemos então que estas parábolas são congruentes.

(b)- Considere a transformação, que consiste em uma reflexão em torno do eixo horizontal, ou seja, a transformação $(x, y) \longmapsto (x, -y)$. Esta transformação leva o gráfico de $g(x) = -ax^2$ no gráfico de $h(x) = ax^2$. Defina as operações (translações e/ou refleções) que transforma a parábola $f(x) = -ax^2 + bx + c$ na parábola $h(x) = ax^2$.

Obs: Dos itens (a) e (b) acima, podemos resumir: Se $a' = \pm a$ então os gráficos das funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $\psi(x) = a'x^2 + b'x + c'$ são congruentes.

(c) Considere as funções quadráticas $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 5$ e $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 5x + 25$. Determine o conjuntos de operações que leva uma delas sobre a outra. Esboce o gráfico destas duas parábolas.

Atividade. 4.5. Encontre a função quadrática cujo gráfico é dado pela figura:



Atividade. 4.6. Escreva cada uma das funções quadráticas abaixo na forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$. A seguir, calcule sua raízes (se existirem), o eixo de simetria de seu gráfico e seu valor mínimo ou máximo.

(a)- $f(x) = x^2 - 8x + 23$.

(b)- $f(x) = 8x - 2x^2$.

Atividade. 4.7. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$.

(a)- Mostre que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

(b)- Mais geralmente prove que se $0 < \alpha < 1$, então

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

Interprete geometricamnete este resultado.

Atividade. 4.8. Considerando que uma fita se enrola em um carretel segundo círculos concentrícos, igualmente espaçados, Mostre que o tempo $T(n)$ de gravação após n voltas é dada por uma função do tipo $T(n) = an^2 + bn$. Suponha que a velocidade da fita seja constante.

Atividade. 4.9. Dado um conjunto de retas no plano, elas determinam um número máximo de regiões quando estão na chamada posição geral: isto é, elas são concorrentes duas a duas e três retas nunca têm um ponto em comum. Seja R_n o número máximo de regiões determinadas por n retas no plano.

(a)- Quando se adiciona mais uma reta na posição geral a um conjunto de n retas em posição geral, quantas novas regiões são criadas?

(b)-Prove que $R_n = \frac{n^2+n+2}{2}$. (**Sugestão:** Escreva R_n da seguinte maneira $R_n = (R_n - R_{n-1}) + (R_{n-1} - R_{n-2}) + \ldots + (R_2 - R_1) + R_1$.)

Atividade. 4.10. Se x e y são números reais tais que $3x+4y = 12$, determine o valor mínimo de $z = x^2 + y^2$.

Atividade. 4.11. Qual o valor máximo de $21n - n^2$, onde n é inteiro.

Atividade. 4.12. Determine explicitamente os coeficientes a, b e c do trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ em função de $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$.

Atividade. 4.13. Que forma tem o gráfico da função $f : [0, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$.

Atividade. 4.14. Mostre que a equação $\sqrt{x} + m = x$ possui uma raiz se $m > 0$, duas raízes quando $\frac{1}{4} < m \leq 0$, uma raiz para $m = -1/4$ e nehuma raiz caso $m < -1/4$.

Atividade. 4.15. Prove que a função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é quadrática se, e somente se, para todo $h \in \mathbb{R}$fixado, a função $\psi(x) = f(x+h) - f(x)$ é afim e não constante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.