AULA

5

Caracterização das Funções Quadráticas

META:

Obter os teoremas de caracterização das funções quadráticas.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Identificar a relação entre funções quadráticas e progressões aritméticas.

PRÉ-REQUISITOS

Definição e propriedades da função quadrática.

5.1 Introdução

Uma questão importante na matemática, e nas ciências que fazem uso da matemática, é saber se, numa dada situação, a função que dever ser adatada para modelar o problema de maneira a refletir a realidade do fenômeno estudado. Com base, neste pensamento, vamos caracterizar as funções quadráticas.

5.2 Teoremas de Caracaterização das funções quadráticas

Começamos observando que uma função quadrática nunca é monótona e desta forma, nos teoremas de caracterização que apresentamos a seguir, trabalharemos com a hipótese de continuidade. Ou seja, admitiremos conhecido que uma função quadrática é contínua e que se duas funções contínuas $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são tais que $f(r) = g(r)$ para todo racional r então $f(x) = g(x)$ para todo x real.

Definição 5.1. Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência $y_1, y_2, \ldots$ tal que as diferenças sucessivas

$$d_1 = y_2 - y_1, \qquad d_2 = y_3 - y_2, \qquad d_3 = y_4 - y_3, \qquad \ldots$$

formam uma progressão aritmética usual.

Exemplo 5.1. Considere a sequência $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ dos quadrados dos números naturais é uma progressão aritmética de segunda ordem. De fato, as diferenças sucessivas

$$\begin{aligned} &d_1 = 4 - 1 = 3, \qquad d_2 = 9 - 4 = 5, \qquad d_3 = 16 - 9 = 7, \\ &d_4 = 25 - 16 = 9 \ldots \end{aligned} \tag{5.17}$$

formam uma progressão aritmética de razão 2.

Proprosição 5.14. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática e $x_1, x_2, x_3, \ldots$ é uma progressão aritmética arbitrária então os números $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$, $\ldots$ formam uma progressão aritmética de segunda ordem.*

Prova: Seja $x_{i+1} - x_i = r$ a razão da progressão aritmética $x_1, x_2, x_3, \ldots$, então segue que $x_{i+1} = x_i + r$. Temos que:

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= f(x_{i+1}) &&= ax_{i+1}^2 + bx_{i+1} + c, \\
y_i &= f(x_i) &&= ax_i^2 + bx_i + c, \\
y_{i-1} &= f(x_{i-1}) &&= ax_{i-1}^2 + bx_{i-1} + c.
\end{aligned}$$

e desta forma

$$\begin{aligned}
d_{i+1} &= y_{i+1} - y_i &&= a(x_{i+1}^2 - x_i^2) + b(x_{i+1} - x_i) \\
&= a(2rx_i + r^2) + br \\
d_i &= y_i - y_{i-1} &&= a(x_i^2 - x_{i-1}^2) + b(x_i - x_{i-1}) \\
&= a(2rx_{i-1} + r^2) + br.
\end{aligned}$$

e finalmente

$$d_{i+1} - d_i = a(2rx_i - 2rx_{i-1}) = 2ar(x_i - x_{i-1}) = 2ar^2$$

o que mostra que a sequência que $d_1, d_2, d_3, \ldots$ é uma progressão aritmética de razão $2ar^2$. ∎

Agora vamos mostrar que vale a reciproca deste resultado.

Proprosição 5.15. *Toda função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua que transforma progressões aritméticas em progressões aritméticas de segunda ordem é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.*

Prova: Começamos mostrando que se $y_1, y_2, y_3, \ldots$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, existem números reais a, b, c tais que $y_n = an^2 + bn + c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim considerando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos $y_n = f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta maneira a restrição de f ao números naturais fornece os termos de uma P.A de segunda ordem dada. Para ver este fato, observamos que as diferenças sucessivas

$$d_1 = y_2 - y_1, \qquad d_2 = y_3 - y_2, \qquad d_3 = y_4 - y_3, \qquad \ldots$$

formam uma $P.A$ ordinária, cujo primeiro termo é $d = y_2 - y_1$ e cuja razão chamamos de r_i. Portanto seu $n-$ésimo termo é:

$$y_{n+1} = y_n = d + (n-1)r_i,$$

Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ os termos de uma P.A de razão r. Então o n-ésimo termo da P.A é dado por $a_{n+1} = a_1 + (n-1)r$.

para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Temos então:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (y_{n+1} - y_n) + (y_n - y_{n-1}) + \ldots + (y_2 - y_1) + y_1 \\ &= [d + (n-1)r] + [d + (n-2)r] + \ldots + [d + r] + d + y_1 \\ &= nd + \tfrac{n(n-1)}{2} r + y_1, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Observamos que a última igualdade foi obtida usando a fórmula da soma para os $n-1$ inteiros $n-1, n-2, \ldots, 2, 1$.

Considere os n primeiros inteiros $1, 2, 3, \ldots, n$. Então a fórmula para a soma destes é dada por $S_n = \frac{(n+1)n}{2}$.

Substituindo $n+1$ por n na equação acima (desde que esta é válida para $n = 0$), obtemos:

$$\begin{aligned} y_n &= (n-1)d + \tfrac{(n-1)(n-2)}{2} r + y_1, \\ &= \tfrac{r}{2} n^2 + \big(d - \tfrac{3r}{2}\big) n + r - d + y - 1, \\ &= an^2 + bn + c. \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, com $a = r/2$, $b = d - 3r/2$ e $c = r - d + y_1$. ∎

Exemplo 5.2. A sequência $3, 7, 13, 21, 31, 43, \ldots$ é uma P.A de segunda ordem, pois as diferenças sucessivas

$$\begin{aligned} d_1 = y_2 - y_1 = 7 - 3, \qquad & d_2 = y_3 - y_2 = 13 - 7, \\ d_3 = y_4 - y_3 = 21 - 13, \qquad & \ldots, \end{aligned} \tag{5.18}$$

formam a P.A ordinária $4, 6, 8, 10, 12, \ldots$ de razão $r = 2$ e primeiro termo $d = 4$. Assim o n-ésimo termo da sequência inicial pode ser escrito da forma $y_n = an^2 + bn + c$. As constantes são determinadas de acordo com as expressões obtidas na prova do teorema acima, ou seja, $a = r/2 = 1$, $b = d - 3r/2 = 4 - 3 = 1$ e $c = r - d + y_1 = 2 - 4 + 3 = 1$. Assim o termo geral é $y_n = n^2 + n + 1$.

Vamos supor que a P.A de segunda ordem é não degenerada, ou seja, não é uma P.A ordinária.

Seja $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ uma P.A de segunda ordem. Esta é dita *degenerada* se as diferenças sucessivas formam uma sequência constante, ou seja, uma P.A de razão nula e assim, a primeira sequência é uma P.A ordinária

Teorema 5.1. Caracterização das Funções Quadráticas *A fim de que a função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não constante $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ldots$ seja transformada numa progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$,$\ldots$, $y_n = f(x_n), \ldots$.*

Prova: A necessidade já foi provada acima. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ função contínua com a propriedade de transformar toda P.A não constante numa P.A de segunda ordem não degenerada. Fazendo $g(x) = f(x) - f(0)$, obtemos que g tem as mesmas propriedades que f e ainda $g(0) = 0$. Consideremos a P.A $1, 2, 3, \ldots$. Então os valores $g(1), g(2), g(3), \ldots$ formam uma P.A de segunda ordem não-degenerada. Logo existem constantes $a \neq 0$ e b tais que

$$g(n) = an^2 + bn$$

para todo $n \in \mathbb{R}$. Observe que o termo $c = 0$ pois $g(0) = 0$ e por isso não aparece na expressão acima.

Fixamos arbritariamente um número $p \in \mathbb{N}$ e consideremos a progressão aritmética

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \ldots, \frac{n}{p}, \ldots$$

De modo análogo, concluímos que existem constantes $a' \neq 0$ e b' tais que

$$g\Big(\frac{n}{p}\Big) = a'n^2 + b'n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$an^2 + bn = g(n) = g\Big(\frac{np}{p}\Big) = a'(np)^2 + b'(np) = (a'p^2)n^2 + (b'p)n$$

Portanto as funções quadráticas $an^2 + bn$ e $(a'p^2)n^2 + (b'p)n$ coincidem para todo $x = n \in \mathbb{N}$. Como vimos no ínicio do estudo de função quadrática, isto implica que $a = a'p^2$ e $b = b'p$, ou seja, $a' = a/p^2$ e $b' = b/p$. Logo para quaisquer números naturais n e p vale:

$$\begin{aligned} g\big(\tfrac{n}{p}\big) &= a'n^2 + b'n \\ &= \tfrac{a}{p^2}n^2 + \tfrac{b}{p}n \\ &= a\big(\tfrac{n}{p}\big)^2 + b\big(\tfrac{n}{p}\big). \end{aligned}$$

Vemos que as funções contínuas $g(x)$ e ax^2+bx são tais que $g(r) = ar^2+br$ para todo número racional positivo $r = n/p$. Segue-se que $g(x) = ax^2 + bx$ para todo número real positivo x. De modo análogo, considerando-se a P.A $-1, -2, -3, \ldots$, concluiríamos que $g(x) = ax^2 + bx$ para todo $x \leq 0$. Logo pondo $f(0) = c$, temos que $f(x) = g(x) + c$, ou seja,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. ∎

5.3 Conclusão

Vimos uma maneira de caracterizar uma função quadrática por meio de progressões aritméticas.

RESUMO

..

Caracterização da Função Quadrática

Definição Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência $y_1, y_2, \ldots$ tal que as diferenças sucessivas

$$d_1 = y_2 - y_1, \qquad d_2 = y_3 - y_2, \qquad d_3 = y_4 - y_3, \qquad \ldots$$

formam uam progressão aritmética usual.

Teorema da Caracterização da Função Quadrática A fim de que a função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não constante $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ldots$ seja transformada numa progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$, $\ldots, y_n = f(x_n), \ldots$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

..

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.