AULA

6

Funções Polinomiais

META:

Definir e obter propriedades de funções polinomiais.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Identificar e conhecer informações de natureza geral sobre funções polinomiais.

Calcular uma aproximação para as raízes de um função polinomial.

Aplicar o método de Newton para determinar uma aproximação para as raízes.

PRÉ-REQUISITOS

Definição de polinômio de grau n, como também conhecimento sobre continuidade e diferenciabilidade de funções polinômiais.

6.1 Introdução

As funções polinomiais, onde as funções lineares e quadráticas são um caso particular, estão presentes na matemática com várias aplicações.

6.2 Funções Polinomiais e Polinômios

Definição 6.1. Dizemos que $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando existem números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{6.19}$$

A soma e o produto de funções polinomiais, ainda é uma função polinomial. Um exemplo interessante de produto é:

$$(x-\alpha)(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \ldots + \alpha^{n-2}x + \alpha^{n-1}) = x^n - \alpha^n.$$

Dizemos então que $x^n - \alpha^n$ é divisível por $x - \alpha$. Seja p uma função polinomial como na equação (6.19). Para quaisquer x, α reais, temos que

$$p(x) - p(\alpha) = \alpha_n(x^n - \alpha^n) + \alpha_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \ldots + a_1(x - \alpha).$$

Como cada parcela do segundo menbro é divisível por $x - \alpha$, podemos escrever, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$p(x) - p(\alpha) = (x - \alpha)q(x).$$

onde q é uma função polinomial.

Em particular, se α é uma raíz de p, isto é, $p(\alpha) = 0$, então

$$p(x) = (x - \alpha)q(x).$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. A recíproca é óbvia. Portanto, α é uma raíz de p se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $x-\alpha$. Mais geralmente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ são raízes de p se, e somente se, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_k)q(x).$$

Uma função polinomial p, chama-se identicamente nula quando se tem $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, p tem uma infinidade de raízes, ou seja, todo número real é uma raiz de p.

Dadas duas funções polinomiais p e q, completando com zeros, se necessário, os coeficientes que faltam, podemos escrever sob as formas

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

e

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Suponhamos que $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, que p e q sejam funções iguais. Então a diferença $d = p - q$ é a função identicamente nula, pois $d(x) = p(x) - q(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$d(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0).$$

Pelo que acabamos de ver sobre funções polinomiais identicamente nulas, segue-se que $a_n - b_n = 0, \dots, a_1 - b_1 = 0, \quad a_0 - b_0 = 0$. Portanto as funções polinomiais p, q assumem o mesmo valor $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, têm os mesmo coeficientes.

Como no caso de funções quadráticas, existe um sutil diferença entre o conceito de função polinomial e o conceito de polinômio, que apresentemos agora.

Definição 6.2. Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0, \tag{6.20}$$

onde $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ é uma lista ordenada de números reais e X é um símbolo (chamada de indeterminada), sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \cdot X \cdot \ldots \cdot X$ (i fatores).

Em essência, o polinômio $p(X)$ é o mesmo que a lista ordenada dos seus coeficientes. ao escrevê-lo da maneira acima, estamos deixando explícita a intenção de somar e multiplicar plonômios como se fossem funções polinomiais, usando a regra $X^i{\cdot}X^j = X^{i+j}$. Por definição, os polinômios

$$p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$$

e

$$q(X) = b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0.$$

são iguais (ou idênticos) quando $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, …, $a_n = b_n$.
A cada polinômio

$$p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0,$$

faz-se corresponder a função polinomial $\bar{p} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\bar{p}(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Esta correspondência (polinômio)$\longmapsto$ (função polinomial) é sobrejetiva, pela própria definicão destas funções. A discussão que fizemos acima sobre os coeficientes de funções polinomiais iguais significa

que a polinômios distintos correspondem funções polinomiais distintas. Logo trata-se de uma correspondência biunívoca.
Por este motivo, não há necessidade de fazer distinção enter o polinômio p e a função polinomial $\bar{p}$. Ambos serão representados pelo mesmo símbolo p e serão chamados indiferentemente de polinômio ou de função polinomial. Além disso, diremos *a função* $p(x)$ sempre que não houver perrigo de confundí-la com o número real que é o valor da função assumido num certo ponto x.

6.3 Determinando um Polinômio a partir de seus Valores

Um polinômio de grau n é dado quando se conhecem seus $n+1$ coeficientes. Segundo a boa prática matemática, para determinar $n+1$ números é necessário (e muitas vezes suficiente) ter $(n+1)$ informações. No nosso caso, vale o seguinte resultado:

Proprosição 6.16. *Dados $n+1$ números reais distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e fixados arbitrariamente os valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe um, e somente um, polinômio p, de grau $\leq n$, tal que*

$$p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n.$$

A parte *somente um* decorre do que já discutimos na seção anterior, pois e p e q são polinômios de grau $\leq n$ que assumem os mesmo valores em $n+1$ pontos distintos então a diferença $p-q$ é um polinômio de grau $\leq n$ com $n+1$ raízes, logo $p-q=0$ e $p=q$.
A existência de um polinômio p de grau $\leq n$ que assume valores pré-fixados em $n+1$ pontos distintos dados consiste em resolver o

ssitema de $n+1$ equações nas $n+1$ incógnitas $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Mais precisamente o sistema é dado pelas equações

$$\begin{aligned}
a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 &= y_0, \\
a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 &= y_1, \\
&\vdots \\
a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \ldots + a_1 x_n + a_0 &= y_n.
\end{aligned}$$

Este sistema, no qual as quantidades conhecidas são as potências sucessivas de $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tem sempre solução única quando estes $n+1$ números são dois a dois diferentes. (Seu determinante é o determinante de Vandermonde, igual $\prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$.)

Exemplo 6.1. Pondo $x_0 = -1,\ \ x_1 = 0,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 2,\ \ x_4 = 3$ e procurarmos o polinômio de grau ≤ 4 que assume os valores $-7, 1, 5, 6, 25$ respectivamente, obteremos

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1,$$

que tem grau 3.

6.4 Gráfico de Polinômios

Quando se deseja traçar, ao menos aproximadamente, o gráfico de um polinômio, certas informações de natureza geral são de grande utilidade. Vejamos algumas delas.

Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ com $a_n \neq 0$. Se n é par, então para $|x|$ suficientemente grande, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n. Este sinal é, portanto, o mesmo, não importando se $x < 0$ ou $x > 0$, desde que $|x|$ seja suficientemente grande. Se entretanto, n é ímpar, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n para valores positivos muito grandes de x e tem o sinal oposto de a_n para valores negativos muito grande de x.

Em ambos os casos, quando $|x|$ cresce ilimitadamente, $|p(x)|$ também cresce ilimitadamente. Vejamos abaixo dois exemplos.

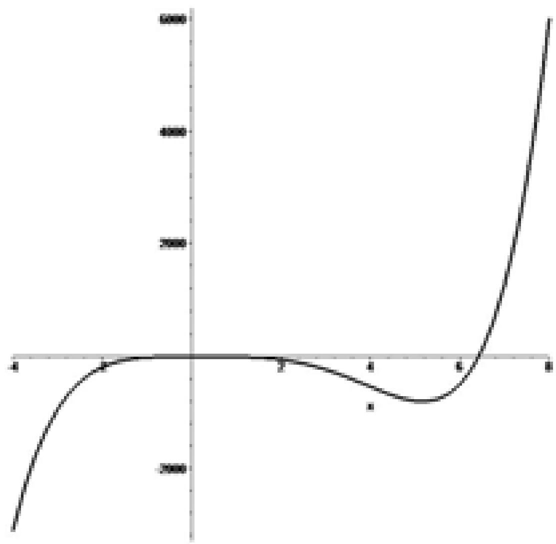

Figura 6.1: Gráfico da função $p(x) = x^5 - 7x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x - 4$.

Outra informação útil diz respeito à comparação entre dois polinômios. Se o grau de p é maior do que o grau de q então, para todo x com valor absoluto suficientemente grande, têm-se $|p(x)| > |q(x)|$. Mais ainda, a diferença entre $|p(x)|$ e $|q(x)|$ pode se tormar tão grande quanto se queira, desde que se tome $|x|$ suficientemente grande. Mais um dado relevante para traçar o gráfico de um polinômio é a localização de sua raízes. É claro que, por motivo da continuidade, se $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$ então p deve possuir uma raiz entre x_1 e x_2. Esta observação já assegura que todo polinômio de grau ímpar possuí ao menos uma raíz real. A questão que surge é como localizar estas raízes.

As raízes de polinômios de segundo grau foram expressas em função de seus coeficientes há milênios. em meados do século XVI, foram obtidas fórmulas para exprimir, mediante radicais as raízes de polinômios de terceiro e quarto graus em função dos coeficientes.

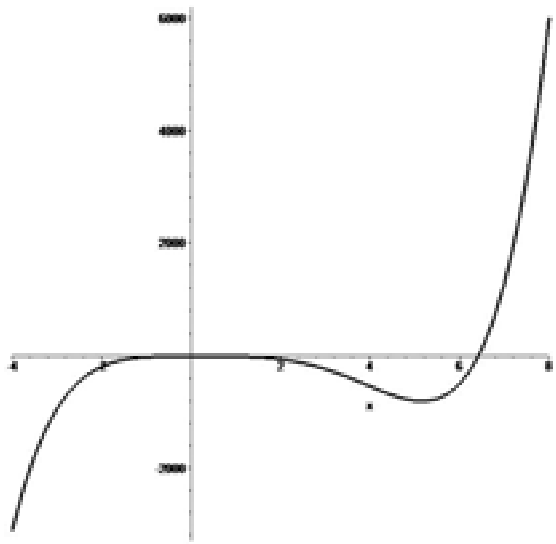

Figura 6.2: Gráfico da função $x^6 - 7x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x - 4$.

Os métodos que se usam atualmente para determinar uma raiz do polinômio p localizada no intervalo $[a, b]$, quando se sabe que $p(a)$ e $p(b)$ tem sinais opostos não se baseiam em fórmulas fechadas, como foram obtidas para as equações de grau ≤ 4. Em vez disso, esses métodos se baseiam em *algorítmos aproximativos*, os quais instruem, passo a passo, como proceder para obter uma sequência de números $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tais que os valores $p(x_1)$, $p(x_2)$, $\ldots, p(x_n), \ldots$ estão cada vez mais próximos de zero.

Um exemplo de algorítmo grandemente eficiente, para obter uma raíz da equação $p(x) = 0$ é o *Método de Newton.* Segundo este método, se x_1 é um valor próximo de uma raiz, a sequência x_1, x_2, $\ldots, x_n, \ldots$ de números reais obtidos pela fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)},$$

tem com o limite uma raiz de p. Os termos desta sequência se aproximam bastante rapidamente do limite. Um caso particular do método de Newton, já era conhecido pelos babilônicos, que calculavam a raiz quadrada de um número positivo a, ou seja, uma rais da equação $x^2 - a = 0$, tomando um valor inicial x_1 e a partir daí, construir as aproximações $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de $\sqrt{a}$ pela fórmula iterativa

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Observação 6.1. No denominador da fórmula de Newton, $p'(x)$ representa a derivada do polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

a qual é

$$p(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1.$$

RESUMO

..

Nesta seção, definimos um função polinomial, a qual é uma generalização da função Afim e Quadrática. Vimos que toda função polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

pode ser identificada com o polinômio de grau n: $p(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$. Um resultado importante, sobre funções polinomias é o seguinte:

Um polinômio de grau n é dado quando se conhecem seus $n+1$ coeficientes. Ou seja, dados $n+1$ números reais distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e fixados arbitrariamente os valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe um, e somente um, polinômio p, de grau $\leq n$, tal que

$$p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n.$$

Uma maneira de determinar completamente a análise de uma função polinomial, é obter o gráfico desta função. Dentre as informações de natureza geral, está a de como obter uma boa aproximação para as raízes do polinômio que representa a função. Um exemplo de algorítmo grandemente eficiente, para obter uma raíz da equação $p(x) = 0$ é o *Método de Newton*. Segundo este método, se x_1 é um valor próximo de uma raiz, a sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de números reais obtidos pela fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)},$$

tem com o limite a rais de p.

ATIVIDADES

Atividade. 6.1. Sejam $P(x)$ e $p(x)$ polinômios não identicamente nulos, com grau $P(x) \geq$ grau $p(x)$. Prove que existe um polinômio $q(x)$ tal que grau $[P(x) - p(x)q(x)] <$ grau $P(x)$. Usando repetivamente este fato, mostre que existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que $P(x) = p(x)q(x) + r(x)$, com grau $r(x) \geq$ grau $p(x)$. Os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que $P(x) = p(x)q(x) + r(x)$, com grau $r(x) \geq$ grau $p(x)$, chamam-se respectivamente o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $p(x)$.

Atividade. 6.2. Prove a unicidade do quociente e do resto, isto é, se $P(x) = p(x)q_1(x) + r_1(x)$, com grau $r_1(x) \geq$ grau $p(x)$ e $P(x) = p(x)q_2(x) + r_2(x)$, com grau $r_2(x) \geq$ grau $p(x)$ então $q_1(x) = q_2(x)$ e $r_1(x) = r_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Atividade. 6.3. Verifique se é verdadeiro ou falso: Se α é a raiz dupla de $p(x)$ se, e somente se, é raiz simples de $p'(x)$.

Atividade. 6.4. Determine o polinômio $p(x)$ de menor grau possível tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 1$, $p(3) = 4$ e $p(4) = 3$.

Atividade. 6.5. Seja $p(x)$ um polinômio cujo grau n é um número ímpar. Mostre que existem números reais x_1, x_2 tais que $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$. Conclua daí que todo polinômio de grau ímpar admite pelo menos uma raíz real.

Atividade. 6.6. Tomando $x_0 = 3$ use a relação de recorrência

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right).$$

para calcular $\sqrt{5}$ com três algarismos decimais exatos.

Atividade. 6.7. Usando o método de Newton, estabeleça um processo interativo para calcular $\sqrt[3]{a}$ e aplique-o a fim de obter um valor aproximado de $\sqrt[3]{2}$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.