AULA

7

Funções Logarítmicas

META:

Definir e obter propriedades de funções polinomiais.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Identificar e conhecer informações de natureza geral sobre funções polinomiais.

Calcular uma aproximação para as raízes de um função polinomial.

Aplicar o método de Newton para determinar uma aproximação para as raízes.

PRÉ-REQUISITOS

Definição de polinômio de grau n, como também conhecimento sobre continuidade e diferenciabilidade de funções polinômiais.

7.1 Introdução

Os logaritmos são estudados a longa data, e desempenharam um papel importante como instrumento de simplificar o cálculo aritmético, permitindo que se efetuasse, por exemplo, a multiplicação de dois números com muitos algarismos. Porém, na atualidade, este papel se torna obsoleto, dado o surgimento de eficientes máquinas de calcular. Mas os logaritmos continuam a merecer destaque no ensino da matemática. A função logarítmica, e sua inversa, a função exponencial, constituem a maneira única de descrever matematicamente uma grandeza cuja taxa de crescimento, ou decrescimento, é proporcional à quantidade daquela grandeza existente nun dado momento.

Vamos inverter a ordem da apresentação das funções exponenciais e logarítmicas em relação aos textos tradicionais, que definem função exponencial e depois função logarítmica como sua inversa. Assim, não vamos fazer uso da função de logaritmos usualmente apresentada nos livros de ensino, onde uma maneira definir a função $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ consiste em por $L(x) = y$ se, e somente se, $a^y = x$, ou seja, chamar de logaritmo de x na base a ao expoente y ao qual se deve elevar a base a para obter x. Para fugir de alguns inconvinientes desta definição, vamos apresentar uma definição geométrica dos logaritmos que apresenta vantagens do ponto de vista conceitual e técnica como veremos no decorrer da aula. A definição geométrica depende apenas do conceito de área de uma figura plana e a propriedade fundamental $L(xy) = L(x) + L(y)$ resulta meramente do fato de que a área de um retângulo não se altera quando se muultiplica sua base por um número e se divide a altura pelo mesmo número.

7.2 Definição e Propriedades da Função Logarítmica

Nesta aula, daremos a definição de função logarítmica, estabelecendo suas propriedades básicas e mostraremos que, a menos de um fator constante, duas quasiquer funções logarítmicas coincidem.

Definição 7.1. Um Sistema de Logaritmos ou uma função logarítmica é uma função real $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}^+$ dos números reais positivos, que satisfaz as seguintes propriedades:
A) L é uma função crescente, isto é, $x < y \Longrightarrow L(x) < L(y)$;
B) $L(xy) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, o número $L(x)$ chama-se *logaritmo* de x. (Se estivermos contemplando outras funções logarítmicas além de L, diremos que $L(x)$ é o logaritmo de x segundo L.)

Observação 7.1. Na Definição 7.1 podemos assumir que a função L seja decrescente. Porém as propriedades que enunciaremos a seguir, vamos asumir a hipótese que L é crescente. No caso em que L é descrescente estas propriedades devem ser reescritas, fazendo as alterações quando necessário.

No que segue, vamos apresentar algumas propriedades das funções logarítmicas, que são consequência imediata das condições A) e B) da definição.

Propriedade 7.1. *Uma função logarítmica* $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *é sempre injetiva.*

Com efeito, sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$ distintos, então ou $x < y$ ou $y < x$. No primeiro caso, resulta de A) que $L(x) < L(y)$ e no segundo caso tem-se $L(y) < L(x)$. Em qualquer um dos casos, de $x \neq y$ conclui-se que $L(x) \neq L(y)$.

Uma definição para uma função injetiva pode ser dada da seguinte forma: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ então f é injetiva se sempre que $x \neq y$ implica que $f(x) \neq f(y)$.

Propriedade 7.2. *O logaritmo de* 1 *é zero.*

De fato, por B) temos

$$L(1) = L(1.1) = L(1) + L(1),$$

logo $L(1) = 0$.

Propriedade 7.3. *Se* $x > 1$ *(x<1) então* $L(x) > 0$ *(*$L(x) < 0$*), ou seja, os números maiores que um têm logarítmos positivos e os números positivos menores que um têm logarimos negativos.*

Sendo L crescente, de $0 < x < 1 < y$ resulta que $L(x) < L(1) < L(y)$, isto é, $L(x) < 0 < L(y)$.

Observação 7.2. Se supormos que L é descrescente, então a propriedade acima, assume a seguinte formulação:
Se $x < 1$ *então* $L(x) > 0$ *e se* $x > 1$ *então* $L(x) < 0$.
Para ver este fato, basta ver que se $0 < x < 1 < y$ resulta que $L(x) > L(1) > L(y)$ ou seja, $L(x) > 0 > L(y)$.

Propriedade 7.4. *Para todo* $x > 0$, *tem-se* $L(1/x) = -L(x)$.

Com efeito, de $x.(1/x) = 1$ resulta que $L(x) + L(1/x) = L(1) = 0$, donde $L(1/x) = -L(x)$.

Propriedade 7.5. *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *vale:*

$$L(x/y) = L(x) - L(y).$$

Com efeito,

$$L(x/y) = L(x.(1/y)) = L(x) + L(1/y) = L(x) - L(y),$$

donde na ultima igualdade, usamos a propriedade anterior.

Propriedade 7.6. *Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo número racional $r = p/q$ tem-se $L(x^r) = rL(x)$.*

Primeiramente, observamos que segue da condição B) da definição aplicada n vezes que:

$$L(x^n) = L(x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x) = L(x) + L(x) + L(x) + \ldots + L(x) = n \cdot L(x)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo a Propriedade 7.6 vale quando $r = n$ é um número natural. Claramente também vale quando $n = 0$, pois $L(x^0) = L(1) = 0 = 0.L(x)$. Seja $r = -n$, $n \in \mathbb{N}$, ou seja, r é um inteiro negativo. Então para todo $x > 0$, temos $x^n \cdot x^{-n} = 1$. Logo

$$L(x^n) + L(x^{-n}) = L(x^n \cdot x^{-n}) = L(1) = 0,$$

e assim

$$L(x^{-n}) = -L(x^n) = -nL(x)$$

Logo a propriedade vale quando r é um número inteiro. No caso em que $r = p/q$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$, temos

$$(x^r)^q = (x^{p/q})^q = x^p.$$

Logo $q \cdot L(x^r) = L((x^r)^q) = L(x^p) = pL(x)$, pelo que provamos acima. Da igualdade $q \cdot L(x^r) = pL(x)$, resulta que $L(x^r) = p/qL(x) = rL(x)$.

Propriedade 7.7. *Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada superior e inferiormente.*

Seja B um número real e n um número natural n tão grande que $n > B/L(2)$. Como $L(2) > 0$ (pela Propriedade 7.3), temos que $n \cdot L(2) > B$. Usando a Propriedade 7.5, vemos que $n \cdot L(2) = L(2^n)$. Portanto, $L(2^n) > B$. Agora é só escolher $x = 2^n$ e desta maneira, teremos $L(x) > B$, o que mostra que L é ilimitada superiormente.

Seja $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, então dizemos que f é ilimitada superiormente (respectivamente, inferiormente) se dado arbitrariamente A (respectivamente B), números reais, é possível encontrar x (respectivamente y) números positivos, tais que $L(x) < A$ (respectivamente $L(x) > B$.

Seja A um número real, pelo que vimos acima podemos encontrar $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(x) > -A$. Então pondo $y = 1/x$, teremos $L(y) = -L(x) < A$ (usamos que $L(1/x) = -L(x)$). Isto mostra que L é ilimitada inferiormente.

Seja $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função logarítmica e c uma constante positiva arbitrária. Então a função $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $M(x) = c \cdot L(x)$ é também uma função logarítmica. Este fato é facilmente verificado, pois se L satisfaz as condições A) e B) então M satisfaz A) e B).

Teorema 7.1. *Dadas as funções logarítmicas $L, M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = cL(x)$ para todo $x > 0$.*

Prova: Suponhamos que existe um inteiro $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$, mostraremos que neste caso $L(x) = M(x)$ para todo $x > 0$. Observe que de $L(a) = M(a)$, concluímos que $L(a^r) = M(a^r)$. Suponhamos, por absurdo, que existe algum $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$. Para fizar idéias, suponhamos $L(b) < M(b)$. Escolhemos um número natural n tão grande de maneira que:

$$n[M(b) - L(b)] > L(a).$$

Então

$$L(a^{1/n}) = L(a)/n < M(b) - L(b).$$

Escrevemos $c = L(a^{1/n})$. Os números $c, 2c, 3c, \ldots$ dividem $\mathbb{R}^+$ em intervalos justapostos, de mesmo comprimento c. Como $c <$

$M(b)-L(b)$, pelo menos um desses números, digamos $m \cdot c$ pertence ao interior do intervalo $(L(b), M(b))$, ou seja, $L(b) < m \cdot c < M(b)$. Ora,

$$m \cdot c = m \cdot L(a^{1/n}) = L(a^{m/n}) = M(a^{m/n}).$$

Então

$$L(b) < L(a^{m/n}) = M(a^{m/n}) < M(b).$$

Como L é crescente, a primeira das desigualdades acima implica $b < a^{m/n}$. Por outro lado, como M também é crescente, a segunda desigualdade implica que $a^{m/n} < b$. Esta contradição mostra que b não existe. Assim $M(x) = L(x)$ para todo $x > 0$.
Agora dadas L, M funções logarítmicas arbitrárias, temos $L(2) > 0$ e $M(2) > 0$, por que $2 > 1$ e L, M são crescentes. Seja $c = M(2)/L(2)$. Consideremos a função logarítmica $N : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $N(x) = c \cdot L(x)$. como $N(2) = [M(2)/L(2)] \cdot L(2) = M(2)$, segue que, pelo que provamos acima $N(x) = M(x)$ para todo $x > 0$, ou seja, $M(x) = cL(x)$ para todo $x > 0$, como queríamos. ∎

Pelo teorema que acabamos de provar, podemos observar que, para estudar logarítmos, basta obter uma função crescente $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$. Todas as demais funções logarítmicas resultarão de L pela multiplicação de uma constante conveniente.

Teorema 7.2. *Toda função logarítmica L é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real c, existe um único real positivo x tal que $L(x) = c$.*

Para a demonstração do teorema acima, necessitaremos do seguinte lema técnico, cujos detalhes da demonstração deixaremos para o aluno.

Todo número real α tem a representação decimal

$$\alpha = a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$$
$$= a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots$$

onde a_0 é a parte inteira e os algarismos $a_n, n \geq 1$ podem assumir os valores $0, 1, \ldots, 9$. Para todo $n \geq 0$ escrevemos:

$$\alpha_n = a_0, a_1, \ldots, a_n$$
$$= a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Temos então $\alpha_n \geq \alpha$ e $\alpha - \alpha_n < 1/10^n$ para todo $n \geq 0$. Também, se um número real $x < \alpha$, então existe $n \geq 0$ tal que $x < \alpha_n$. De fato, $x < \alpha$ significa que $\alpha - x$ é um número real positivo. Tomemos n tão grande que $1/10^n < \alpha - x$ e então teremos $\alpha - \alpha_n < 1/10^n < \alpha - x$ e daí resulta que $x < \alpha_n$.

Lema 7.1. *Seja $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função logarítmica. Dados arbitrariamente dois números reais $u < v$, existe $x > 0$ tal que $u < L(x) < v$.*

Prova: Fixe um natural n maior que $(v - u)/L(2)$. Ponha $c = L(2)/n$. Concluímos que os números inteiros $m \cdot c = L(2^{m/n})$, onde $m \in \mathbb{Z}$ devidem a reta real em intervalos justapostos, cujo comprimento c é menor que $v - u$. Assim temos que, pelo menos um destes míltiplos $m \cdot c = L(2^{m/n}$ caino intervalo $I = (u, v)$. Finalmente pondo $x = 2^{m/n}$, temos que $u < L(x) < v$. ∎

Com o lema acima, concluímos que todo intervalo aberto $I = (u, v)$ contém ao menos um valor $L(x)$.

Prova do Teorema 7.2: Seja α um número real. Determinamos sua representação decimal

$$\alpha = a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Para determinar a parte inteira a_0, lembramos que L é uma função crescente ilimitada. Logo existem inteiros k tais que $L(k) > b$. Seja $a_0 + 1$ o menor inteiro tal que $L(a_0 + 1) > b$. Então temos $L(a_0) \leq b < L(a_0 + 1)$.

Em seguida consideremos os números

$$a_0, a_0 + \frac{1}{10}, a_0 + \frac{2}{10}, \ldots, a_0 + \frac{9}{10}, a_0 + 1.$$

Como $L(a_0) \leq b < L(a_0 + 1)$, devem existir dois elementos consecutivos α_1 e $\alpha_1 + 1/10$, nessa sequência, tais que $L(\alpha_1) \leq b <$

$L(\alpha_1 + 1/10)$, isto é, deve existir a_1 inteiro, $0 \leq a_1 \leq 9$, tal que, pondo

$$\alpha_1 = a_0, a_1 = a_0 + \frac{a_1}{10}$$

temos que $L(\alpha_1) \leq b < L(\alpha_1 + 1/10)$. Analogamente considerando os números

$$a_1, a_1 + \frac{1}{10^2}, a_1 + \frac{2}{10^2}, \ldots, a_1 + \frac{9}{10^2}, a_1 + \frac{1}{10},$$

vemos que existe a_2, $0 \leq a_2 \leq 9$ tal que pondo

$$\alpha_2 = a_0, a_1, a_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2},$$

Têm-se $L(\alpha_2) \leq b < L(\alpha_2 + 1/10^2)$.

Procedendo desta maneira, encontramos uma representação decimal de um número real

$$\alpha = a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots,$$

tal que pondo $\alpha_n = a - 0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, temos

$$L(\alpha_n) \leq b < L(\alpha_n + 1/10^n)$$

para todo $n \geq 0$.

Afirmamos agora que $L(\alpha) = b$. De fato, se $L(\alpha) < b$, usaríamos o Lema 7.1 para obter $x > 0$ tal que $L(\alpha) < L(x) < b$. Como L é crescente, segue que $\alpha < x$. Então tomando n suficientemente grande tal que $x - \alpha > \frac{1}{10^n}$ teríamos $\alpha + 1/10^n < x$ e portanto

$$\alpha_n + \frac{1}{10^n} \leq \alpha + \frac{1}{10^n} < x.$$

Como L é crescente, de $x > \alpha_n + 1/10^n$ resultaria

$$L(x) > L\big(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\big) > b,$$

O método usado para determinar a representação decimal do número real

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$$

é uma versão moderna de um processo milenar para resolução de equações que os chineses antigos chamavam o *método do elemento celestial*.

um absurdo, pois o número x foi obtido de modo que $L(x) < b$. Analogamente não podemos ter $L(\alpha) > b$. De fato, usando novamente o Lema 7.1, teríamos $x > 0$ tal que

$$b < L(x) < L(\alpha).$$

Como l é crescente, de $L(x) < L(\alpha)$ concluiríamos que $x < \alpha$. Assim $x < \alpha_n$ para algum n. Então $L(x) < L(\alpha_n) \geq b$, contrariando o fato de que x foi obtido de modo a satisfazer $b < L(x)$. ∎

Corolário 7.1. *Toda função logarítmica* $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre* $\mathbb{R}^+$ *e* $\mathbb{R}$.

Segue ainda do Teorema 7.2 que, dada a função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, existe um único número $a > 0$ tal que $L(a) = 1$. Este número é chamado de *base do sistema de logaritmos* L. Para explicitar tal base, muitas vezes se escreve $L_a(x)$ em vez de $L(x)$. Se L_b e L_a são duas funções logarítmicas, com $L_a(a) = L_b(b) = 1$ então pelo Teorema 7.1 existe $c > 0$ constante tal que $L_b(x) = c \cdot L_a(x)$ para todo $x > 0$. Pondo $x = a$, resulta que $L_b(a) = c$. Portanto temos que

$$L_b(x) = L_b(a) \cdot L_a(x)$$

para todo $x > 0$. Esta é a fórmula *mudança de base* de logaritmos.

Observação 7.3. A notação usual para o ;logaritmo de um número, na base x é $\log_a(x)$.

RESUMO

..

Definição: Um Sistema de Logaritmos ou uma função logarítmica é uma função real $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}^+$ dos números reais positivos, que satisfaz as seguintes propriedades:

A) L é uma função crescente, isto é, $x < y \Longrightarrow L(x) < L(y)$;

B) $L(xy) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.

A função Logarítmica tem as seguintes propriedades:

1. Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é sempre injetiva.

2. O logaritmo de 1 é zero.

3. Se $x > 1$ (x<1) então $L(x) > 0$ ($L(x) < 0$), ou seja, os números maiores que um têm logarítmos positivos e os números positivos menores que um têm logarimos negativos.

4. Para todo $x > 0$, tem-se $L(1/x) = -L(x)$.

5. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$ vale:
$$L(x/y) = L(x) - L(y).$$

6. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo número racional $r = p/q$ tem-se $L(x^r) = rL(x)$.

7. Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada superior e inferiormente.

Temos os seguintes resultados para funções logarítmicas:

Teorema: Dadas as funções logarítmicas $L, M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = cL(x)$ para todo $x > 0$.

Teorema: Toda função logarítmica L é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real c, existe um único real positivo x tal que $L(x) = c$.

Corolário: Toda função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

IEZZI, Gelson., Fundamentos de Matemática Elementar: Logaritmos vol.2, 3.ed., Editora Atual, 1977.

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.