AULA 8

Função Logarítmo Natural e Área de Faixas de Hipérboles

META:

Dar uma interpretação geométrica ao conceito de Função Logarítmica Natural através da área de regiões que consistem em faixas de hipérboles.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir a função logarítmica natural através da área de uma faixa de hipérbole.

Obter e interpretar as propriedades da função Logarítmo Natural, na sua forma geométrica.

PRÉ-REQUISITOS

Noções de área entre curvas e definições de funções Logarítmicas.

8.1 Introdução

Nesta aula, vamos definir a função Logarítmo Natural de uma forma geométrica e para isso começamos por introduzir a definição de área de uma faixa de hipérbole. A concepção geométrica de uma função logarítmica é uma idéia muito antiga. Além de antiga, ela é natural, intuitiva e instrutiva porque constitui uma excelente introdução ao cálculo integral.

8.2 Área de uma Faixa de Hipérbole

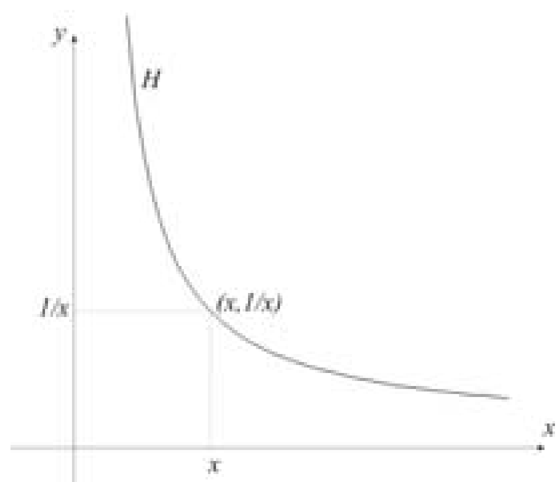


Figura 8.1: Ramo de hipérbole H da função $y = 1/x$.

Consideremos um sistema de eixos cartesianos fixado no plano. Seja H o ramo positivo do gráfico da função $y = 1/x$, isto é, da função que associa a cada número real x o número $1/x$. Então,

$$H = \{(x, y); x > 0, y = \frac{1}{x}\}$$

Definição 8.1. Uma faixa de hipérbole é obtida quando fixamos dois números reais positivos a, b, com $a < b$, e tomamos a região do plano limitada pela duas retas verticais $x = a$, $x = b$, pelo eixo da abscissas, e pela hipérbole H. Indicaremos essa região pelo símbolo H_a^b.

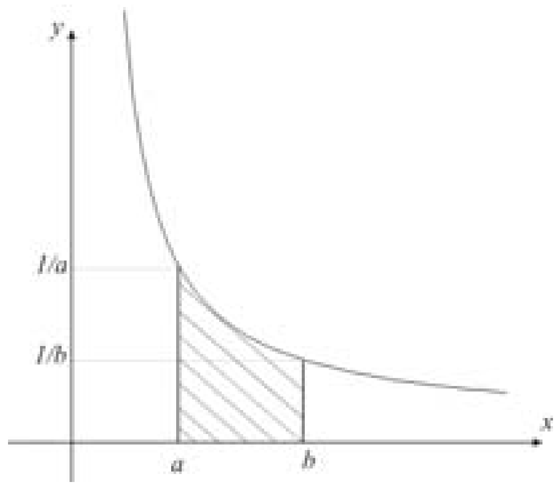


Figura 8.2: Faixa de hipérbole H_a^b.

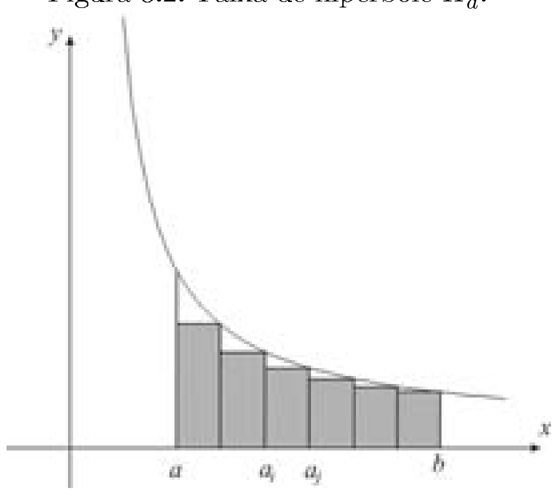


Figura 8.3: Polígono retangular inscrito na faixa H_a^b.

Nestas condições, na notação da teoria dos conjuntos

$$H_a^b = \{(x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$$

Agora vamos mostrar como proceder a fim de calcular a área de uma faixa H_a^b. Por meio de pontos intermediários $a_0 = a$, $a_1, a_2, \ldots, a_n = b$, decompomos o intervalo $[a, b]$ num número finito de intervalos justapostos. Com base em cada um dos intervalos $[a_i, a_j]$ da decomposição, (onde $i < j$) consideramos o retângulo de altura igual a $1/d$. O vértice superior direito desse retângulo toca a hipérbole H. É o que chamaremos um *retângulo inscrito* na faixa H_a^b. A reunião desse retângulos cosntitui o que chamaremos um *polígono retangular inscrito* na faixa H_a^b.

Exemplo 8.1. Considere a faixa H_1^3. Tomamos a decomposição do intervalo $[1, 3]$ através dos pontos intermediários $1, 3/2, 2, 5/2, 3$. Obtemos assim, um polígono regular cuja área é igual a soma das áreas dos quatro retângulos hachurados, conforme a Figura 8.4, ou seja:

$$\begin{aligned} A &= (\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3}) + (\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{5}) + (\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3}) \\ &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{57}{60} \end{aligned}$$

Agora façamos uma subdivisão mais fina do intervalo $[1, 3]$, ou

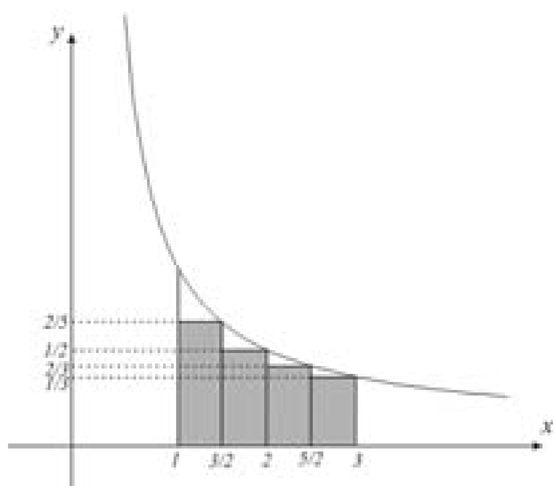


Figura 8.4: Uma aproximação para a área de H_1^3.

seja aumentamos o número de pontos intermediários, por meio dos pontos

$$1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, 3.$$

Obtemos assim um polígono retangular inscrito em H_1^3, formado por 8 retângulos justapostos, cuja área total vale

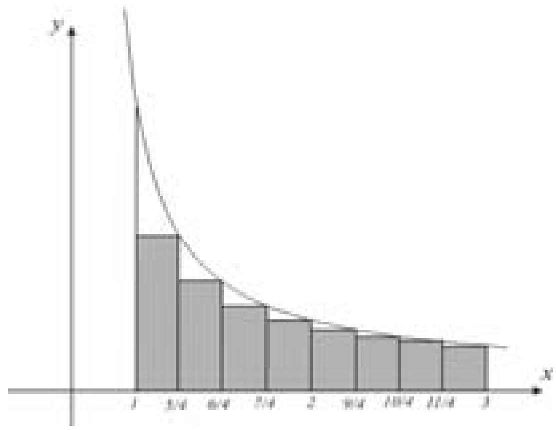


Figura 8.5: Uma aproximação melhor para a área de H_1^3.

$$A = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} = \frac{84.813}{83.160} \sim 1,019.$$

Cada polígono retangular inscrito na faixa H_a^b fornece um valor aproximado por falta para a área de H_a^b. Tanto mais será aproximado este valor quanto mais fina for a subdivisão do intervalo $[a, b]$. Isto é, quanto mais próximos estiverem uns dos outros os pontos da subdivisão, menor será a diferença entre o valor exato da área de H_a^b do seguinte modo:

Observe que a maneira que definimos a área, é exatamente da mesma forma que definimos a soma de Riemann de uma função f em relação a uma partição, ou seja, em relação a uma subdivisão do intervalo $[a, b]$. Assim uma soma de Riemann é a soma das áreas dos retângulos inscritos no gráfico de f, ou seja, a área do polígono retangular P.

Definição 8.2. A área de H_a^b é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^b.

Se escrevemos $A =$ área de H_a^b, teremos $A \geq$ área de P, qualquer que seja o polígono retangular inscrito em H_a^b.

Além disso, refinando suficientemente a subdivisão do intervalo $[a, b]$, podemos obter polígonos retangulares cujas áreas seja tão próximas da área de H_a^b quanto se deseje. Mais precisamente, dado qualquer número $\alpha <$ área de H_a^b, existe um polígono P inscrito em H_a^b tal que $\alpha <$ área de P $<$ área de H_a^b.

Podemos também dizer que a área de H_a^b é o extremo superior do conjunto das áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^b. Isto significa que $A =$ área de H_a^b é o menor número real tal que $A \geq$ área de P para todo polígono P inscrito em $[a, b]$. Dizer que A é o extremo superior do conjunto das áreas dos polígonos retangulares P inscritos em H_a^b tem exatamente o mesmo siginificado que afirmar que os valores aproximados por falta da área H_a^b são as áreas dos polígonos retangulares inscritos nesta faixa.

8.3 Propriedade Fundamental

O fato mais importante a respeito das áreas de hipérbole é expresso pelo teorema abaixo:

Teorema 8.1. *Para todo real $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.*

Prova: Seja R_1 o retângulo inscrito em H, cuja base é o segmento $[c, d]$ do eixo das abcissas, e R_2 o retângulo inscrito em H, cuja base é $[kc, kd]$ sobre o eixo das abcissas. Então área de R_1 é igual a área de R_2. De fato, a área de R_1 é dada por

$$A(R_1) = (d - c) \cdot \left(\frac{1}{d}\right) = 1 - \frac{c}{d},$$

enquanto que a área de R_2 é

$$A(R_2) = (kd - kc) \cdot \left(\frac{1}{dk}\right) = 1 - \frac{c}{d},$$

Consideramos agora um polígono retangular P, inscrito em H_a^b.

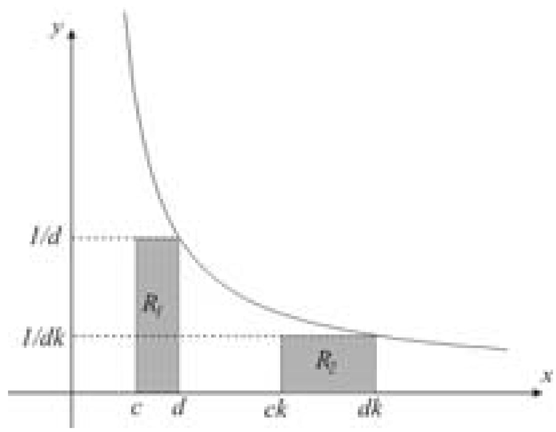


Figura 8.6: Os retângulos R_1 e R_2 que possuem a mesma área.

Se multiplicarmos por k cada uma das abcissas dos pontos de subdivisão de $[a, b]$, determinados por P, obteremos uma subdivisão do intervalo $[ak, bk]$ e portanto um polígono P', inscrito na faixa H_{ak}^{bk}. Cada um dos retângulos que compõem P' tem a mesma área que o retângulo correspondente em P. Logo a área de P' é igual à de P. Concluímos que para cada polígono retangular inscrito em H_a^b, existe um inscrito em H_{ak}^{bk} com a mesma área. Analogamente (dividindo abcissas por k) veríamos que, para cada polígono retangular Q' inscrito em H_{ak}^{bk} existe outro Q, de mesma área, inscrito em H_a^b. Isto significa que as áreas destas duas faixas são números que possuem exatamente as mesmas aproximações inferiores, e portanto são iguais. ∎

Uma consequência do teorema acima, é que podemos restringir nossa consideração às áreas das faixas da forma H_1^c, pois

$$A(H_a^b) = A(H_1^{b/a}) = A(H_1^c), \qquad\qquad c = b/a.$$

Quando $a < b < c$, temos que

$$A(H_a^b) + A(H_b^c) = A(H_a^c). \tag{8.21}$$

cuja verificação é imediata, pois basta observar que a faixa H_a^c é a justaposição das faixas H_a^b e H_b^c.

Normalmente, a área de uma figura não é um número negativo. Mas as vezes é conviniente usar *áreas orientadas*, ou seja, providas de sinal + ou −. *Convencionaremos que a área da faixa de hipérbole H_a^b será positiva quando $a < b$, negativa quando $a > b$ e zero quando $a = b$. Para deixar mais clara esta convenção, escrevemos*

$$\text{AREA } H_a^b$$

com letras maíusculas, para indicar que a área orientada (provida de sinal). A área usual, com valores ≥ 0, sera escrita como $A =$ área H_a^b. Assim

$$\begin{aligned} &\text{AREA } (H_a^a) = 0; \\ &\text{AREA } (H_a^b) = A(H_a^b), \text{se } a < b; \\ &\text{AREA } (H_a^b) = -A(H_a^b), \text{se } b < a. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Observação 8.1. Observe que a última convenção da equação (8.22) implica em considerar áreas negativas. Isto de uma certa forma, contraria a tradição mas, em compensação, a igualdade acima, dada pela Equação (8.21) torna-se válida sem restrições.

Observação 8.2. O Teorema 8.1 continua válido mesmo com esta convenção de sinais. De fato, ainda que se tenha $b < a$, será também $bk < ak$ pois $k > 0$. Portanto, se for $b < a$ teremos

$$A(H_b^a) = -A(H_a^b) = -A(H_{ak}^{bk}) = A(H_{bk}^{ak}). \tag{8.23}$$

8.4 Função Logarítmo Natural

Nesta seção vamos definir a função logarítmo natural $l : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de uma maneira geométrica e independente da função logarítmo em uma base qualquer.

Definição 8.3. Seja $x \in \mathbb{R}^+$. O logaritmo natural de x, denotado por $\ln(x)$, é a área da faixa de hipérbole H_1^x, ou seja,

$$\ln(x) = \text{AREA } (H_1^x).$$

Lembramos que pela convenção de sinal que fizemos teremos que $A(H_1^x) < 0$ sempre que $0 < x < 1$, ou seja, $\ln(x) < 0$ sempre que $0 < x < 1$. Segue também que $\ln(x) > 0$ sempre que $x > 1$ e que $\ln(x) = 0$ quando $x = 1$, pois em $x = 1$ temos $A(H_1^1) = 0$.

Definição 8.4. A função Logarítmo Natural é a função $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, que faz corresponder a cada número real $x > 0$ o número $f(x) = \text{AREA } (H_1^x)$

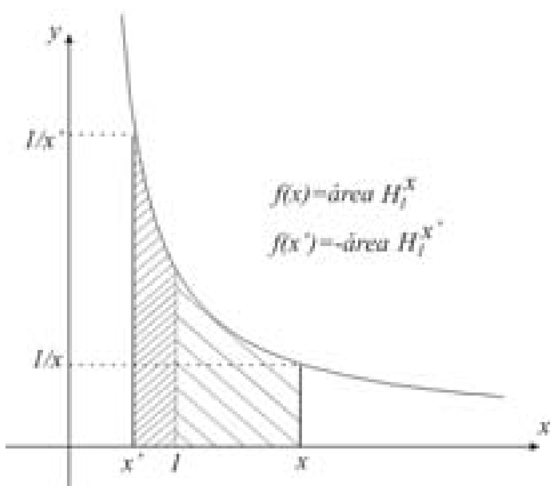


Figura 8.7: Logaritmo Natural.

Teorema 8.2. *A função* $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função logarítmica.*

Prova: Devemos mostrar que a função ln goza das propriedades A) e B) da definição de um sistema de logaritmos. Começamos provando A). Já provamos acima os seguintes fatos:

$$\begin{aligned} A(H_x^{xy}) &= A(H_1^x) + A(H_x^{xy}) \\ A(H_x^{xy}) &= A(H_1^y) \end{aligned} \tag{8.24}$$

onde o primeiro termo da Equação (8.24) acima, vale para qual for a posição relativa dos pontos abcissa $1, x, xy$ sobre o eixo horizontal. Assim segue que

$$A(H_1^{xy}) = A(H_1^x) + A(H_1^y), \tag{8.25}$$

isto é,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \tag{8.26}$$

e portanto, vale a propriedade A). Provamos agora que ln é uma função crescente. Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, dizer que $x < y$ significa dizer que existe um número real $a > 1$ tal que $y = ax$. Segue que

$$\ln(y) = \ln(ax) = \ln(a) + \ln(x). \tag{8.27}$$

Como $a > 1$, segue que $\ln(a) > 0$. Portanto $\ln(y) > \ln(x)$, o que prova a propriedade B). ∎

Alguns aurotres chamam o logaritmo natural de *logaritmo neperiano*, em homenagem a John Napier, autor da primeira tábua de logaritmos, em 1614. Entretanto, tal denominação não é inteiramente apropriada, pois o logaritmo originalmente definido por Napier não coincide com o logaritmo natural

Observação 8.3. Da definição de um sistema de logaritmos, segue que existe um número real positivo, e tal que

$$L_e(x) = \ln(x)$$

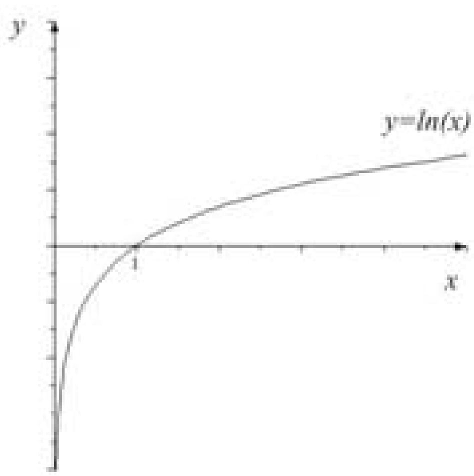
ou seja, e é a base do sistema de logaritmos. O número e, base dos logarítmos naturais, é caracterizado pelo fato que seu logaritmo natural é igual a 1, ou seja, AREA $H_1^e = 1$. O número e é irracional e um valor aproximado para esta constante é $e = 2,718281828459$.

8.4.1 Gráfico da função $\ln$

O gráfico da função ln é o conjunto

$$G = \{(x, \ln(x)); x > 0\}$$

Lembramos que pelo fato de ln ser uma função logarítmica, é uma



função crescente, ilimitada nos dois sentidos (superior e inferiormente) e sobrejetiva. Estes fatos mostram que o gráfico de ln é uma curva contida no primeiro e quarto quadrantes, que corta o eixo da abcissas no ponto $x = 1$ e que, quando x varia entre 0 e $+\infty$, a ordenada do ponto $(x, \ln(x))$ sobre a curva cresce de $-\infty$ a $+\infty$.

RESUMO

Função Logaritmo Natural: Forma Geométrica

Definição: Uma faixa de hipérbole é obtida quando fixamos dois números reais positivos a, b, com $a < b$, e tomamos a região do plano limitada pela duas retas verticais $x = a$, $x = b$, pelo eixo da abscissas, e pela hipérbole H. Indicaremos essa região pelo símbolo H_a^b. Então

$$H_a^b = \{(x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$$

Definição: A área de H_a^b é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^b.

Teorema: Para todo real $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.

Definição: A função Logarítmo Natural é a função $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, que faz corresponder a cada número real $x > 0$ o número $f(x) =$ AREA (H_1^x).

ATIVIDADES

Atividade. 8.1. Mostre que o número e pode ser introduzido como $e := \lim_{n \longrightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$.

(a)- Para isso, primeiramente considere a faixa H_1^{1+x} $(x > 0)$ e os retângulos inscritos e escritos nesta faixa, ambos com a mesma base $[1, 1 + x]$. Prove que

$$\frac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x.$$

(b)-Considere $-1 < x < 0$ e assim a faixa H_{1+x}^x. Considerando o retângulo de base $-x$ e altura 1 inscrito na faixa H_{1+x}^x e o retângulo de mesma base e algura $1/(1 + x)$. Segue que

$$-x < -\ln(1 + x) < -\frac{x}{1 + x}.$$

Use esta desigualdade, para mostrar que $e := \lim_{n \longrightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ quando $-1 < x < 0$.

(c)- Faça $x = a/n$ emostre que $e^a = \lim_{n \longrightarrow \infty} (1 + a/n)^n$.

Atividade. 8.2. Considere a parábola $y = x^2$. Defina a área $A(x^2)_a^b$ da faixa dessa parábola. Divida o intervalo $[0, 1]$ em $n + 1$ partes iguais. Mostre que o polígono retangular inscrito na faixa da parábola $y = x^2$ tem área igual a

$$\frac{1}{(n+1)^3}(1 + 2^2 + 3^2 + ...n^2).$$

Fazendo o uso da formula $1+2^2+3^2+\ldots+n^2 = n^3/3+n^2/2+n/6$, verifique que

$$area \quad P_{n+1} = 1/3 \frac{1}{(1 + 1/n)^3}(1 + 3/2n + 1/2n^2).$$

Conclua que $A(x^2)_0^1 = 1/3$. Isto prova o *Teorema de Arquimedes*, segundo o qual a área do *triângulo prabólico* de base $[0, 1]$ é um terço do área do quadrado de mesmo lado.

Atividade. 8.3. Mostre que se os números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forma uma progressão geométrica então os termos $\ln(a_1), \ln(a_2), \ldots, \ln(a_n)$ formam uma progressão aritmética.

Atividade. 8.4. Mostre que para todo $x > 0$ e todo $h > -x$ não nulo têm-se que

$$\frac{\ln(x + h) - ln(x)}{h} = \ln(1 + h/x)^{1/h}$$

Atividade. 8.5. Mostre que a soma

$$S_p = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/n$$

é maior que $\ln(p + 1)$ e conclua que $\lim_{n \longrightarrow \infty} S_p = \infty$.

Atividade. 8.6. Mostre que para todo inteiro $p > 0$, temos

$$0 < S_p - \ln(p + 1) < 1$$

e também $S_p - \ln(p+1)$ cresce com p.

Obs: O limite $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} S_p - \ln(p+1)$é chamado constante de Euler.

Atividade. 8.7. Sejam $a \leq x \leq b$ números positivos. Prove que

$$\ln b - \ln x \leq \frac{b-x}{x} \quad \text{e} \quad \ln x - \ln a \geq \frac{x-a}{x}.$$

conclua que

$$\frac{\ln b - \ln x}{\ln x - \ln a} \leq \frac{b-x}{x-a} \quad \text{e} \quad \frac{\ln b - \ln a}{\ln x - \ln a} \leq \frac{b-a}{x-a}.$$

Atividade. 8.8. Determine o valor de x nas equações abaixo:

(a)- $\ln x = \ln(a-b) + \ln(a+b)$.

(b)- $\ln x = 3\ln a + -4\ln b + 5\ln c$.

(c)- $1/7 \ln r + 2\ln s = 2/3 \ln t^3 + \ln x$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

..

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.

Lima, E.L., Logaritmos, 2.ed., SMB, 1996.