AULA

9

Funções Logarítmicas: Uma Abordagem Geométrica

META:

Dar uma interpretação geométrica ao conceito de Função Logarítmica através da área de regiões que consistem em faixas de hipérboles.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir a função logarítmica através da área de uma faixa de hipérbole.

Obter e interpretar as propriedades da função Logarítmo através da função logaritmo natural.

PRÉ-REQUISITOS

Noções de área entre curvas e definições de funções Logarítmicas.

9.1 Introdução

Agora vamos definir um sistema de logaritmo, em qualquer base, como a área de uma faixa de hipérbole $y = k/x$ para alguma constante $k > 0$.

9.2 Funções Logarítmicas: Uma abordagem Geométrica

Seja k uma constante positiva e consideramos o ramo de hipérbole $y = k/x$ tal que $x > 0$. Para cada valor de k teremos um novo sistema de logaritmos, onde o caso $k = 1$, corresponde aos logaritmos naturais estudados anteriormente. Dados dois pontos de abcissas x e y, indiquemos com $H(k)_a^b$ a faixa de hipérbole $y = k/x$ compreendida entre as retas $x = a$ e $x = b$. Quando $k = 1$ continuaremos a indicar com H_a^b a faixa da hipérbole $y = 1/x$ situada entre as retas $x = a$ e $x = b$.

Proprosição 9.17. *A área da faixa $H(k)_a^b$ é igual a k vezes a área da faixa H_a^b*

Prova: Dado um segmento $[c, d]$ contido em $[a, b]$, um retângulo de base $[c, d]$, inscrito na hipérbole $y = 1/x$, tem altura $1/d$, equanto que o retângulo de mesma base, inscrito na hipérbole $y = k/x$, tem altura k/d. Logo, a área do segundo retângulo é k vezes a ára do primeiro. Toda subdivisão do intervalo $[a, b]$, determina dois polígonos retangulares, um inscrito na faixa H_a^b e o outro inscrito na faixa $H(k)_a^b$. Segue que a área do segundo é k vezes a área do primeiro. Concluímos que:

$$\text{AREA } H(k)_a^b = k \cdot \text{AREA } H_a^b,$$

pois são dois números reais com as mesmas aproximações inferiores.

∎

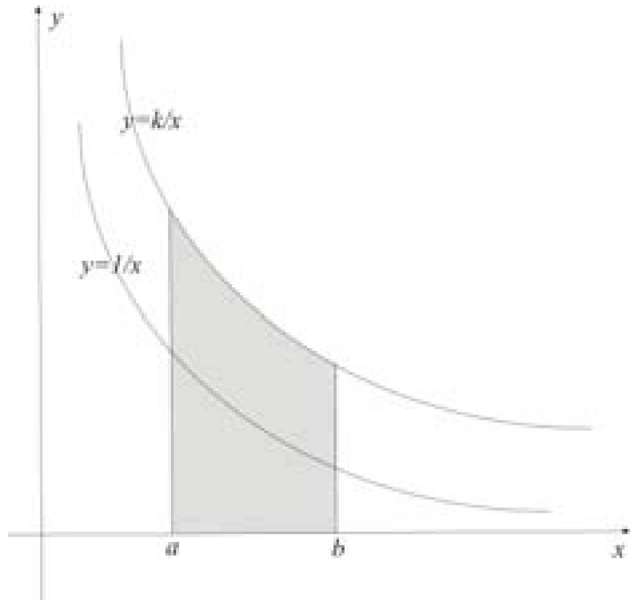

Figura 9.1: Faixas de hipérboles $H(k)_a^b$ e H_a^b.

Fixada a constante $k > 0$, indroduzimos a função, pondo, por definição, para cada $x > 0$,

$$\log(x) = \text{AREA } H(k)_1^x.$$

Como acabamos de ver, isto equivale a dizer que

$$\log(x) = \text{AREA } H(k)_1^x = k \cdot \text{AREA } H_1^x = k \cdot \ln(x).$$

Claramente esta nova função define um sistema de logaritmos. De fato, Desde que $\ln(x)$ é crescente, segue que $\log(x)$ é crescente e assim fica provado a proprieade A). Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} \log(xy) &= k \cdot \ln(xy) = k \cdot (\ln(x) + \ln(y)) = k \cdot \ln(x) + k \cdot \ln(y) \\ &= \log(x) + \log(y) \end{aligned}$$

e assim fica provado a propriedade B) da definição de um sistema de logaritmos.

Seja a a base do sistema de logaritmos log, tal que $\log(a) = 1$. Temos então que $\log(a) = k \cdot \ln(a) = 1$. Então vale a seguinte relação:

$$k = \frac{1}{\ln(a)}$$

A notação para o logaritmo de base a de um número $x > 0$ é

$$\log_a(x).$$

Da maneira que definimos $\log(x)_a$ é a área da faixa de hipérbole $y = 1/(x \cdot \ln(a))$ compreendida entre 1 e x. Observamos que com a determinação de k obtemos a seguinte relação

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Observação 9.1. Qualquer número real positivo poderia ser escolhido como base do sistema de logaritmos. Mas como fizemos no começo a hipótese de que $k > 0$ (onde $k = 1/\ln(a)$), estamos considerando apenas logaritmos onde a base a é maior que 1. A definição

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

poderia também servir de definição de $\log_a(x)$ mesmo quando $0 < a < 1$, notando-se que, neste caso, como $\ln(a) < 0$, os números entre 0 e 1 terão logaritmos positivos, enquanto os números maiores do que 1 terão logaritmos negativos. Quando $0 < a < 1$, podemos por $b = 1/a$. Então $b > 1$ e $\log_a(x) = -\log_b(x)$. Assim, não há enorme necessidade de estudar logaritmos com base $a < 1$. A rigor, se considerarmos $0 < a < 1$ então $\log_a(x)$ será decrescente.

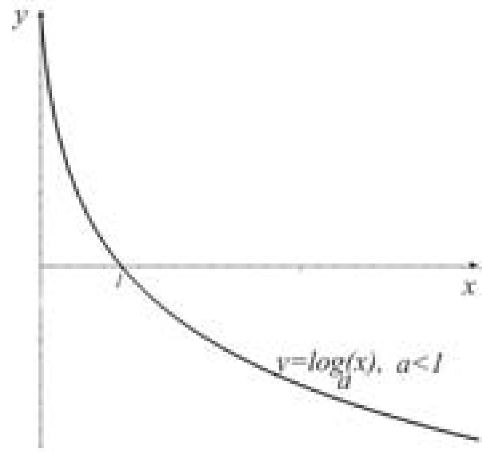

Figura 9.2: Gráfico da função Logarítmica $y = \log_a(x)$ com base $a < 1$.

Exemplo 9.1. Sejam a e b números reais maiores que um. Para todo $x > 0$ tem-se

$$\log_b(x) = \log_b(a) \cdot \log_a(x).$$

De fato, Como $\log_b(x)$ e $\log_a(x)$ são dois sistemas de logaritmos, então $\log_b(x) = c\log_a(x)$. Fazendo $x = a$ na ultima relação obtemos $\log_b(a) = c\log_a(a)$, ou seja, $c = \log_b(a)$.

RESUMO

..

Função Logarítmica Fixada a constante $k > 0$, indroduzimos a função, pondo, por definição, para cada $x > 0$,

$$\log(x) = \text{AREA } H(k)_1^x.$$

Como acabamos de ver, isto equivale a dizer que

$$\log(x) = \text{AREA } H(k)_1^x = k \cdot \text{AREA } H_1^x = k \cdot \ln(x).$$

Ainda Valem as seguintes relações importantes:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

$$\log_b(x) = \log_b(a) \cdot \log_a(x).$$

ATIVIDADES

..

Atividade. 9.1. Sejam $0 < a < b$ e $k > 0$. Prove que a faixa da parábola $y = x^2$ situada sobre o intervalo $[ak, bk]$ tem área igual a k^3 vezes a faixa situada sobre o intervalo $[a, b]$.

Atividade. 9.2. Defina uma função real de variável real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ponde $f(x) =$ área da faixa da parábola $y = x^2$ situada no intervalo $[0, x]$, isto é, $f(x) = A(x^2)_0^x$ e adote a conveção de que tal áera é negativa se $x < 0$. Mostre que f satisfaz

$$f(kx) = k^3 f(x),$$

para cada $k \in \mathbb{R}$. Seja $a = f(1)$. Conclua que $f(x) = ax^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A partir do exercício anterior conclua que $a = 1/3$ e então $f(x) = x^3/3$.

Atividade. 9.3. Quanto vale a área da faixa da parábola $y = x^2$ sobre o intervalo $[2, 3]$? A mesma pergunta para um intervalo qualquer $[a, b]$.

Atividade. 9.4. Mostre que se $a < b$ então a faixa H_a^b da hipérbole $y = 1/x$ tem área A que satisfaz

$$1 - a/b < A < b/a - 1$$

Atividade. 9.5. Prove que H_{160}^{480} tem área maior que 1 e menor que $1,2$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.

Lima, E.L., Logaritmos, 2.ed., SMB, 1996.