AULA
10

Funções Exponenciais

META:

Definir e obter as propriedades da função exponencial.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir potencias de números reais com expoente, natural, inteiro e racional e depois extender o conceito para expoentes irracionais.

Obter a definição da função exponencial como inversa da função logarítmica.

Esboçar o gráfico de uma função exponencial.

PRÉ-REQUISITOS

Propriedades básicas de números reais e funções logarítmicas.

10.1 Introdução

As funções exponenciais, são uma das classes de funções mais importantes da matemática, pois estas são usadas como modelo matemático de muitos problemas da matemática de das ciências exatas. Um dos exemplos mais clássicos é no modelo matemática que representa o número de indivíduos de uma determinada população no instante t. Esta função tem a propriedade que a taxa de crescimento relativo $[f(t+h) - f(t)]/f(t)$, só depende de h e não de x.

10.2 Potências de Expoente Racional

Seja a um número real positivo. Para todo n natural, a potência a^n de base a e expoente n é definida como o produto de n fatores iguais a a. Ou seja,

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ vezes}}.$$

Observamos que se $n = 1$ não temos produto de fatores e então pomos por definição $a^1 = a$. Assim a definição indutiva de a^n é: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a \cdot a^n$. Temos ainda que, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ vale a seguinte relação:

$$a^{m+n} = a^n \cdot a^m. \tag{10.28}$$

De fato, em ambos os membros da igualdade temos o produto de $m + n$ fatores iguais a a. Aplicando sucessivamente a fórmula (10.28) obtemos a relação

$$a^{m_1+m_2+\ldots+m_k} = a_1^m \cdot a_2^m \cdot \ldots \cdot a_k^m, \tag{10.29}$$

para qualquer $m_1, m_2, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$. Em particular obtemos que $(a^m)^k = a^{mk}$.

Seja $a > 1$, então multiplicando esta desigualdade por a^n, obtemos que $a^{n+1} > a^n$. Segue então que

$$a > 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 < a < a^2 < \ldots < a^n < a^{n+1} < \ldots. \qquad (10.30)$$

De maneira análoga, concluímos que

$$0 < a < 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 > a > a^2 > \ldots > a^n > a^{n+1} > \ldots. \qquad (10.31)$$

Seguem das equações (10.30) e (10.31), que a sequência cujo $n-$ésimo termo é a^n é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Para $a > 1$ a sequência formada pelas potências a^n, com $n \in \mathbb{N}$, é ilimitada superiormente, ou seja, nenhum número real c, pode ser superior a todas as potências a^n, mais especificamente, dado arbitrariamente $c \in \mathbb{R}$, pode-se encontrar sempre $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > c$. Para verificar isto, basta escrever $a = 1 + d$. Pela *Desigualdade de Bernoulli*, temos que $a^n > 1+nd$. Logo, se tomarmos $n > (c-1)/d$ teremos $1 + nd > c$ e assim $a^n > c$.

De modo análogo, se $0 < a < 1$, se escrevemos $b = 1/a$ teremos $b > 1$. Logo, pelo que vimos acima, considerando agora a sequência b^n, dado $c \in \mathbb{R}$ podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n > 1/c$, ou seja, $\frac{1}{a^n} > \frac{1}{c}$ e assim $a^n < c$. Concluímos que se $0 < a < 1$, a sequência a^n decresce abaixo de qualquer cota positiva, ou seja, a sequência decrescente é ilimitada inferiormente.

No que segue, vamos dar um significado à potencia a^n, quando $n \in \mathbb{Z}$ é um número inteiro e de maneira que que seja mantida válida

Desigualdade de Bernoulli: Sejam $x > -1$ e n inteiro não nulo. Então

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

De fato, procedendo por indução sobre n, obtemos $(1+x)^0 = 1$ e então vale a igualdade. Suponhamos, por hipótese de indução que $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Multiplicamos ambos os lados da desigualdade por $1+x$, o qual é positivo, desde que $x > -1$. Assim segue que:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

donde a ultima desigualdade segue do fato que $nx^2 \geq 0$.

a propriedade dada pela equação (10.28), ou seja $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.
Primeiramente de

$$a^1 = a^{0+1} = a^0 \cdot a^1 = a^0 \cdot a$$

donde resulta que $a^0 = 1$. Por outro lado

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \quad \text{logo} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \qquad (10.32)$$

Assim, a definição de a^n $(a > 0)$ quando n é um inteiro qualquer de tal forma que vale a igualdade $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, é dada por: $a^0 = 1$ e $a^{-n} = a^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
A função $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, dada por $f(n) = a^n$, além de cumprir a igualdade fundamental

$$f(m+n) = f(m) \cdot f(n),$$

e ainda é crescente quando $a > 1$ e descrescente quando $0 < a < 1$.
Segue em particular que, para $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $a^{-n} < 1 < a^n$ e $a^0 = 1$.
Prosseguindo, vamos dar um sentido à potência a^r quando $r = m/n$ é um número racional (onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$), de modo que continue válida a regra $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. Desta igualdade resulta que:

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r = a^{r+r+\ldots+r} = a^{rn} = a^m.$$

Portanto a^r é o número real positivo cuja $n-$ésima potência é igual a a^m. Por definição de raiz, este número é $\sqrt[n]{a^m}$, a raiz $n-$ésima de a^m. Assim, a única maneira de definir a potência a^r, com $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, consiste em pôr:

$$(a^r) = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Sejam $r = m_1/n_1$ e $s = m_2/n_2$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Temos que:

$$a^{r+s} = a^r \cdot a^s.$$

De fato, sabemos que:

$$(a^{r_1})^{n_1} = a^{m_1} \qquad (a^{r_2})^{n_2} = a^{m_2}.$$

Logo:

$$\begin{aligned}(a^{r_1} \cdot a^{r_2})^{n_1 n_2} &= (a^{r_1})^{n_1 n_2} \cdot (a^{r_2})^{n_1 n_2} = a^{r_1 n_1 n_2} \cdot a^{r_2 n_1 n_2} \\ &= a^{m_1 n_2} \cdot a^{m_2 n_1} = a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}.\end{aligned}$$

Vemos que $a^{r_1} \cdot a^{r_2}$ é o número cuja $n_1 n_2$-ésima potência vale $a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}$, ou seja,

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{(m_1 n_2 + m_2 n_1)/n_1 n_2}.$$

e observando que

$$\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \frac{m_2}{n_2} = r_1 + r_2,$$

obtemos $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$.

Consideramos a sequência, cujo $r-$ésimo termo é a^r, $r \in \mathbb{Q}$. Então se $a > 1$ temos que a sequência é crescente. De fato, se $r = m/n$; $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ e $s = p/q$; $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ e $r > s$ temos que $mq > np$ (com $mq, np \in \mathbb{Z}$). Segue, como vimos anteriormente que se $a > 1$ então

$$a^{mq} > a^{np} \quad \Longrightarrow \quad (a^m)^q > (a^p)^n, \tag{10.33}$$

Lembrando que segue da definição que $(a^r)^n = a^m$ e $(a^s)^q = a^p$. Logo, da equação (10.33) segue que:

$$(a^m)^q > (a^p)^n, \quad \Longrightarrow \quad (a^r)^{nq} > (a^s)^{nq}, \tag{10.34}$$

o que nos dá $a^r > a^s$ e portanto se $a > 1$ a sequência a^r é crescente. De maneira análoga mostra-se que se $0 < a < 1$ a sequência a^r, $r \in \mathbb{Q}$ é decrescente.

Consideremos a função $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(r) = a^r$. Temos que f não é sobrejetiva, ou seja, fixado um número $a > 0$ nem todo número real positivo y é da forma a^r com r racional. Isto pode ser observado do fato que $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, e o mesmo ocorre com sua imagem $f(\mathbb{Q})$, mas $\mathbb{R}^+$ não é enumerável.

Exemplo 10.1. Seja $a = 10$ e indagamos se existe algum número racional $r = m/n$ tal que $10^{m/n} = 11$, ou seja, tal que $10^m = 11^n$, onde $m, n \in \mathbb{N}$. É claro que 10^m se escreve como 1 seguindo de m zeros enquanto 11^n não pode ter esta forma. Logo o número 11 não pertence a imagem da função $r \longmapsto 10^r$, $r \in \mathbb{Q}$.

Lema 10.2. *Fixado o número real $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

Antes de demonstrar este lema, enfatizamos seu significado. As potências a^r embora não contenham todos os números reais positivos, estão espalhadas por toda parte de $\mathbb{R}^+$.

Prova: Sejam $0 < \alpha < \beta$, vamos mostrar que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$. Por simplicidade vamos supor que a e α sejam maiores que um. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Desde que as potências de expoente natural de números maiores que 1 crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos obter números naturais M e n tais que:

$$\alpha < \beta < a^M, \quad \text{e} \quad 1 < a < \Big(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\Big)^n.$$

Da última relação acima decorrem sucessivamente

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}, \quad \text{e} \quad 0 < a^M(a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha.$$

Logo

$$\begin{aligned} \tfrac{m}{n} \geq M \qquad & \Longrightarrow \quad 0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha \\ & \Longleftrightarrow \quad 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha. \end{aligned}$$

Assim as potências

$$a^0 = 1, \quad a^{1/n}, \quad a^{2/n}, \quad \ldots, \quad a^M$$

são extremos de intervalos consectivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{m/n}$ está contido em $[\alpha, \beta]$. ∎

Definição 10.1. Seja a um número real positivo, $a \neq 1$. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, denotada por $f(x) = a^x$ é definida de modo que tenha as seguintes propriedades para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;

(ii) $a^1 = a$;

(iii) $x < y \Longrightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Longrightarrow a^x > a^y$ quando $0 < a, 1$

Se uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem a propriedade $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, então se f assume o valor 0 então f é identicamente nula e se não for identicamente nula, então $f(x) > 0$ para todo $x > 0$. Deixaremos como atividade a demonstração destes fatos, a qual segue imediatamente da propriedade (i).

Se a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem as propriedades (i) e (ii), então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$f(n) = f(1+1+\ldots+1) = f(1) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(1) = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n.$$

Usando ainda a propriedade (i), resulta ainda como vimos antes, que para todo número racional $r = m/n$, $n \in \mathbb{N}$, deve-se ter $f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$. Portanto $f(r) = a^r$ é a única função $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, tal que $f(r+s) = f(r) \cdot f(s)$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$. A propriedade (iii) nos informa que a função exponencial deve ser crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

A partir de tudo isso que acabamos de ver, concluiremos que existe uma única maneira de definir o valor de $f(x) = a^x$ quando x é irracional. Para fixar idéias, vamos supor que $a > 1$. Então a^x tem a seguinte propriedade:

$$r < x < s, \quad \text{com } r, s \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad a^r < a^x < a^s.$$

Ou seja, a^x é o número real cujas aproximações por falta são a^r, com $r < x$, $r \in \mathbb{Q}$, e cujas aproximações por excesso são a^s, com $x < s$, $s \in \mathbb{Q}$. Não podem existir dois números reais diferentes, digamos $A < B$, com a propriedade acima. Se existissem tais A e B teríamos

$$r < x < s, \quad \text{com } r, s \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad a^r < A < B < a^s,$$

e então o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o Lema 10.2.

Portanto, quando x é irracional, a é o único número real cujas aproximações por falta são as potências a^r, com r racional menor que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, com s racional maior que x.

Temos ainda, que valem as seguintes propriedades:

Propriedade 10.8. *A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.*

De fato, todo intervalo em $\mathbb{R}^+$ contém valores $f(r) = a^r$, segundo o Lema 10.2. Mais precisamente, se $a > 1$ então a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande. E se $0 < a < 1$ então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$ tem valor absoluto grande.

Propriedade 10.9. *A função exponencial é contínua.*

Isto significa que dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Dito de outro modo, o limite de a^x quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0}. Para provar este fato, escrevemos $x = x_0 + h$, logo $x - x_0 = h$ e entãp $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|$. Ora, sabemos que a^h pode ser tomado tão próximo de 1 quanto se deseje, desde que h seja suficientemente pequeno. Como a^{x_0} é constante, podemos fazer o produto $a^{x_0}|a^h - 1|$ tão pequeno quanto queriamos, logo teremos que a^x tende a a^{x_0} quando x tende a x_0.

Propriedade 10.10. *A função exponencial* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$ *é sobrejetiva.*

Usando o Lema 10.2 e escolhemos para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $(b - 1/n, b + 1/n)$, de modo que $|b - a^{r_n}| < 1/n$ e assim $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} a^{r_n} = b$. Para fixar idéias, supomos $a > 1$. Escolhemos as potências a^{r_n}, de tal maneira que:

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \ldots < a^{r_n} < \ldots < b.$$

Certamente, podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$. Então a monotonicidade da função a^x nos assegura que $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots < s$. Assim (r_n) é uma sequência monótona, limitada superiormente por s. A completeza dos números reais garante então que os

r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $a^x = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} r_n = x$. A função exponencial sendo contínua, implica que $a^x = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} a^{r_n} = b$.

10.2.1 Gráfico da Função exponencial

Vemos que se $a > 1$ a função exponencial a^x é crescente, contínua, ilimitada superiormente e tende a zero quando x se torna muito negativo. Quando $0 < a < 1$ a função a^x é descrescente, contínua, ilimitada superiormente e tende a zero quando x se torna muito grande. Veja o gráfico na Figura 10.2.1 nos dois casos, num mesmo sistema de coordenadas.

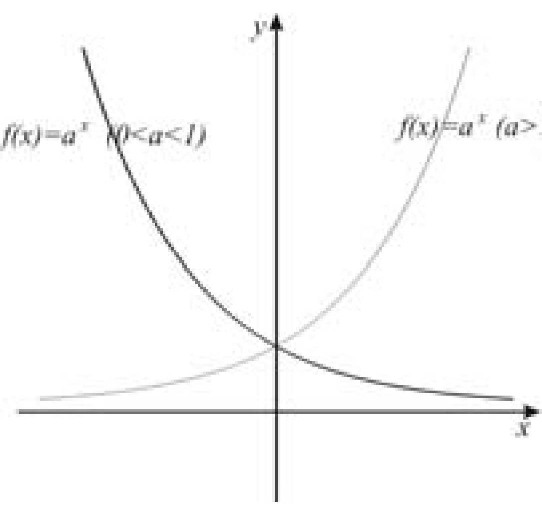

Figura 10.1: Gráfico da função exponencial, num mesmo sistema de eixos, para os casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.

10.3 Funções Exponenciais × Funções Logarítmicas

Nesta aula definimos a função exponencial $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Porém o fizemos, indenpendente do conceito de função logarítmica. As duas funções estão intimamente ligadas já que uma é a inversa da outra. Vejamos, assim uma forma de definir a função exponencial a partir da função logarítmica.

Definição 10.2. Dado $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, a potência a^x é o único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a $x \cdot \ln(a)$.

Seja $b > 0$. Então:

$$\log_b(a^x) = \frac{\ln(a^x)}{\ln(b)} = x\frac{\ln(a)}{\ln(b)} = x \cdot \log_b(a)$$

Logo, a fórmula que serviu para a definição de a^x, dada em termos de logaritmos naturais, é portanto válida para logaritmos em qualquer base. Portanto, em particular fazendo $b = a$, temos que:

$$\log_a(a^x) = x.$$

Recaímos assim na definição tradicional de logarítmo, ou seja, $\log_a(x) = y \quad \Longleftrightarrow a^y = x$.

Precisamos mostrar a equivalência entre as duas definições para função exponencial. Então precisamos verificar que são válidas as propriedades (i), (ii) e (iii) da Definição 10.2. Temos que:

$$\log_a(a^x \cdot a^y) = \log_a(a^x) + \log_(a^y)$$

e

$$\log_a(a^{x+y}) = x + y.$$

Portanto os números $a^x \cdot a^y$ e a^{x+y} têm o mesmo logaritmo na base a. Concluímos que $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Também $\log_a(a^0) = 0$ e como $\log_a(1) = 0$ segue que $a^0 = 1$.

Ainda é fácil verificar se $a > 1$, a função $x \longmapsto a^x$ é crescente e quando $0 < a < 1$ é decrescente.

10.4 Função Exponencial na base e

Já vimos que o número e é tal que a área da faixa de hipérbole $y = 1/x$, de 1 até x vale e, ou seja AREA$H_1^e = 1$. O número e é chamado a base dos lugaritmos naturais e $\ln(e) = 1$. Vamos mostrar agora que o número e também é o limite de $(1 + 1/n)^n$.

Proprosição 10.18.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Prova: Considere a Figura 10.2 abaixo:

Nela temos um retângulo menor, cuja base mede x e cuja altura mede $1/(1+x)$, contido na faixa H_1^{1+x} e esta faixa, por sua vez, contida no retângulo maior, com a mesma base medida x e altura igual a 1. Comparando as áreas dessas três figuras, podemos escrever, para todo $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Dividindo por x:

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

Tomando $x = 1/n$:

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1,$$

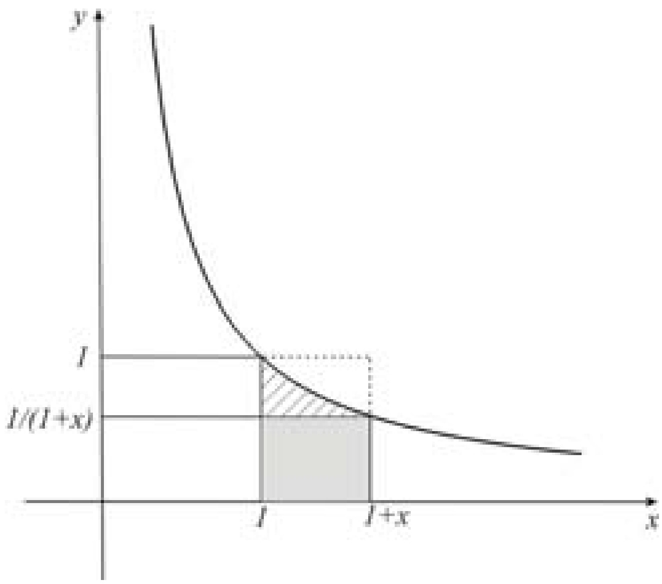

Figura 10.2: Construção geométrica que mostra a desigualdade $x/(1+x) < \ln(1+x) < x$.

e portanto

$$e^{\frac{n}{n+1}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando n cresce indefinidamente, $n/(n+1)$ se aproxima de 1, logo $e^{n/(n+1)}$ tende a e. Segue desta últimas desigualdades que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Observamos que o resultado $\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ foi obtido para $x > 0$. Mas seja $x > 0$ ou $-1 < x < 0$ temos que vale o resultado

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e \tag{10.35}$$

onde fizemos $x = 1/n$. Agora Tomando $x = \alpha/n$, vemos que $1/x = n/\alpha$ e que $x \longrightarrow 0$ se , e somente se, $n \longrightarrow \infty$. Logo, pela equação (10.35) segue que:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^{\alpha} = \lim_{x\longrightarrow 0}\left[\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right]^{\alpha} = e^{\alpha}$$

Definição 10.3. A função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ tal que $f(x)=e^x$ pode ser definida por meio do limite $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ ou então geometricamente pelo fato de que $y=e^x$ é o único número real positivo tal que a área da faixa de hipérbole H_1^x é igual a x.

A *taxa de crescimento* de uma função f no intervalo de extremidades $x, x+h$ é por definição , o quociente

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante que une os pontos $(x, f(x))$ e $(x+h, f(x+h))$ do gráfico de f.

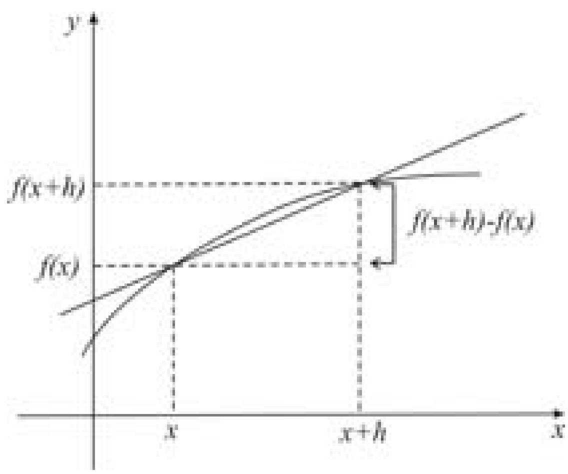

Figura 10.3: Interpretação geométrica da taxa de variação $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

No caso particular da função $f(x)=b\cdot e^{\alpha x}$, temos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = be^{\alpha x}\frac{e^{\alpha h}-1}{h}.$$

A *derivada da função f no ponto x* ao limite da taxa $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quando h tende a zero. Este número, cujo significado é o de taxa instantânea de crescimento de f no ponto x, é representado por $f'(x)$. Ele é o número real cujos valores aproximados são os quocientes $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para valores muito pequenos de h. Geometricamente $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto x.

O sinal de $f'(x)$ indica a tendência da variação de f a partir de x. Se $f'(x) > 0$ então $f(x+h) > f(x)$, para pequenos valores de h positivo. Se $f'(x) < 0$ tem-se ao contrário, $f(x+h) < f(x)$ para h pequeno e positivo. Mostraremos a seguir que a derivada da função $f(x) = be^{\alpha x}$ é igual a $\alpha \cdot f(x)$. Em outras palavras, a taxa instantânea de variação de uma função de tipo exponencial é, em cada ponto x, proporcional ao valor da função naquele ponto. E a constante α é justamente o fator de proporcionalidade.

Usando a interpretação geométrica de logaritmo natural, é fácil calcular a derivada da função $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$. O ponto de partida consiste em mostrar que $\displaystyle\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. A demostração deste fato, segue de um argumento geométrico, usando área de retângulos e faixa de hipérboles.

Assim, é imediato ver que:

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

e mais geralmente,

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{e^{\alpha(x+h)} - e^x}{h} = e^{\alpha x} \cdot \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} = \alpha \cdot e^{\alpha x} \cdot \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h}.$$

Escrevendo $k = \alpha h$, vemos que $h \longrightarrow 0 \iff k \longrightarrow 0$. Portanto

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{e^{\alpha(x+h)} - e^{\alpha x}}{h} = \alpha \cdot e^{\alpha x} \cdot \lim_{k\longrightarrow 0} \frac{e^k - 1}{\alpha k} = \alpha \cdot e^{\alpha x}.$$

Isto conclui a demosntração de que que a derivada da função $f(x) = e^{\alpha x}$ é $f'(x) = \alpha \cdot f(x)$, logo é proporcional ao valor de $f(x)$ da função f, sendo α o fator de proporcionalidade.

RESUMO

Funções Exponenciais

Definição: Seja a um número real positivo, $a \neq 1$. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$, denotada por $f(x) = a^x$ é definida de modo que tenha as seguintes propriedades para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;

(ii) $a^1 = a$;

(iii) $x < y \Longrightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Longrightarrow a^x > a^y$ quando $0 < a, 1$

A função exponencial, goza das seguintes propriedades:

- A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.
- A função exponencial é contínua.
- A função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$ é sobrejetiva.

Funções Exponenciais $\times$ Funções Logarítmicas

Definição: Dado $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, a potência a^x é o único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a $x \cdot \ln(a)$.

ATIVIDADES

..

Atividade. 10.1. Por que se pode assegurar que existe um número $y > 0$ tal que a faixa de hipérbole H_1^y tem área igual a π? Quantos números y existem com esta propriedade? Qual a relação entre y e o número e?

Atividade. 10.2. Dados $a > 0$ e $b > 0$, qual a propriedade da funçào exponencial que assegura a existência de $h \neq 0$ tal que $b^x = a^{x/h}$ para todo $x \in \mathbb{R}$? Mostre como obter o gráfico de $y = b^x$ a partir do gráfico de $y = a^x$. Use sua conclusão para traçar o gráfico de $y = (1/\sqrt[3]{4})^x$ a partir do gráfico de $y = 2^x$.

Atividade. 10.3. Para todo $x > 0$, mostre que se tem

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{4}.$$

Atividade. 10.4. Dado $a > 0$, determinar x tal que a faixa de hipérbole H_a^x tenha área igual a um número b dado.

Atividade. 10.5. Use a igualdade $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$ para concluir que existem números irracionais a e b tais que a^b é racional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.

Lima, E.L., Logaritmos, 2.ed., SMB, 1996.