AULA

11

Caracterização das funções Exponenciais e Logarítmicas

META:

Caracterizar as funções exponenciais e Logarítmicas.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Identificar uma função exponencial ou do tipo exponêncial, a partir de seus teoremas de caracterização.

Identificar uma função logarítmica a partir de seu teorema de caracterização.

Aplicar os teoremas de caracterização, para modelar problemas elementares.

PRÉ-REQUISITOS

Definições elementares e propriedades das funções logarítmica e exponencial.

11.1 Introdução

As funções exponenciais são juntamente com as funções afins e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. Uma vez decidido o modelo adequado para um determinado problema a tratamento matemático não apresentará maiores problemas. As dúvidas podem surgir na escolha do instrumento matemático apropriado para o problema em estudo. Para que a escolha possa ser feita corretamente é preciso conhecer as propriedades características de cada tipo de funções. Vejamos os teoremas de caracaterização das funções esponenciais e logarítmicas.

11.2 Caracterização das Funções Exponênciais

Teorema 11.1. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou descrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = f(x)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

(2) $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, onde* $a = f(1)$*;*

(3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

Prova: Provaremos as implicações (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1). Para mostrar (1) $\Longrightarrow$ (2) observamos inicialmente que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = m/n$ (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, com $nr = m$, podemos escrever $f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$, e logo $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$.

Assim, se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Para completar a demonstração de que (1) $\Longrightarrow$ (2) suponhamos, a fim de fixar idéias que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$ (o caso em que $f(x) > a^x$ é tratado analogamente). Então pelo Lema da aula anterior anterior, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$, concluímos que $x < r$. Esta contradição termina (1) $\Longrightarrow$ (2). As demais implicações seguem naturalmente da definição. ∎

Observação 11.1. No enunciado, poderíamos substituir a hipótese de monotonicidade pela suposição e que f seja contínua. A demonstração de (1) $\Longrightarrow$ (2) muda apenas no caso de que x é irracional. Então tem-se $x = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f(r_n) = r_n$, $r_n \in \mathbb{Q}$, logo, pela continuidade de f, deve ser

$$f(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} a^{r_n} = a^x.$$

Definição 11.1. Uma função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é do tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas

Se $a > 1$, a função g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente. Se a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é do tipo exponencial então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \qquad \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

dependem apenas de h, mas não de x. Mostraremos agora que vale a recíproca deste resultado.

Teorema 11.2. *Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é crescente ou decrescente) tal que para todo $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x+h) - g(x)]/g(x)$ dependa apenas de h, mas não de x. Então se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Prova: A hipótese feita equivale a supor que $\psi(h) = g(x+h)/g(x)$ independe de x. Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = g(x)/b$, onde $b = g(0)$, f continua monótona injetiva, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\psi(h) = f(x+h)/f(x)$, obtemos $\psi(h) = f(h)$, para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos assim que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, ou seja $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Segue-se então do teorema anterior que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = bf(x) = ba^x$. ∎

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ba^x$, uma função do tipo exponencial e $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, \ldots, f(x_n) = ba^{x_n}, \ldots,$$

formam uma progressão aritmética de razão a^h pois

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n + h} = (ba^{x_n}) \cdot a^h.$$

Como o $(n+1)$-ésimo termo da progressão aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + nh$, segue-se que $f(x_{n+1}) = f(x_1)A^n$ onde $A = a^h$. Em particular, se $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$ e portanto $f(x_{n=1}) = bA^n$. Vejamos o seguinte teorema:

Teorema 11.3. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$*

numa progressão geométrica $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, *onde* $y_n = f(x_n)$. *Se pusermos* $b = f(0)$ *e* $a = f(1)/f(0)$ *teremos* $f(x) = ba^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Prova: Seja $b = f(0)$. A função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x)/b$, é monótona injetiva, contínua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e agora tem-se $g(0) = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, a sequência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética, logo $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se $g(-x) = 1/g(x)$. Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, \ldots, nx$ é uma progressão aritmética, logo $1, g(x), g(2x), \ldots, g(nx)$ é uma progresão geométrica, cuja razão evidentemente é $g(x)$. Então seu $(n+1)$-ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um inteiro negativo então $g(-nx) = 1/g(nx) = 1/g(x)^n = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Segue-se do Teorema de Caracterização acima que pondo $a = g(1) = f(1)/f(0)$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. ∎

Exemplo 11.1. Se um capital c_0 é aplicado a juros fixos então, depois de decorrido um tempo t, o capital existente é dado por $c(t) = c_0 \cdot a^t$. Se tirarmos extratos da conta nos tempos $0, h, 2h, 3h, \ldots$ teremos $c(0) = c_0$, $c(h) = c_0 \cdot A$, $c(2h) = c_0 \cdot A^2$, $\ldots$ onde $A = a^h$. Portanto a evolução do saldo, quando calculado em intervalos de h unidades de tempo, é dada pela progressão geométrica $c_0, c_0 \cdot A, c_0 \cdot A^2, \ldots$.

11.2.1 Aplicações

Dada a função exponencial $f(x) = a^x$ pode ser escrita, por conviniencia, na base e, na forma $f(x) = e^{\alpha x}$. Para isso basta definir $a = e^{\alpha}$, ou seja $\ln(a) = \alpha$.

No teorema de caracterização das funções do tipo exponencial, vimos um critério elegante e matematicamente simples para determinar quando uma bijeção crescente ou decrescente $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é da forma $f(x) = b \cdot a^x$, ou seja, $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$

Para aplicar esse critério em situações concretas é indispensável saber decidir, em cada caso específico, se $f(x+h)/f(x)$ independe de x ou não. Fixando h como constante, isto equivale a indagar se $f(x+h)/f(x)$ é constante, isto é, se $f(x+h) = c \cdot f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou ainda, se $f(x+h)$ é uma função linear de $f(x)$.

Escrevendo $y = f(x)$, $y' = f(x')$ e pondo $f(x+h) = \eta(y)$, $f(x' + h) = \eta(y')$, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade diz que η é uma função linear de y se, e somente se, para quaisquer $y \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$ tem-se a implicação

$$y' = n \cdot y \qquad \Longrightarrow \qquad \eta(y') = n \cdot \eta(y).$$

Em termos da função original f isto significa:

$$F(x') = n \cdot f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x'+h) = n \cdot f(x+h).$$

A implicação acima é, portanto, o critério que nos permitirá decidir se a função f é ou não do tipo exponencial.

Exemplo 11.2. Capital a juros fixos. Seja $c(t)$ o capital no instante t, resultante da aplicação, a juros fixos acumulados continuamente, de um capital inicial $c_0 = c(0)$. Então $c(t+h)$ pode ser considerado como o capital resultante da aplicação da quantia inicial $c(t)$ durante o período de tempo h. Logo, aplicando o valor $n \cdot c(t) = c(t')$ obtém-se, após o período h, $n \cdot c(t+h)$. Portanto, $c(t') = n \cdot c(t) \Longrightarrow c(t'+h) = nc(t+h)$. Segue-se que $c(t) = c_0 \cdot a^t$, onde $a = c(1)/c_0$, ou $c(t) = c_o \cdot e^{\alpha t}$, onde $\alpha = \ln(a)$. Como $c(t)$ é uma função crescente de t, tem-se $a > 1$, ou seja, $\alpha > 0$.

Exemplo 11.3. Desintegração Radiotiva. Seja $m(t)$ é a massa, no instante t, de uma substância radioativa que no início da contagem do tempo era $m_0 = m(0)$. Assim, $m(t+h)$ é o que resta da massa $m(t)$ da substância radioativa depois de decorrido o intervalo de tempo h a partir do instante t. É claro que se observarmos a massa $m(t') = n \cdot m(t)$, $n \in \mathbb{N}$, após o mesmo tempo h, veremos que restou $m(t' + h) = n \cdot m(t + h)$. Portanto podemos assegurar que $m(t) = m_0 e^{\alpha t}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, como $m(t)$ é função decrescente de t, temos $\alpha < 0$.

Exemplo 11.4. Concentração de uma solução. Este é o protótipo de uma situação que ocorre em diversas circunstâncias, inclusive a eliminação de substâncias na corrente sanguínea humana. Vamos considerar o caso de um tanque de volume V, no qual se encontra uma salmoura (solução de água e sal), que mantém homogêna mediante a ação permanente de um misturador. O tanque recebe um fluxo constante de água enquanto uma torneira escoa a salmoura em quantidade igual, a cada instante, ao volume de água que entrou no tanque. Procura-se determinar a fórmula que exprime o volume $f(t)$ do sal existente no tanque no momento t, portanto a taxa $f(t)/V$ que mede a concentração da solução naquele instante. Evidentemente, $f(t)$ é uma função decrescente de t.

Afirmamos que f é uma função de tipo exponencial. De fato, sejam $t, t' \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $f(t') = n \cdot f(t)$. Fixemos arbitrariamente um intervalo de tempo h. Devemos mostrar que $f(t' + h) = n \cdot f(t + h)$. Para isto, imaginemos o tanque subdividido em n partes de igual volume V/n. Como a mistura é homogênea, em cada uma destas partes a quantidade de sal nela contida no instante t' é igual a $f(t')/n$, ou seja, igual a $f(t)$. O que ocorre em cada uma das subdivisões é, em escala $1/n$, o mesmo que ocorre no tanque inteiro. Logo, no instante $t'+h$, cada subdivisão vai conter o volume $f(t+h)$ de sal. No todo, vemos que o volume do sal contido no tanque inteiro no instante $t'+h$ é $f(t'+h) = n \cdot f(t+h)$. Portanto, se b é o volume do sal contido no tanque no instante $t = 0$, a fórmula que exprime a quantidade de sal existente no tanque no tempo t é $f(t)b \cdot a^t$, onde $a = f(1)/f(0) < 1$, ou seja, $f(t) = b \cdot e^{\alpha t}$, com $\alpha = \ln(a) < 0$. Sabemos, do capítulo anterior que $\alpha = f'(0)/b$, onde $f'(0) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0}[f(t) - b]/t$. Seja v o volume de água que entra no tanque na unidade de tempo. Num tempo t, a água que entra é vt e , se t for muito pequeno, o sal que sai na salmoura é aproximadamente $(b/v)vt$. logo $f(t) \approx b - (b/V)vt$ e

$$f'(0) = \lim_{t \longrightarrow 0}[f(t) - b]/t = -bv/V.$$

Assim $\alpha = -v/V$ e, em qualquer instante t, a quantidade de sal no tanque é $f(t) = b \cdot e^{-(v/V)t}$.

11.3 Caracterização das funções Logarítmicas

Provaremos a seguir que, entre as funções monótonas injetivas $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, somente as funções logarítimicas têm a propriedade de transformar produto em somas.

Teorema 11.4. *Seja $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva tal que $f(xy) = f(x)+f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.*

Prova: Vamos supor f crescente (o caso de f decrescente segue analogamente). Temos que $f(1) = f(1.1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$. Provaremos o teorema inicialmente supondo que exista a tal que $f(a) = 1$. Depois mostraremos que isso sempre acontece. Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, tem-se $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale:

$$\begin{aligned} f(a^m) &= f(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) = f(a) + f(a) + f(a) + \ldots + f(a) \\ &= 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = m. \end{aligned}$$

Então temos que

$$0 = f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}),$$

logo $f(a^{-m}) = -m$. Se $r = m/n$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, então $rn = m$, portanto

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = nf(a^r),$$

e daí $f(a^r) = m/n = r$. Se x é irracional então, para r, s racionais tem-se

$$\begin{aligned} r < x < s &\implies a^r < a^x < a^s \implies f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \\ &\implies r < f(a^x) < s. \end{aligned}$$

assim todo número racional r, menor que x, é também menor que $f(a^x)$ e todo número racional s maior do que x é também maior que $f(a^x)$. Segue-se que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $f(y) = \log_a(y)$ para todo $y > 0$.

Consideremos agora o caso geral, em que se tem uma função crescente $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$g(xy) = g(x) + g(y)$$

sem mais nenhuma hipótese. Então $g(1) = 0$, como $1 < 2$, teremos $g(2) = b > 0$. A nova função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = g(x)/b$, é crescente, transforma somas em produtos e cumpre $f(2) = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $f(x) = \log_2(x)$ para todo $x > 0$. Isto significa que, para todo $x > 0$ vale

$$x = 2^{f(x)} = 2^{g(c)/b} = (2^{1/b})^{g(x)} = a^{g(x)},$$

com $a = 2^{1/b}$. Tomando $\log_a$ de ambos os membros da igualdade $a^{g(x)}$ vem, finalmente: $g(x) = \log_a(x)$. ∎

11.4 Conclusão

Vimos propriedades para identificar as funções Exponenciais e Logarítmicas. Estes critérios são muito importante pois permitem decidir se o modelo matemático para um determinado problema é uma função exponencial ou uma função logarítmica.

RESUMO

Nesta seção vimos teoremas de caracaterização de funções exponenciais, do tipo exponencial e funções logarítmicas.

O teorema que caracteriza as funções exponenciais tem a seguinte forma:

Teorema da Caracterização das Funções Exponenciais. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou descrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

(3) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

A utilidade do teorema, está no fato de que que se vericarmos qualquer uma das afirmações (1), (2) ou (3) acima, estaremos tratando de uma função exponencial (desde que f cumpra as hipóteses do Teorema). Porém, em alguns casos é mais fácil verificar uma, e em outros, outra das duas propriedades.

As funções do tipo exponencial, ou seja, funções $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas, podem ser caracterizadas pelo seguinte teorema:

Teorema de Caracterização das Funções do tipo Exponencial. Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é crescente ou decrescente) tal que para todo $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x+h)-g(x)]/g(x)$ dependa apenas de h, mas não de x. Então se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Além disso de todas as funções $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ monótonas injetivas as únicas que transformam uma progressão aritmética numa progressão geométrica são as funções do tipo exponencial.

Finalmente, o teorema de caracterização das funcões logarítmicas é enunciado como segue:

Teorema de Caracterização das Funções Logarítmicas. Seja $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Em outras palavras, as funções logarítmicas são as únicas funções de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}$, monótonas e injetivas que transformam o produto numa soma, ou seja, $f(xy) = f(x)+f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.

ATIVIDADES

..

Atividade. 11.1. detemine nos casos abaixo, a dependência de h e ou x do crescimento relativo $[f(x+h) - f(x)]/f(x)$.

(a)- $f(x) = mx + n$, onde $m > 0$ e $n > 0$.

(b)- $f(x) = x^2 + 1$.

(c)- $f(x) = c \cdot e^{kx}$, onde $c > 0$.

(d)- $f(x)$ é a população, no instante x, de uma cultura de bactérias mantidas sob condições estáveis.

Atividade. 11.2. Prove que uma função do tipo exponencial fica determinada quando se conhecem dois de seus valores. Mais precisamente, se $f(x) = b \cdot a^x$ e $F(x) = b \cdot A^x$ são tais que $f(x_1) = F(x_1)$ e $f(x_2) = F(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$ então $a = A$ e $b = B$.

Atividade. 11.3. Dados $x_0 \neq x_1$ e y_0, y_1 não-nulos com o mesmo sinal, prove que existem $a > 0$ e b tais que $b \cdot a^{x_0} = y_0$ e $b \cdot a^{x_1} = y_1$.

Atividade. 11.4. A grandeza y se exprime como $y = b \cdot a^t$ em função do tempo t. Sejam d o acréscimo que se deve dar a t para que y dobre e m o acréscimo de t necessário para que y se reduza à metade. Mostre que $m = -d$ e $y = b \cdot 2^{t/d}$, logo $d = \log_a 2 = 1/\log_2 a$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

..

IEZZI, Gelson., Fundamentos de Matemática Elementar: Logaritmos vol.2, 3.ed., Editora Atual, 1977.

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.