AULA

# 12

# Trigonometria: Noções Elementares

**META:**

Definir noções elementares da trigonometrias.

**OBJETIVOS:**

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir as relações trigonométricas do triângulo retângulo.

Definir medida de ângulos e arcos.

## 12.1 Introdução

A trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares ao redor da terra, surgindo aí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subtendido. O objeto inicial da trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elementtos dessa figura (três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado. Só posteriormente, com o surgimento do Cálculo Infinitesimal, e do seu prolongamento que é a Análise Matemática, surgiu a necessidade de atribuir as noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante e cossecante, o status de função real de uma variável real.

## 12.2 Trigonometria do Triângulo Retângulo

Seja $ABC$ um triângulo retângulo de hipotenusa $a$ e ângulos agudos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, opostos respectivamente, aos catetos $b$ e $c$. Têm-se as seguintes definições:

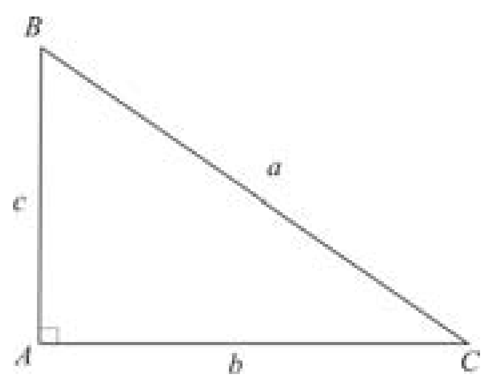


Figura 12.1: Triângulo Retângulo e seus elementos.

$$\begin{aligned}
\cos\hat{B} &= \tfrac{c}{a} = (\text{cateto adjacente}) \div (\text{hipotenusa}),\\
\operatorname{sen}\hat{B} &= \tfrac{b}{a} = (\text{cateto oposto}) \div (\text{hipotenusa}),\\
\operatorname{tg}\hat{B} &= \tfrac{b}{c} = (\text{cateto oposto}) \div (\text{cateto adjacente}),
\end{aligned} \tag{12.36}$$

e, analogamente, $\cos\hat{C} = \frac{b}{a}$, $\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{a}$, $\operatorname{tg}\hat{C} = \frac{c}{b}$.

É fundamental observar que $\cos\hat{B}$ e $\operatorname{sen}\hat{B}$ dependem apenas do ângulo $\hat{B}$ mas não do tamanho do triângulo retângulo do qual $\hat{B}$ é um dos ângulos agudos. Com efeito, dois quaisquer triângulos retângulos que tenham um ângulo agudo igual a $\hat{B}$ são semelhantes. Se estes triângulos são $ABC$ e $A'B'C'$, com $\hat{B}' = \hat{B}$. Então a semelhança nos dá

$$\frac{b'}{a'} = \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{c'}{a'} = \frac{c}{a},$$

logo

$$\operatorname{sen}\hat{B}' = \operatorname{sen}\hat{B} \quad \text{e} \quad \cos\hat{B}' = \cos\hat{B}.$$

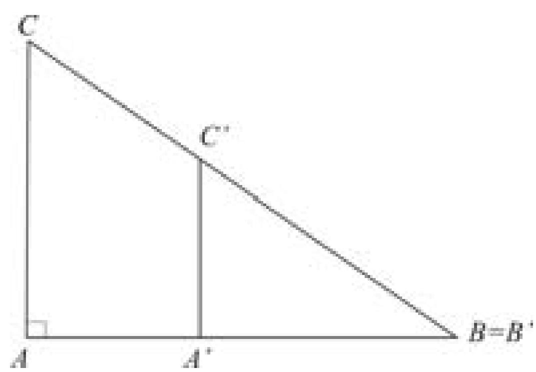


Figura 12.2: Triângulos retângulos semelhantes.

Portanto o seno e cosseno pertencem ao ângulo, e não ao eventual triângulo que o contém. A semelhança de triângulos é a base de sustentação da Trigonometria. Se organizarmos uma tabela com valores de $\cos\hat{B}$ para todos os ângulos $\hat{B}$, a relação $c = a \cdot \cos\hat{B}$ e o Teorema de Pitágoras $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ nos permitirão determinar os catetos $b, c$ de um triângulo retângulo, uma vez conhecida a hipotenusa $a$ e um dos ângulos agudos. Mais geralemente, num triângulo $ABC$ qualquer, a altura $h$, baixada do vértice $C$ sobre o lado $AB$, tem expressão $h = \bar{BC}\,\mathrm{sen}\,\hat{B}$. O Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

aplicado ao triângulo retângulo $ABC$, com $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, nos permite concluir que:

$$(\cos\hat{B})^2 + (\mathrm{sen}\,\hat{B})^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Observamos, que para fins de notação vamos escrever $\cos^2\hat{B}$ em vez de $(\cos\hat{B})^2$ e o mesmo com o seno. A relação fundamental

$$\cos^2\hat{B} + \mathrm{sen}^2\,\hat{B} = 1.$$

mostra que a rigor, basta construir uma tabela de senos para ter a de cossenos, ou vice-versa. É evidente, a partir da definição, que o cosseno de uma ângulo agudo é igual ao seno do seu complemento e vice-versa. Daí a palavra *cosseno* (seno do complemento). Também é claro que o seno e cosseno de um ângulo agudo são números entre 0 e 1.

## 12.3 Função de Euler e Medida de Ângulos

Começamos observando que a relação fundamental $\mathrm{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ sugere que, para todo ângulo $\alpha$, os números $\cos\alpha$ e $\mathrm{sen}\,\alpha$ são as coordenadas de um ponto da circunferência de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$.

Indicaremos com a notação $C$ essa circunferência, que chamaremos de *circunferência unitária, ou círculo unitário.* Temos portanto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.

A fim de definir as funções sen : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e cos : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, devemos associar a cada número real $t$ um ângulo e considerar o cosseno e o seno daquele ângulo. O número $t$ desempenhará , portanto, o papel de medida do ângulo. Evidentemente, há diversas maneiras de se medir ângulos dependendo da que se adota. Há duas unidades de medida de ângulo que se destacam: o radiano e o grau como veremos.

**Definição 12.1.** A função de Euler é a função $E : \mathbb{R} \longrightarrow C$, que faz corresponder a cada número real $t$ o ponto $E(t) = (x, y)$ da circunferência unitária obtido da seguinte maneira

- $E(0) = (1, 0)$
- Se $t > 0$, percorremos sobre a circunfência $C$, a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento $t$, sempre andando no sentido positivo( sentido anti-horário). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.
- Se $t < 0$ será a extremidade final de um caminho sobre $C$, de comprimento $|t|$, que parte do ponto $(1, 0)$ e percorre $C$ sempre no sentido negativo ( isto é, sentido horário).

A função de Euler $E : \mathbb{R} \longrightarrow C$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência $C$ (pensada como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1, 0) \in C$.

Cada vez que o ponto $t$ descreve na reta um intervalo de comprimento $l$, sua imagem $E(t)$ percorre sobre a circunferência $C$ um

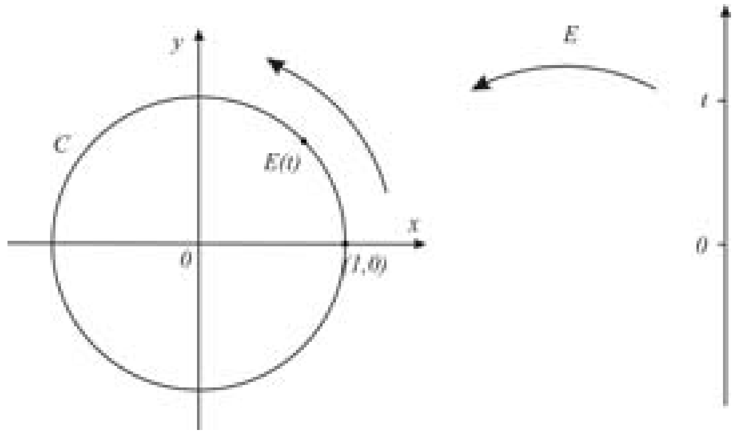


Figura 12.3: Função de Euler.

arco de igual comprimento $l$. Em particular, como a circunferência unitária $C$ tem comprimento igual a $2\pi$, quando o ponto $t$ descreve um intervalo de comprimento $2\pi$, sua imagem $E(t)$ dá uma volta para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se $E(t+2\pi) = E(t)$ e, mais geralmente, para todo $k \in \mathbb{Z}$, tem-se $E(t + 2k\pi) = E(t)$, seja qual for $t \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, se $t < t'$ em $\mathbb{R}$ são tais que $E(t) = E(t')$, isto significa que quando um ponto $s$ da reta varia de $t$ a $t'$ sua imagem $E(s)$ se desloca sobre $C$, no sentido positivo, partindo de $E(t)$, dando um número inteiro $k$ de voltas e retornando ao ponto de partida $E(t) = E(t')$. A distância percorrida é igual a $2k\pi$, logo $t' = t + 2k\pi$, pois o comprimento do caminho percorrido por $E(s)$ é por definição igual à distância percorrida por $s$ sobre a reta $\mathbb{R}$. quando $t' < t$ tem-se $k < 0$.

Escrevemos $A = (1, 0)$ e $O = (0, 0)$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, ponhamos $B = E(t)$. Diz-se neste caso que o ângulo $A\hat{O}B$ mede $t$ *radianos*.

**Observação 12.1.** Segue da definição algumas observações:

- Pode-se ter $B = E(t)$ com $t < 0$. Portanto esta forma de

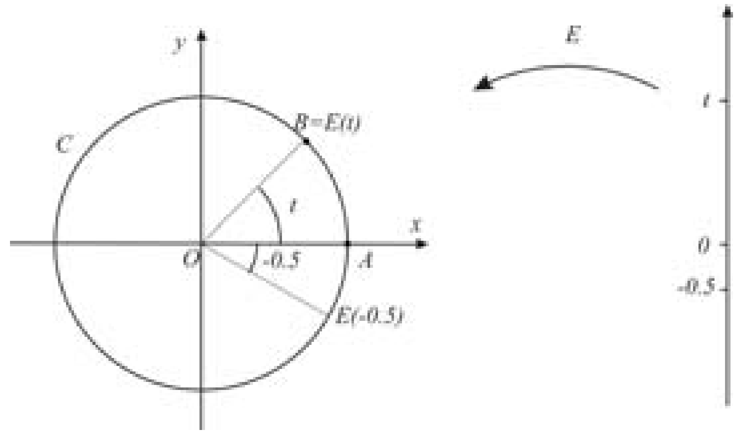


Figura 12.4: Função de Euler.

medida é orientada: é permetido a uma ângulo ter medida negativa.

- A medida do ângulo $A\hat{O}B$ é determinada apenas a menos de um múltiplo inteiro de $2\pi$, pois $B + E(t)$ implica $B = E(t + 2k\pi)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Assim por exemplo, o ângulo de 1 radiano é também um ângulo de $1-2\pi$ radianos. De um modo mais geral, se $B = E(t)$ então $B = E(t - 2\pi)$ pois há dois arcos que vão de $A = (1, 0)$ até $B$; um de comprimento $|t|$ e outro de comprimento $|t - 2\pi|$.

- De acordo com esta definição, o ângulo $A\hat{O}B$ mede 1 radiano se, e somente se, o arco $AB$ da circunferência $C$, por ele subtendido, tem comprimento igual a 1, isto é, igual ao raio da circunferência. Mais geralmente, numa circunferência de raio $r$, a medida de um ângulo central em radianos é igual a $l/r$, onde $l$ é o comprimento do arco subtendido por esse ângulo.

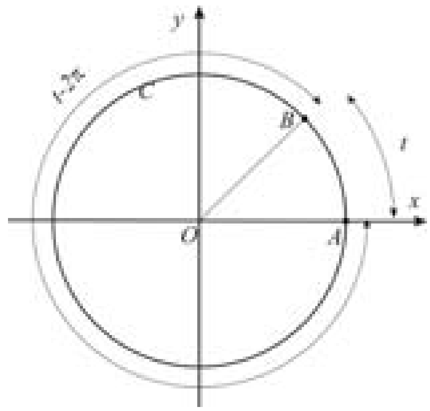


Figura 12.5: Medida do ângulo em radianos.

- A medida do ângulo $A\hat{O}B$ em radianos também pode ser expressa como $2a/r^2$, em termos da área $a$ do setor circular $AOB$ e do raio $r$.

Mostramos o último ponto da observação. A área do setor circular $AOB$ é uma função crescente do comprimento $l$ do arco $AB$. Como se vê facilmente, se o arco $AB'$ tem comprimento $n$ vezes maior do que o arco $AB$. Então a área do setor $AOB'$ é igual a $n$ vezes a área de $AOB$. Segue-se então do Teorema Fundamental da Proporcionalidade que a área $a$ é uma função linear do comprimento $l$: $a = c \cdot l$, onde $c$ é uma constante. Para determinar o valor de $c$, basta observar que, quando o setor é todo o círculo de raio $r$, o arco correspondente é toda a circunferência. Tem-se então $a = \pi r^2$ e $l = 2\pi r$. Logo $\pi r^2 = c \cdot 2\pi r$, donde $c = r/2$. Portanto a área do setor $AOB$ se relaciona com o comprimento $l$ do arco $AB$ pela igualdade $a = lr/2$. Segue-se que

$$\frac{l}{r} = \frac{2a}{r^2}.$$

Como $l/r$ é a medida do ângulo $AOB$ em radianos, concluímos daí que esta medida também vale $2a/r^2$, onde $a$ é a área do setor $AOB$ e $r$ é o raio do círculo.

Podíamos também ter definido uma função $G : \mathbb{R} \longrightarrow C$ pondo ainda $G(0) = (1, 0)$ e estipulando que, para $s > 0$, $G(s)$ fosse o ponto da circunfer6encia unitária obtido a partir do ponto $(1, 0)$ quando se percorre , ao longo de $C$, no sentido positivo, um caminho de comprimento $\frac{2\pi}{360}s$. E para $s < 0$, $G(s)$ seria definido de forma análoga, com o percurso no sentido negativo de $C$.

A função $G : \mathbb{R} \longrightarrow C$ tem propriedades semelhantes às de $E$, pois

$$G(t) = E\Big(\frac{2\pi}{360}t\Big)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, $G(t') = G(t)$ se, e somente se, $t' = t + 360k$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Se $A = (1, 0)$, $O = (0, 0)$ e $B = G(s)$, diz-se que o ângulo $A\hat{O}B$ mede $s$ *graus*. O ângulo $A\hat{O}B$ mede 1 grau quando $B = G(1)$, ou seja, quando o arco $AB$ tem comprimento igual a $2\pi/360$. Noutras palavras, o ângulo de um grau é aquele que subtende um arco igual a $1/360$ da circunferência.

Escreve-se 1 grau $= 1°$ e 1 radiano $= 1rad$.

Como a circunferência inteira tem $2\pi$ radianos ou equivalente 360 graus, segue-se que $2\pi\text{rad} = 360°$, ou seja

$$1\text{rad} = \Big(\frac{360}{2\pi}\Big)^{\circ} = 57,3\text{graus}$$

É bom ter em mente relações como $180° = \pi\text{rad}$, $90° = \pi/2\text{rad}$, etc.

## RESUMO

..

Nesta seção indtroduzimos os elementos essenciais para a definição das funções trigonométricas. Começamos definindo a relações trigonométricas no triângulo retângulo, seno, cosseno, e tangente. Porém estas funções só estão definidas para ângulos entre $0°$ e $90°$. Estabelecemos também, as duas maneiras canônicas de medir arcos: radianos e graus. Por fim, definimos a Função de Euler que permite identificar cada ponto da reta com um ponto da circunferência de raio 1.

## ATIVIDADES

**Atividade. 12.1.** Para medir a largura de um rio de margens paralelas sem atravessá-la, um observador no ponto $A$ visa um ponto $B$ na margem oposta( suponha que $AB$ é perpendicular às margens). De $A$, ele traça uma perpendicular à linha $AB$ e marca sobre ela um ponto $C$, distando 30 m de $A$. Em seguida ele se desloca para $C$, visa o spontos $B$ e $A$, e mede o ângulo $B\hat{C}A = 70^o$. Sabendo que a distância, sobre $AB$, de $A$ à margem do rio é de 3 m e que tg $70^o = 2,75$, calcular a lagura do rio.

**Atividade. 12.2.** Um observador em uma planície vê ao longe o topo de uma montanha segundo um ângulo de $15^o$ (ângulo no plano vertical formado por um ponto no topo da montanha, o observador e o plano horizontal). Após caminhar um distância $d$ em direção a montanha, ele passa a vê-la segundo um ângulo de $30^o$. Qual a altura da montanha? Suponha que o observador encontrou um ângulo $\alpha$ na primeira medição e $\beta$ na segunda medição. Determinar a altura da montanha em função de $\alpha$, $\beta$ e $d$.

**Atividade. 12.3.** (a)- Os lados de um triângulo retângulo estão em progressão aritmética. Qual o cosseno do maior ângulo agudo?
(b)- Os lados de um triângulo retângulo estão em progressão geométrica. Qual é o cosseno do menor de seus ângulos?

**Atividade. 12.4.** (a)-Prove que $\mathrm{tg}(x/2) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{1+\cos(x)}$. Calcule as funções trigonométricas de $15^o$.
(b)- Se $\mathrm{tg}(x/2) = t$ prove que $\mathrm{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $\mathrm{tg}(x) = \frac{2t}{1-t^2}$.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARMO, M.P., Trigonometria e Números Complexos, 1.ed., SBM, 1992.

IEZZI, Gelson., Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria, vol.3, 2.ed., Editora Atual, 1977.

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.