AULA

13

Funções Trigonométricas

META:

Definir e estudar as propriedades das funções trigonométricas.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir as funções trigonométricas elementares.

Identificar as propriedades das funções trigonométricas e esboçar gráfico das mesmas.

Estabelecer a principais relações fundamentais entre as funções trigonométricas.

PRÉ-REQUISITOS

Definições elementares dos elementos trigonométricos: arco, ângulo, medida de arco e ângulo.

13.1 Introdução

As funções trigonométricas surgem de maneira natural, com o surgimento do Cálculo Infinitesimal e posteriormente da Análise Matemática, onde surge a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno, tangente e suas associadas cotangente, secante e cossecante, o status de função real de uma variável real. Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas e desta forma, são especialmente adaptadas para descrever fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais abundam no universo: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, batimentos cardíacos, etc.

A importânncia das funções trigonométricas foi grandemente reforçada com a descoberta de Joseph Fourier, em 1822, de que toda função periódica (com ligeiras e naturais restrições) é uma soma (finita ou infinita) de funções do tipo $a\cos(nx) + b\,\mathrm{sen}(nx)$.

13.2 Função Seno e Cosseno

Consideremos novamente, como no capítulo anterior a Função de Euler $E : \mathbb{R} \longrightarrow C$, a qual faz corresponder, fixado uma origem A em C, cada número real t um ponto $E(t) = (x, y)$ sobre C da seguinte maneira: Se $x > 0$, percorremos uma distância t sobre C no sentido positivo (anti-horário a partir de A) e $E(t)$ é o ponto atingido; se $x < 0$, percorremos uma distância $|t|$ sobre C no sentido negativo (horário a partir de A) e $E(t)$ é o ponto atingido; e finalmente se $t = 0$ então $E(t) = A$.

Consideremos o sistema de coordenadas Oxy onde a origem do sistema é o centro de C e tomamos $A = (1, 0)$.

Definição 13.1. As funções sen : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e cos : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, chamadas de Função Seno e Função Cosseno, respectivamente, são definidas pondo-se, para cada real $t \in \mathbb{R}$:

$$E(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t)).$$

Noutras palavras, $x = \cos(t)$ e $y = \mathrm{sen}(t)$ são respectivamente a abcissa e a ordenada do ponto $E(t)$ da circunferência unitária.

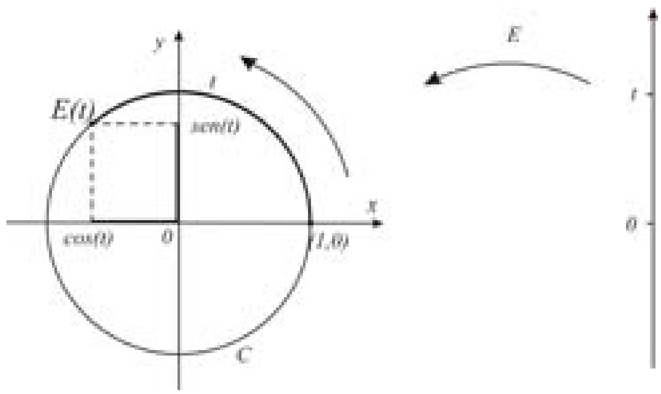

Figura 13.1: Interpretação geométrica das funções seno e cosseno de um arco t.

13.2.1 Propriedades

Seguem, diretamente da definição as seguintes propriedades:

1. A imagem das funções Seno e Cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é $-1 \leq \mathrm{sen}(t) \leq 1$ e $-1 \leq \cos(t) \leq 1$. A verificação é imediata, pois se $E(t)$ está sobre o círculo, sua ordenada e abcissa só podem variar entre -1 e 1.

2. Se t é do primeiro ou segundo quadrante, então $\mathrm{sen}(t)$ é positivo e se t é do terceiro ou quarto quadrantes, então $\mathrm{sen}(t)$

é negativo. Já o $\cos(t)$ é positivo no primeiro e quarto quadrantes e negativo no segundo e terceiro.

3. Se t percorre o primeiro ou quarto quadrantes, então $\operatorname{sen}(t)$ é crescente e é decrescente quando t percorre o segundo e terceiro quadrantes. A função $\cos(t)$ é crescente quando t percorre o terceiro e quarto quadrantes e é decrescente quando t percorre o primeiro e segundo. Para ver estes fatos, basta observar a definição. É imediato, por exemplo perceber que se t percorre o primeiro quadrante então $E(t)$ percorre C a partir de A, de modo que sua abcissa decresce de 1 até 0 (daí a função cosseno ser descrescente no primeiro quadrante) e a ordenada de $E(t)$, neste caso cresce de 0 até 1 (daí a função seno ser crescente no primeiro quadrante).

4. As funções seno e cosseno são funções periódicas de período 2π. De fato, como vimos anteriormente $E(t) = E(t + 2k\pi)$.

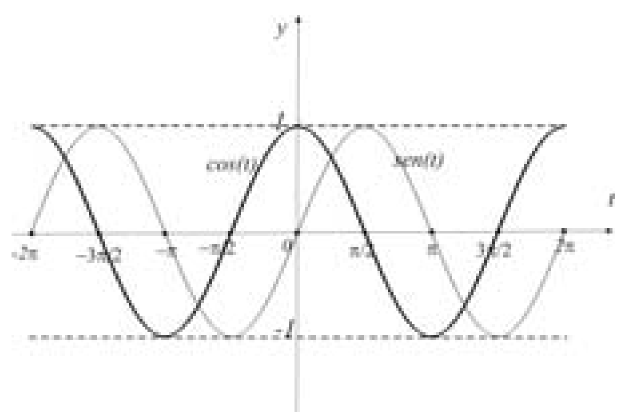

Figura 13.2: Funções Seno e Cosseno num mesmo sistema de eixos coordenados.

Os graficos das funções Seno e Cosseno estão representados na Figura 13.2. O gráfico da função seno chama senóide (seu traçado corresponde a linha mais fina na Figura 13.2) e o gráfico da função cosseno chama-se cossenóide (corresponde a linha mais espessa na Figura 13.2).

Observação 13.1. Considerando a função de Euler $E : \mathbb{R} \longrightarrow C$, é claro que se $E(t) = (x, y)$ então $E(-t) = (x, -y)$. Para verificar este fato, basta usar um argumento geométrico de congruência de triângulos, conforme Figura 13.3. Da mesma maneira temos que

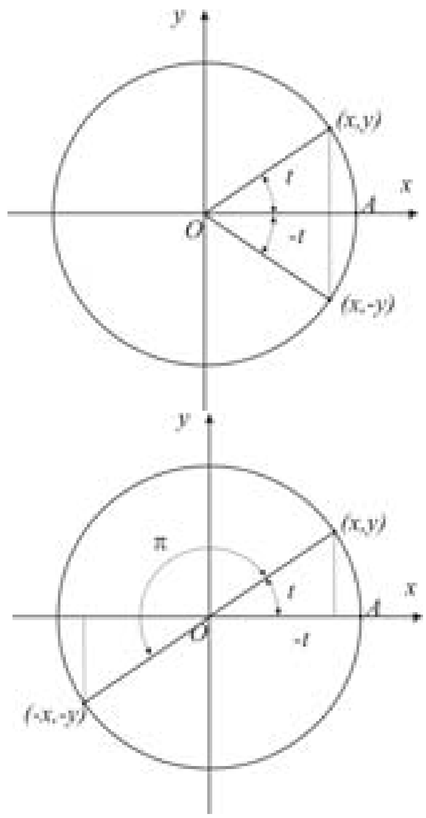

Figura 13.3: Demostração geométrica das propriedades $E(-t) = (x, -y)$ e $E(t + \pi) = (-x, -y)$, onde $E(t) = (x, y)$.

$E(t+\pi) = (-x, -y)$, conforme Figura 13.3.

Ainda é possível mostrar que:

$$E(t+\frac{\pi}{2}) = (-y, x), \qquad E(\frac{\pi}{2}-t) = (y, x), \qquad E(\pi - t) = (-x, y) \tag{13.37}$$

Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se *função par* se $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então f é dita *função ímpar*.

Temos que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$E(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)), \qquad E(-t) = (\cos(-t), \operatorname{sen}(-t)).$$

Mas como vimos acima, se $E(t) = (x, y)$ então, $E(-t) = (x, -y)$. Logo, obtemos comparando estas duas expressões para $E(-t)$.

$$\cot(-t) = cos(t), \qquad \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen}(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Segue que a função cosseno é par e a função seno é ímpar. De maneira semelhante, das relações envolvendo $E(t)$ acima, seguem as seguintes expressões.

$$\begin{aligned}
\cos(t+\pi) &= -\cos(t), & \operatorname{sen}(t+\pi) &= -\operatorname{sen}(t),\\
\cos(t+\pi/2) &= -\operatorname{sen}(t), & \operatorname{sen}(t+\pi/2) &= \cos(t),\\
\cos(\pi/2-t) &= \operatorname{sen}(t), & \operatorname{sen}(\pi/2-t) &= \cos(t),\\
\cos(\pi-t) &= -\cos(t), & \operatorname{sen}(\pi-t) &= \operatorname{sen}(t).
\end{aligned}$$

13.3 Função Tangente

Consideremos o circulo unitário C e c a reta tangente a C no ponto A. Esta reta será denominada *eixo das tangentes*.

Definição 13.2. Seja $t \in \mathbb{R}$, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e seja $P = E(t)$ a imagem no círculo C. Consideramos a reta OP e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. A medida algébrica do segmento $\overrightarrow{AT}$ é chamada de tangente de t.

Denominamos a função tangente a função $\operatorname{tg} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $t \in D$, $t \neq \pi/2 + k\pi$, o número real $\overline{AT}$

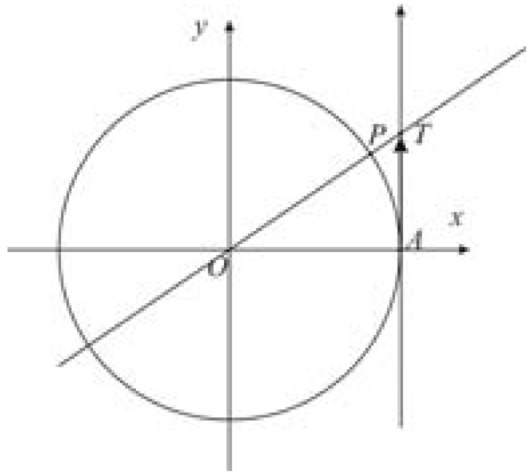

Figura 13.4: Construção geométrica para a determinação da tangente de um arco.

Obsereve que sempre que $t = \pi/2 + k\pi$, k inteiro o ponto $P = E(t)$ é de tal forma que o segmento $\overline{OP}$ não intercepta o eixo das tangentes e desta forma, não esta definida a tangente.

13.3.1 Propriedades da função Tangente

A função tangente tem as seguintes propriedades:

1. O domínio da função tangente é $D = \{t \in \mathbb{R}; t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{onde } k \in \mathbb{Z}\}$.

2. A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$, isto para cada y real existe um t real tal que $\text{tg}(t) = y$.

   De fato, dado $y \in \mathbb{R}$, seja T sobre o eixo das tangentes tal que $\overline{AT} = y$ (segmento orientado). Constuímos a reta OT, observando que ela intersecta o círculo unitário em dois pontos P e P', imagens dos reais t, cuja tangente é y.

3. A tangente é positiva no primeiro e terceiro quadrantes e negativa no segundo e quarto quadrantes.

4. Se t percorre qualquer um dos quatro quadrantes então $\text{tg}(x)$ é crescente.

5. A função tangente é periódica de período π.

   De fato, se $\text{tg}(t) = \overline{AT}$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $\text{tg}(t + k\pi) = \overline{AT}$, pois t e $t + k\pi$ tem imagens P e P' que estão na mesma reta que contem a origem 0, ou seja, a reta OP e OP' são identicas e logo determinam a mesma intersecção T com o eixo das tangentes. Segue que $\text{tg}(t) = \text{tg}(t + k\pi)$ para todo t real tal que $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e a função tangente é periódica. Seu período é o menor valor positivo de $k\pi$, isto é, π.

6. O gráfico da função tangente é chamado de *tangentóide* e é dado como na figura abaixo:

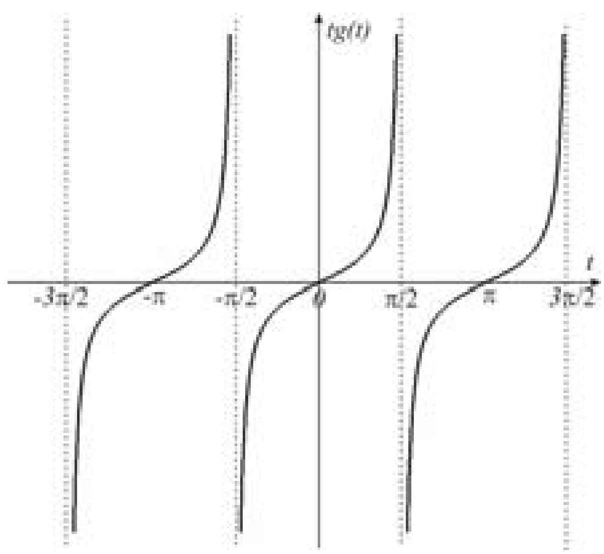

Figura 13.5: Gráfico da Função tangente.

13.4 Função Cotangente

Seja $B = (1, 0)$ o ponto do círculo unitário e d a reta tangente ao círculo no ponto B. Chamaremos esta reta orientada (com a mesma orientação do eixo $0x$) de eixo das cotangentes.

Definição 13.3. Dado o número real t, $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, seja $P = E(t)$ sua imagem no círculo unitário. Consideremos a reta OP e seja D sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denominamos contangente de t, e indicamos por $\text{cotg}(t)$, a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{BD}$.

Denominamos função cotangente a função $\text{cotg} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $t \in D$, $t \neq k\pi$, o número real $\overline{BD}$

Observe que sempre que $t = k\pi$, k inteiro o ponto $P = E(t)$ é de tal forma que o segmento $\overline{OP}$ não intercepta o eixo das cotangentes e desta forma, não esta definida a cotangente de t.

13.4.1 Propriedades da função Cotangente

A função cotangente tem as seguintes propriedades:

1. O domínio da função cotangente é $D = \{t \in \mathbb{R}; t \neq k\pi, \text{onde } k \in \mathbb{Z}\}$.

2. A imagem da função cotangente é $\mathbb{R}$.

3. A cotangente é positiva no primeiro e terceiro quadrantes e negativa no segundo e quarto quadrantes.

4. Se t percorre qualquer um dos quatro quadrantes então $\text{cotg}(x)$ é decrescente.

5. A função cotangente é periódica de período π.

6. O gráfico da função cotangente é dado como na figura abaixo:

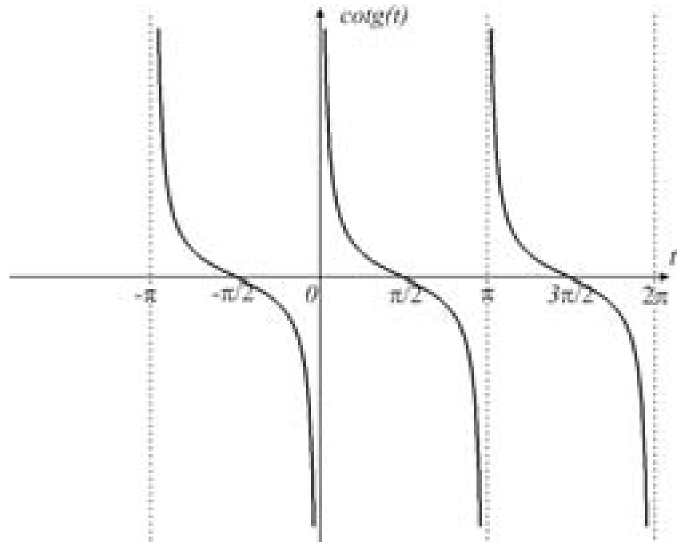

Figura 13.6: Gráfico da Função Cotangente.

13.5 Função Secante

Definição 13.4. Dado o número real t, $t \neq k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, seja $P = E(t)$ sua imagem no círculo unitário. Consideremos a reta s tangente ao círculo em P e seja S sua intersecção com o eixo dos cossenos. Denominamos secante de t, e indicamos por $\sec(t)$, a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{OS}$, ou seja, a abcissa $\overline{OS}$ do ponto S.

Denominamos função secante a função $\sec : D \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $t \in D$, $t \neq k\pi/2$, o número real $\overline{OS}$.

Observe que sempre que $t = k\pi/2$, k inteiro, o ponto $P = E(t)$ é de tal forma que a reta tangente a C por P é paralela ao eixo

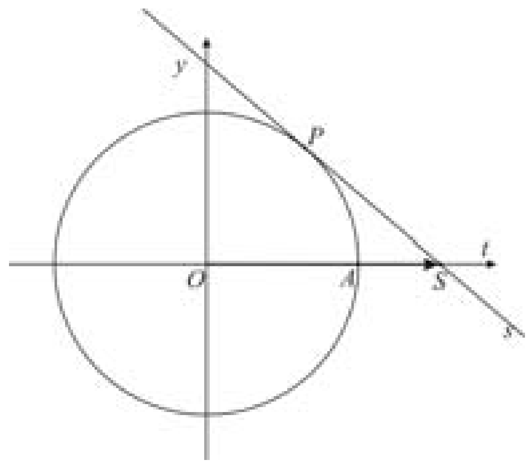

Figura 13.7: Construção geométrica para a definição da Secante de um arco.

dos cossenos e desta forma, não existe o ponto S e assim não está definida a função secante de t.

13.5.1 Propriedades da função Secante

A função cotangente tem as seguintes propriedades:

1. O domínio da função secante é $D = \{t \in \mathbb{R}; t \neq \frac{k\pi}{2}, \text{onde } k \in \mathbb{Z}\}$.
2. A imagem da função secante é $\mathbb{R} - (-1, 1)$.
3. A secante é positiva no primeiro e quarto quadrantes e negativa no segundo e terceiro quadrantes.
4. Se t percorre o primeiro ou segundo quadrantes então $\sec(t)$ é crescente e se t percorre o terceiro ou quarto quadrantes $\sec(t)$ é decrescente.
5. A função secante é periódica de período 2π.
6. O gráfico da função secante é dado como na figura abaixo:

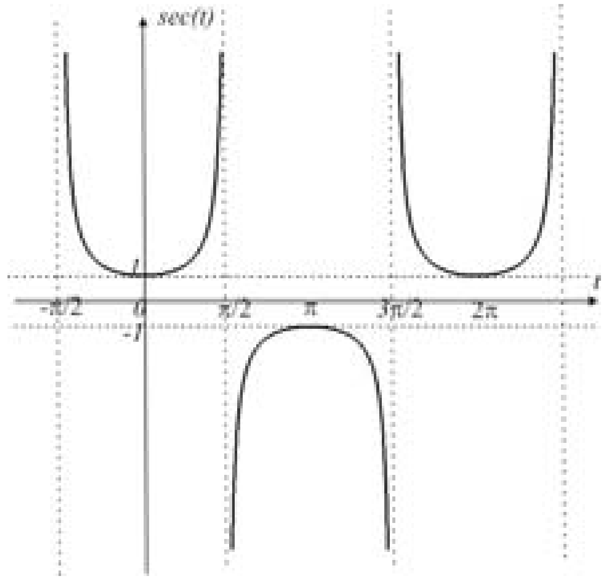

Figura 13.8: Gráfico da Função Secante.

13.6 Função Cossecante

Definição 13.5. Dado o número real t, $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, seja $P = E(t)$ sua imagem no círculo unitário. Consideremos a reta s tangente ao círculo em P e seja Q sua intersecção com o eixo dos senos. Denominamos cossecante de t, e indicamos por cossec(t), a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{OQ}$, ou seja, a abcissa $\overline{OQ}$ do ponto Q.

Denominamos função cossecante a função cossec : $D \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $t \in D$, $t \neq k\pi$, o número real $\overline{OQ}$.

Observe que sempre que $t = k\pi$, k inteiro o ponto $P = E(t)$ é de tal forma que a reta tangente a C por P é pararlela ao eixo dos senos e desta forma não existe o ponto Q e assim não está definida a função cossecante de t.

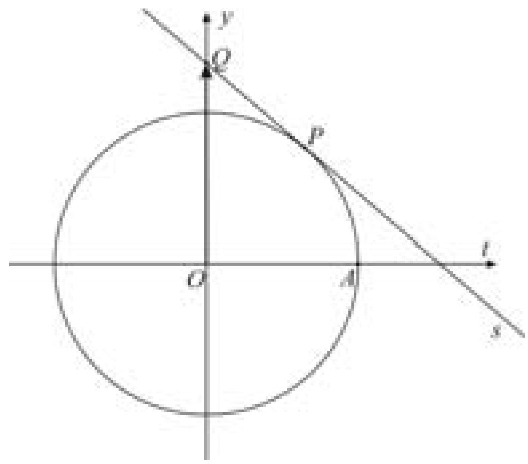

Figura 13.9: Construção geométrica para a definição da Secante de um arco.

13.6.1 Propriedades da função Cossecante

A função cotangente tem as seguintes propriedades:

1. O domínio da função cossecante é $D = \{t \in \mathbb{R}; t \neq k\pi, \text{onde } k \in \mathbb{Z}\}$.

2. A imagem da função cossecante é $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

3. A cossecante é positiva no primeiro e segundo quadrantes e negativa no terceiro e quarto quadrantes.

4. Se t percorre o primeiro ou quarto quadrantes então cossec(t) é decrescente e se t percorre o segundo ou terceiro quadrantes cossec(t) é decrescente.

5. A função cossecante é periódica de período 2π.

6. O gráfico da função cossecante é dado como na figura abaixo:

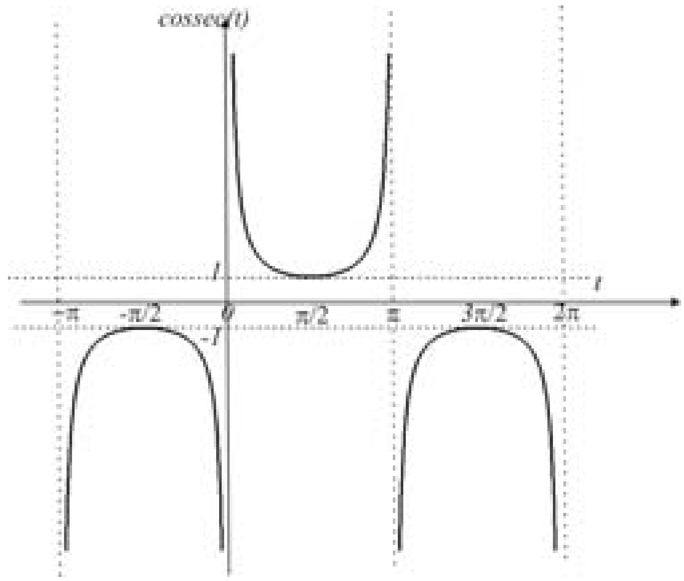

Figura 13.10: Gráfico da Função Cossecante.

13.7 Relações Fundamentais

Vamos ver que as funções trigonométricas tg, cotg, sec e cossec podem ser expressas em função das funções sen e cos. Assim, juntamente com a propriedade elementar, já citada

$$\text{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

mostraremos, que a partir de uma função é possível obter todas as outras.

Proprosição 13.19. *Para todo t real, $t \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ vale a relação*

$$\text{tg}(t) = \frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)}.$$

Prova: Se $t \neq k\pi$ então a imagem $E(t) = P$ no círculo é diferente dos ponto $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ e desde que, por hipótese $t \neq \pi/2 + k\pi$, então $E(t) = P$ também é diferente dos pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

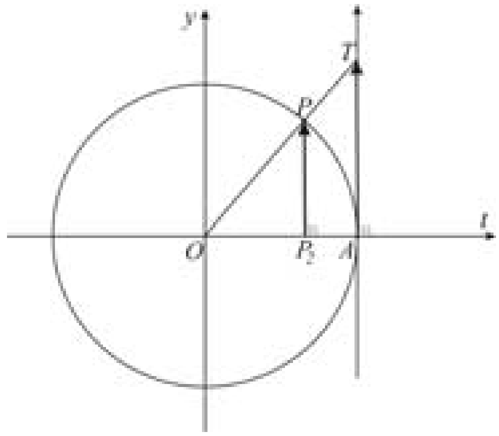

Figura 13.11: Construção gemométrica para a prova da propriedade $\text{tg}(t) = \frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)}$.

Logo ficam sempre definido os triângulos OAT e OP_2P, conforme a Figura 13.11, que são semelhantes.

Portanto

$$\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{OA}|} = \frac{|\overline{P_2P}|}{|\overline{OP_2}|},$$

e portanto

$$|\text{tg}(t)| = \frac{|\text{sen}(t)|}{|\cos(t)|}.$$

Agora, analisando a tabela abaixo, vemos que a função $\text{tg}(t)$ e o quociente $\text{sen}(t)/\cos(t)$ possuem o mesmo sinal logo vale $\text{tg}(t) = \text{sen}(t)/\cos(t)$.

Quadrante	Sinal de $\text{tg}(t)$	Sinal de $\text{sen}(t)/\cos(t)$
1	+	+
2	-	-
3	+	+
4	-	-

No caso em que $t = k\pi$, temos que $\text{sen}(k\pi) = 0$ e assim $\text{tg}(t) = 0 = \frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)}$, o que conclui a prova. ∎

Proprosição 13.20. *Para todo t real, $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ vale a relação*

$$\operatorname{cotg}(t) = \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}.$$

Prova: A demonstração segue de maneira análoga a proposição anterior.

Proprosição 13.21. *Para todo t real, $t \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ vale a relação*

$$\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}.$$

Prova: Se $t \neq k\pi$ então a imagem $E(t) = P$ no círculo é diferente dos pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$ e desde que, por hipótese $t \neq \pi/2 + k\pi$, então $E(t) = P$ também é diferente dos pontos $(0,1)$ e $(0,-1)$.

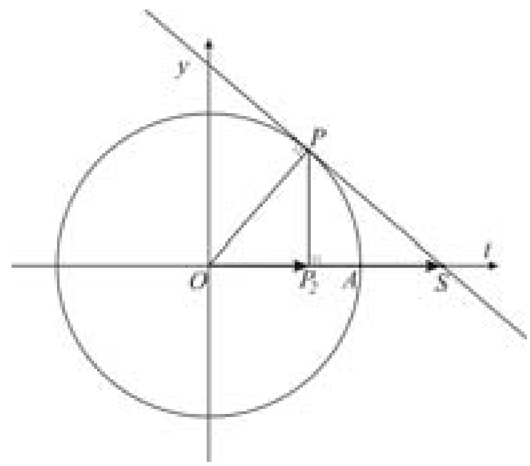

Figura 13.12: Construção gemométrica para a prova da propriedade $\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$.

Logo ficam sempre definido os triângulos OPS e OP_2P, conforme a Figura 13.12, que são semelhantes.

Portanto

$$\frac{|\overline{OS}|}{|\overline{OP}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OP_2}|},$$

e portanto

$$|\sec(t)| = \frac{1}{|\cos(t)|}.$$

Agora, analisando a tabela abaixo, vemos que a função $\sec(t)$ e o quociente $1/\cos(t)$ possuem o mesmo sinal logo vale $\sec(t) = 1/\cos(t)$.

Quadrante	Sinal de $\sec(t)$	Sinal de $1/\cos(t)$
1	$+$	$+$
2	-	-
3	-	-
4	$+$	$+$

No caso em que $t = k\pi$, temos que $\sec(k\pi) = 1 = \cos(t)$ se k é par, ou $\sec(k\pi) = -1 = \cos(t)$, se k é ímpar. ∎

Proprosição 13.22. *Para todo t real, $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ vale a relação*

$$\text{cossec}(t) = \frac{1}{\text{sen}(t)}.$$

Prova: a demonstração segue de maneira análoga a proposição anterior.

Segue das proposições acima, o seguinte resultado:

Corolário 13.1. *Para todo t real, $t \neq k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$ valem as relações:*

$$\begin{aligned}
\text{cotg}(t) &= \tfrac{1}{\text{tg}(t)},\\
\text{tg}^2(t) + 1 &= \sec^2(t),\\
\text{cotg}^2(t) + 1 &= \text{cossec}^2(t),\\
\text{cossec}^2(t) &= \tfrac{1}{1+\text{tg}^2(t)},\\
\text{sen}^2(t) &= \tfrac{\text{tg}^2(t)}{1+\text{tg}^2(t)}.
\end{aligned}$$

RESUMO

..

Nesta seção definimos as funções trigonométricas, extendendo o conceito das relações seno, cosseno, tangente, e suas derivadas, do triângulo retângulo à uma função real.

Definição: As funções sen : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e cos : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, chamadas de Função Seno e Função Cosseno, respectivamente, são definidas pondo-se, para cada real $t \in \mathbb{R}$:

$$E(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)).$$

Noutras palavras, $x = \cos(t)$ e $y = \operatorname{sen}(t)$ são respectivamente a abcissa e a ordenada do ponto $E(t)$ da circunferência unitária.

Usando, eixos orientados, podemos definir ainda outras quatro funções trigonométricas:

Definição: Seja $t \in \mathbb{R}$, $t \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e seja $P = E(t)$ a imagem no círculo C. Consideramos a reta OP e seja T sua intersecção com o eixo tas tangentes. A medida algébrica do segmento $\overrightarrow{AT}$ é chamada de tangente de t.

Denominamos a função tangente a função tg : $D \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $t \in D$, $t \neq \pi/2 + k\pi$, o número real $\overline{AT}$.

Definição: Dado o número real t, $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, seja $P = E(t)$ sua imagem no círculo unitário. Consideremos a reta OP de seja D sua intersecção co o eixo das cotangentes. Denominamos contangente de t, e indicamos por $\operatorname{cotg}(t)$, a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{BD}$.

Denominamos função cotangente a função cotg : $D \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $t \in D$, $t \neq k\pi$, o número real $\overline{BD}$.

Definição: Dado o número real t, $t \neq k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, seja $P = E(t)$ sua imagem no círculo unitário. Consideremos a reta s tangente ao círculo em P e seja S sua intersecção com o eixo dos cossenos. Denominamos secante de t, e indicamos por $\sec(t)$, a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{OS}$, ou seja, a abcissa $\overline{OS}$ do ponto S.

Denominamos função secante a função $\sec : D \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $t \in D$, $t \neq k\pi/2$, o número real $\overline{OS}$.

Definição: Dado o número real t, $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, seja $P = E(t)$ sua imagem no círculo unitário. Consideremos a reta s tangente ao círculo em P e seja Q sua intersecção com o eixo dos senos. Denominamos cossecante de t, e indicamos por $\text{cossec}(t)$, a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{OQ}$, ou seja, a abcissa $\overline{OQ}$ do ponto Q.

Denominamos função cossecante a função $\text{cossec} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $t \in D$, $t \neq k\pi$, o número real $\overline{OQ}$.

ATIVIDADES

Atividade. 13.1. Esboce o gráfico da função $y = 3 - 2\cos(2x - \pi/4)$ e da função $y = \cos(x)$ num mesmo sistema de coordenadas. Esboce o gráfico da função $y = 1 + \frac{1}{4}\,\text{sen}(\frac{x}{2} + \pi/2)$ e $y = \text{sen}(x)$ num mesmo sistema de coordenadas.

Atividade. 13.2. Para que valores de t existe x satisfazendo as igualdades:

(a)- $\cos(x) = \frac{t+2}{2t-1}$.

(b)-$\text{sen}(x) = \frac{t-1}{t-2}$.

(c)- $\text{tg}(x) = \sqrt{t^2 - 5t + 4}$.

Atividade. 13.3. Esboçar o gráfico, determinar o domínio e o período da função $f(x) = \text{tg}(2x + \pi/6)$.

Atividade. 13.4. Calcular $\text{sen}(x)$ e $\cos(x)$ sabendo que $3\cos(x) + \text{sen}(x) = -1$.

Calcular $\text{sen}(x)$ e $\cos(x)$ sabendo-se que $5\sec(x) - 3\,\text{tg}^2(x) = 1$.

Atividade. 13.5. Se $\text{sen}(x) + \cos(x) = a$ e $\text{sen}(x).\cos(x) = b$, determinar a relação entre a e b independente de x.

Atividade. 13.6. Dado que $\text{sen}(x).\cos(y) = m$, Mostrar que $\text{sen}^4(x) + \cos^4(x) = 1 - 2m^2$ e $\text{sen}^6(x) + \cos^6(x) = 1 - 3m^2$

Atividade. 13.7. Prove que valem as igualdades abaixo e exiba o domínio em que vale a igualdade.

(a)- $(1 + \cot^2(x))(1 - \cos^2(x)) = 1$.

(b)- $\frac{1-\cos(x)}{\text{sen}(x).\cos(x)} + \text{sen}(x) = \frac{1-\cos(x)}{\text{tg}(x)} + \text{tg}(x)$.

(c)- $\frac{\text{sen}(x)}{\text{cossec}(x)} + \frac{\cos(x)}{\sec(x)} = 1$.

(d)- $\frac{\text{cotg}^2(x)}{1+\text{cotg}^2(x)} = \cos^2(x)$.

(e)- $\frac{\text{sen}^3(x)-\cos^3(x)}{\text{sen}(x)-\cos(x)} = 1 + \text{sen}(x)\cos(x)$.

(f)- $\frac{\cos(x)+\text{cotg}(x)}{\text{tg}(x)+\sec(x)} = \cos(x).\text{cotg}(x)$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

..

CARMO, M.P., Trigonometria e Números Complexos, 1.ed., SBM, 1992.

IEZZI, Gelson., Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria, vol.3, 2.ed., Editora Atual, 1977.

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.