AULA

14

Fórmulas de Adição e Leis Fundamentais

META:

Obter e demonstrar as relações do seno, cosseno e tangente da soma e diferenças de arcos.

Demosntrar a lei dos cossenos e a lei dos senos.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Provar as relações de soma e diferença de arcos das funções trigonométricas elementares.

Demonstrar as fórmulas da lei dos senos e cossenos.

Aplicar as relações trigonométricas, para resolução de triângulos.

PRÉ-REQUISITOS

Definição e propriedades das funções trigonométricas.

14.1 Introdução

Nesta seção, vamos deduzir as fórmulas que calculam as funções trigonométricas da soma e diferença de dois arcos, cujas funções são conhecidas. Também, vamos estudar duas leis fundamentais da trigonometria: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos. Estas leis têm importantes aplicações na geometria, como por exemplo, conhecendo os lados de um triângulo qualquer, podemeos calcular seus ângulos,(através de seus cossenos), alturas, medianas, etc.

14.2 Fórmulas de Adição

As fórmulas clássicas que exprimem $\cos(\alpha + \beta)$ e $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ em termos de $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$, $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ podem ser demosntradas de diversas maneiras. Vamos dar uma prova, que parece a mais direta.

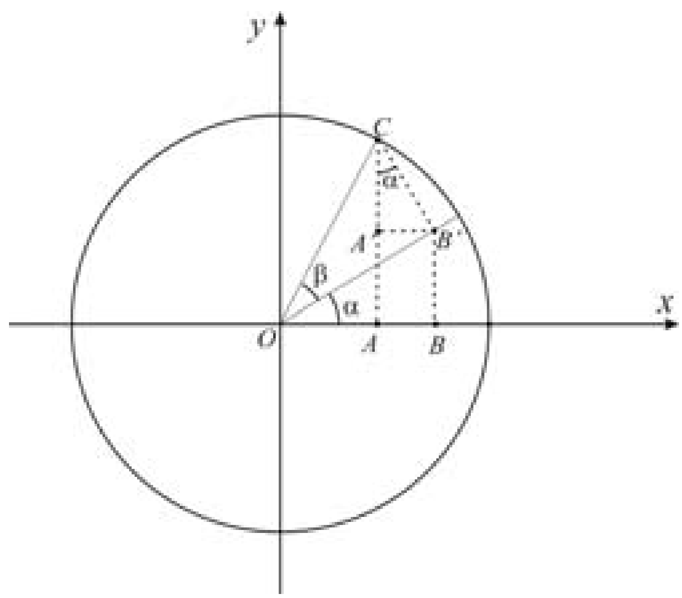

Figura 14.1: Fórmula de Adição.

Consideremos a construção geométrica da Figura 14.1, onde temos que $\overline{CB'} \perp \overline{OB'}$. Seguem então as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\overline{OA} &= \cos(\alpha+\beta),\\
\overline{OB'} &= \cos(\beta),\\
\overline{B'C} &= \operatorname{sen}(\beta),\\
\overline{AB} &= \overline{A'B'} = \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta),\\
\overline{OB} &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta).
\end{aligned}$$

Logo

$$\overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta).$$

Noutras palavras,

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta),} \qquad (14.38)$$

chamada fórmula do cosseno da soma. Tomando-se $-\beta$ em vez de β na fórmula (14.38) acima, e usando o fato que $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$ e $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}(\beta)$, obtemos:

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta).} \qquad (14.39)$$

chamada fórmula do cosseno da diferença. Já vimos que $\operatorname{sen}(\pi/2+t) = \cos(t)$ e $\cos(\pi/2+t) = -\operatorname{sen}(t)$. Então temos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= -\cos(\pi/2+\alpha+\beta).\\
&= -\cos(\pi/2+\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\pi/2+\alpha)\operatorname{sen}(\beta),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cdot\cos(\alpha).} \qquad (14.40)$$

As fórmulas para seno e cosseno do arco duplo são consequências diretas das fórmulas acima. Assim temos:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta) \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha).$$

Exemplo 14.1. Como aplicação das fórmulas de adição, vamos mostrar como determinar as coordenadas do ponto $A' = (x', y')$, obtido do ponto $A = (x, y)$ por meio de uma rotação de um ângulo θ em torno da origem de $\mathbb{R}^2$. Chamamos de α o ângulo do eixo

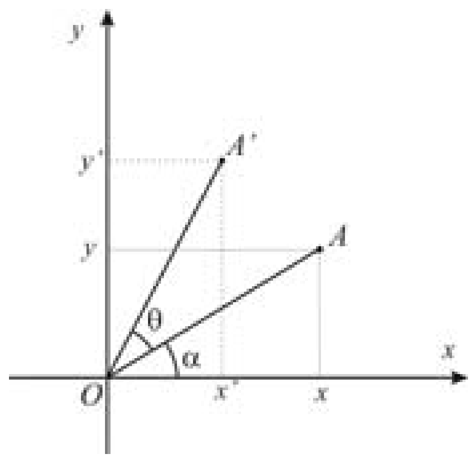

Figura 14.2: Coordenadas do Ponto A' como rotação do Ponto A em torno da origem $\mathbb{R}^2$.

Ox com o segmento OA e escrevemos $r = \overline{OA}$. Então $r = \overline{OA'}$ e se tem:

$$x = r\cdot\cos\alpha, \quad y = r\cdot\operatorname{sen}\alpha, \quad x' = r\cdot\cos(\alpha+\theta), \quad y' = r\cdot\operatorname{sen}(\alpha+\theta).$$

As fórmulas de adição fornecem

$$\begin{aligned} x' &= r\cos\alpha\cdot\cos\theta - r\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta &&= x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta. \\ y' &= r\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta - r\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\theta &&= x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta. \end{aligned}$$

Portanto a rotação de ângulo θ em torno da origem é a função $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta).$$

Exemplo 14.2. Outra aplicação das fórmulas de adição consiste em obter uma parametrização racional da circunferência unitária C. Começamos observando que para todo x real vale a igualdade

$$\Big(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\Big)^2 + \Big(\frac{2x}{1 + x^2}\Big)^2 = 1.$$

Ou seja, para todo x real, os termos entre parênteses acima são, respectivamente, a abcissa e a ordenada de um ponto da circunferência unitária C, isto é, são o cosseno e o seno de um ângulo β. Além disso, todo número real x é a tangente de um (único) ângulo $\alpha \in \big(-\pi/2, \pi/2\big)$. Logo a igualdade acima significa que, para cada um desses valores de α, existe um β tal que

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \cos\beta \quad \text{e} \quad \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^{\alpha}} = \operatorname{sen}\beta.$$

É fácil mostrar que $\beta = 2\alpha$ usando as fórmulas de $\cos(2\alpha)$ e $\operatorname{sen}(2\alpha)$. Basta substituir $\operatorname{tg}\alpha$ por $\operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha$ no primeiro membro destas igualdades e fazer simplificações óbvias para ver que

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \cos(2\alpha) \quad \text{e} \quad \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{sen}(2\alpha).$$

Equivalentemente:

$$\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Dado o ponto arbitrário $B = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ da circunferência unitária, como o ângulo incrito $A\hat{P}B$ é a metade do ângulo central $\alpha = A\hat{O}B$ que subtende o mesmo arco AB, vemos que $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ é a inclinação da reta PB, onde $P = (-1, 0)$. Mantendo o ponto P fixo e fazendo $\frac{\alpha}{2}$ variar em $(-\pi/2, \pi/2)$, cada semi-reta de inclinação igual a $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ corta a circunferência unitária num único ponto $B = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Todos os pontos da circunferência podem ser obtidos assim, menos o próprio ponto P.

A correspondência

$$x \longmapsto \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right)$$

é uma parametrização racional de C. Para $x \in \mathbb{Q}$, o ponto que lhe corresponde tem ambas as coordenadas racionais.

14.3 Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

Dado o triângulo ABC, sejam a, b, c as medidas dos lados BC, AC e AB respectivamente. Se ainda $h = AP$ a altura baixada de A sobre o lado BC. Há duas possibilidades, ilustradas como na Figura 14.3, conforme o ponto P pertença ao segmento BC ou esteja sobre seu prolongamento.

No primeiro caso, seja $x = \overline{BP} = c{\cdot}\cos\hat{B}$. O Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos ABP e APC fornece as igualdades

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + x^2, \\ b^2 &= h^2 + (a-x)^2 = h^2 + x^2 + a^2 - 2ax \\ &= h^2 + x^2 + a^2 - 2ac\cdot\cos\hat{B}. \end{aligned}$$

Comparando estas igualdades obtemos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\hat{B}.$$

No segundo caso $x = \overline{BP} = c\cdot\cos(\pi - \hat{B}) = -c\cdot\cos\hat{B}$. (Note que $\cos\hat{B} < 0$, logo $-c\cdot\cos\hat{B}$ é positivo.) Novamente Pitágoras,

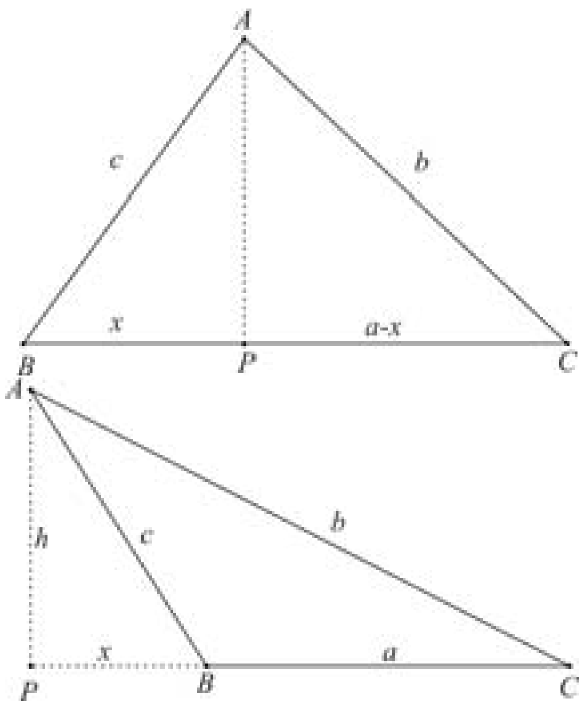

Figura 14.3: Construção Geométrica para a prova da lei dos senos e cossenos.

aplicado aos triângulos APB e APC nos dá:

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + x^2, \\ b^2 &= h^2 + (a+x)^2 = h^2 + x^2 + a^2 + 2ax \\ &= h^2 + x^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}. \end{aligned}$$

Daí resulta, como antes, que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}. \quad (14.41)$$

Esta igualdade é a lei dos cossenos, a qual é um caso particular do Teorema de Pitágoras, aquele que se tem quando $\hat{B}$ é reto. Evidentemente, tem-se

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}. \quad (14.42)$$

As mesmas figuras nos dão, no primeiro caso:

$$h = c \cdot \operatorname{sen} \hat{B} = b \cdot \operatorname{sen} \hat{C},$$

logo

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}.$$

No segundo caso temos que

$$h = b \cdot \operatorname{sen} \hat{C},$$

e

$$h = c \cdot \operatorname{sen}(\pi - \hat{B}) = c \cdot \operatorname{sen} \hat{B},$$

logo, novamente

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}.$$

Se tomarmos a altura baixada do vértice B sobre o lado AC, obteremos, com o mesmo argumento, a relação

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}.$$

Podemos então concluir que, em qualquer triângulo, tem-se

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}. \tag{14.43}$$

Esta é a lei dos senos. A interpretação geométrica para a razão $a/\operatorname{sen} \hat{A}$ é que esta corresponde ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC. De fato, a perpendicular OP, baixada do centro do círculo circunscrito sobre o lado BC é também mediana do triângulo isósceles OBC e bissetriz do ângulo $C\hat{O}B$, que é igual a $2\hat{A}$. Logo $C\hat{O}P = \hat{A}$ e daí resulta que $\alpha/2 = r \operatorname{sen} \hat{A}$, ou seja, $a/\operatorname{sen} \hat{A} = 2r =$ diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

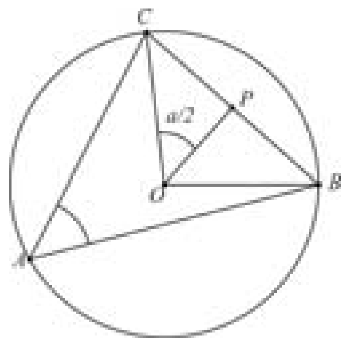

Figura 14.4: Interpretação geométrica da Lei do Senos.

As leis dos senos e cossenos permitem obter os seis elementos de um triângulo (três ângulos e três lados) dados três deles, desde que um seja lado.

Exemplo 14.3. Suponha que são dados os lados a e b e o ângulo $\hat{A}$ de um triângulo. Usando a leis dos senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \text{ de onde se obtém } \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\hat{A}$$

Suponhamos, $a > b$ então segue que $\frac{b}{a}\operatorname{sen}\hat{A}$ é um número positivo menor que 1, logo existe um único ângulo $\hat{B}$, menor que dois retos, cujo seno é igual a $\frac{b}{a}\operatorname{sen}\hat{A}$. Em seguida, determina-se o ângulo C pela igualdade $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} =$ dois retos. Conhecendo $\hat{C}$, usando a lei dos cossenos, obtemos

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}}.$$

RESUMO

..

Nesta seção determinamos as fórmulas para determinar o seno e o cosseno da soma e da diferença de dois arcos α e β, em função do seno e cosseno destes dois arcos. Como vimos anteriormente, através do seno e do cosseno poderemos determinar as demais funções trigonométricas. A Utilidade destas relações está no fato de que elas permitem que se expanda o número de arcos que se podem obter o valor das funções trigonométricas, já que permitem que se obtenham novos valores a partir de outros já conhecidos. As fórmulas de adição são:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\beta)\cdot\cos(\alpha),\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta),\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta),\\
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\beta)\cdot\cos(\alpha).
\end{aligned}$$

Já a Lei dos Senos, que relaciona os ângulos $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ com os lados a,b,c as medidas dos lados BC, AC e AB respecitavente, segundo a fórmula

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}},$$

e a lei dos cossenos, onde são válidas as relações

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A},\\
b^2 &= a^2+c^2-2ac\cdot\cos\hat{B},\\
c^2 &= a^2+b^2-2ab\cdot\cos\hat{C},
\end{aligned}$$

são muito importante para se determinar os seis elementos de um triângulo, quando são dados três deles, sendo que ao menos um deles é um lado.

ATIVIDADES

..

Atividade. 14.1. Prove que $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.

Atividade. 14.2. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que:

(a) $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(\pi - x)$ e $\cos(x) = -\cos(\pi - x)$.

(b) $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(x - \pi)$ e $\cos(x) = -\cos(x - \pi)$.

(c) $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(2\pi - x)$ e $\cos(x) = \cos(2\pi - x)$.

(c) $\operatorname{sen}(x) = \cos(\pi/2 - x)$ e $\cos(x) = \operatorname{sen}(\pi/2 - x)$.

Atividade. 14.3. Prove as seguintes igualdades são verdadeiras para todo $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\operatorname{sen}(3\pi/2 - x) = -\cos(x)$.

(b) $\cos(3\pi/2 - x) = -\operatorname{sen}(x)$.

(c) $\cos(3\pi/2 + x) = \operatorname{sen}(x)$.

(d) $\operatorname{sen}(3\pi/2 + x) = -\cos(x)$.

Atividade. 14.4. Provamos que , dados $a, b \in \mathbb{R}$ então

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b).$$

Usando esta fórmula , prove que:

(a) $\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(b)}{1-\operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}$.

(b) $\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg}(a)-\operatorname{tg}(b)}{1+\operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}$.

(c) $\cot(a + b) = \frac{\operatorname{cotg}(a)\operatorname{cotg}(b)-1}{cotg(a)+\operatorname{cotg}(b)}$.

Atividade. 14.5. Calcule $\operatorname{cotg}(165^o)$, $\sec(255^o)$ e $\operatorname{cossec}(15^o)$.

Atividade. 14.6. Se a e b são ângulos agudos e positivos, mostrar que

$$\operatorname{sen}(a + b) < \operatorname{sen}(a) + \operatorname{sen}(b).$$

Atividade. 14.7. Provar que os ângulos internos A, B e C de um triângulo não retângulo verificam a relação:

$$\operatorname{tg}(A) + \operatorname{tg}(B) + \operatorname{tg}(C) = \operatorname{tg}(A).\operatorname{tg}(B).\operatorname{tg}(C)$$

Atividade. 14.8. Mostre que para todo $a \neq \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ temos que $\frac{1}{\text{sen}(a)} = \text{cotg}(a/2) - \text{cotg}(a)$. Mostre ainda que

$$\frac{1}{\text{sen}(a)} + \frac{1}{\text{sen}(2a)} + \frac{1}{\text{sen}(4a)} + \ldots + \frac{1}{\text{sen}(2^n a)} = \text{cotg}(a/2) - \text{cotg}(2^n a).$$

Atividade. 14.9. Prove que valem as relações:

(a) $\cos(p) + \cos(q) = 2.\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

(b) $\cos(p) - \cos(q) = -2.\,\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

(c) $\text{sen}(p) + \text{sen}(q) = 2.\,\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

(d) $\text{sen}(p) - \text{sen}(q) = 2.\,\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

(e) $\text{tg}(p) + \text{tg}(q) = \frac{\text{sen}(p+q)}{\cos(p)\cos(q)}$.

(f) $\text{tg}(p) - \text{tg}(q) = \frac{\text{sen}(p-q)}{\cos(p)\cos(q)}$.

Atividade. 14.10. Trasnforme em um produto $y = \cos(9a) + \cos(5a) - \cos(3a) - \cos(a)$.

Atividade. 14.11. Demosntrar que se A, B e C são os ângulos internos de um triângulo (qualquer ?) então vale a relação:

(a) $\text{sen}(A) + \text{sen}(B) + \text{sen}(C) = 4\cos(A/2).\cos(B/2).\cos(C/2)$.

(b) $\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) = 1 + 4\,\text{sen}(A/2).\,\text{sen}(B/2).\,\text{sen}(C/2)$.

(c) $\text{sen}(2A) + \text{sen}(2B) + \text{sen}(C) = 4\,\text{sen}(A).\,\text{sen}(B).\,\text{sen}(C)$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

..

CARMO, M.P., Trigonometria e Números Complexos, 1.ed., SBM, 1992.

IEZZI, Gelson., Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria, vol.3, 2.ed., Editora Atual, 1977.

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.