AULA

15

Equações e Inequações Trigonométricas

META:

Identificar e resolver equações e inequações trigonométricas fundamentais.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Identificar e resolver uma equação trigonométrica básica.

Identificar e resolver uma inequação trigonométrica.

Definir as funções trigonométricas Inversas das funções Seno, Cosseno e Tangente.

PRÉ-REQUISITOS

Definição e propriedades das funções trigonométricas.

15.1 Introdução

Nesta seção, vamos examinar algumas equações e inequações trigonométricas. Elas aparecem naturalmente na solução de problemas de Geometria quando a incógnita escolhida é um ângulo. Por exemplo, se de um triângulo retângulo se conhece a hipotenusa a e a soma dos catetos s, para calcular algum outro elemento dessa figura, podemos colocar x para um dos ângulos. Teremos então $\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = s/a$, a qual é uma equação trigonométrica.

15.2 Equações Fundamentais

As equações fundamentais são $\operatorname{sen} x = \cos a$, $\cos x = \cos a$ e $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$. Vamos examinar cada uma separadamente.

15.2.1 $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$

Para que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ é necessário e suficiente que as extremidades dos arcos x e a coincidam ou que sejam simétricas em relação ao eixo das ordenadas. No primeiro caso x e a têm a mesma imagem, ou seja, são côngruos, e no segundo caso os arcos x e a são suplementares. Em outras palavras, as imagens de x e a no círculo unitário, dadas respectivamente por $P = E(a)$ e $Q = E(x)$, estão sobre a reta r perpendicular ao eixo dos senos. Em resumo, a solução deste tipo de equação é dada por:

Dados os arcos de medida α e β. Dizemos que α e β são suplementares se $\alpha + \beta = \pi$. Dizemos que α e β são replementares se $\alpha + \beta = 2\pi$.

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \Longleftrightarrow x = a + 2k\pi \quad \text{ou } x = (\pi - a) + 2k\pi$$

Exemplo 15.1. Seja $m \in [-1, 1]$, então existe um único y no intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ tal que $\operatorname{sen} y = m$. Chamaremos este real y

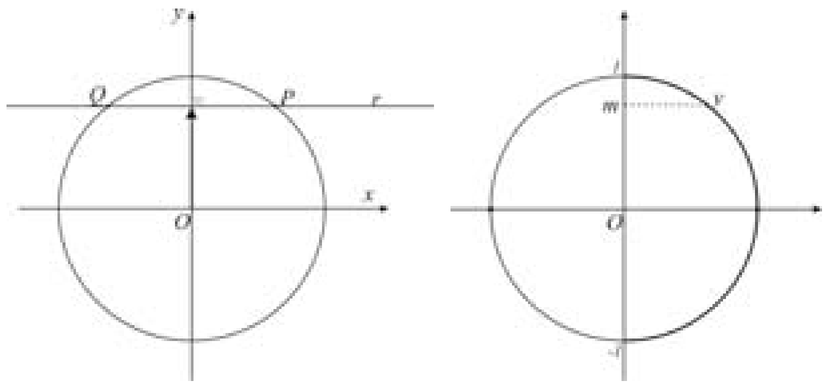

Figura 15.1: *Esquerda:* Solução da equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$, no caso em que a e x são suplementares. *Direita:* Função Inversa arcsen

de $\operatorname{arcsen} m$ (arco seno m), logo arcsen é a função inversa do seno no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. (Veja Figura 15.1)
Portanto

$$y = arcsen(m) \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{sen} y = m \;\text{ e }\; -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Por exemplo, $\operatorname{arcsen}(1) = \pi/2$ e $\operatorname{arcsen}(1/2) = \pi/6$.

15.2.2 $\cos x = \cos a$

Para que $\cos x = \cos a$ é necessário e suficiente que as extremidades dos arcos x e a coincidam ou que sejam simétricas em relação ao eixo dos cossenos. No primeiro caso x e a têm a mesma imagem, ou seja, são côngruos, e no segundo caso os arcos x e a são replementares. Em outras palavras, as imagens de x e a no círculo unitário, dadas respectivamente por $P = E(a)$ e $Q = E(x)$, estão sobre a reta r perpendicular ao eixo dos cossenos. Em resumo, a solução deste tipo de equação é dada por:

$$\cos x = \cos a \Longleftrightarrow x = a + 2k\pi \;\text{ ou }\; x = -a + 2k\pi$$

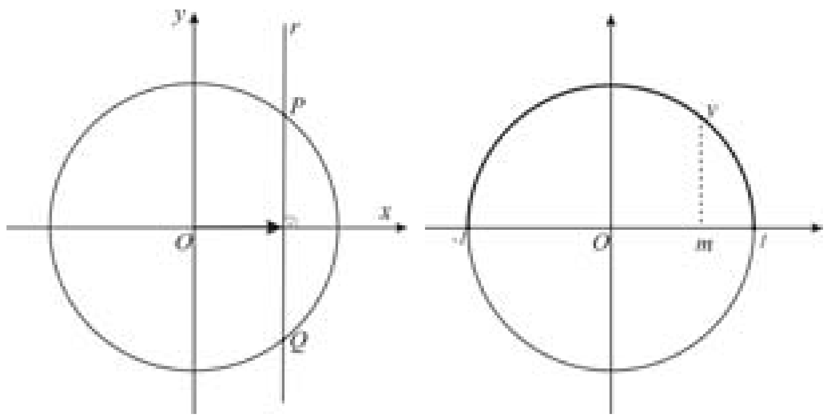

Figura 15.2: *Esquerda:* Solução da equação $\cos x = \cos a$, no caso em que a e x são replementares. *Direita:* A função inversa arccos.

Exemplo 15.2. Se $m \in [-1, 1]$, a função inversa do cosseno , $\arccos m$, é definida como o único número real y do intervalo $[0, \pi]$ tal que $\cos y = m$. Portanto

$$y = \arccos(m) \quad \Longleftrightarrow \quad \cos y = m \;\; \text{e } 0 \leq y \leq \pi.$$

15.2.3 $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$

Para que $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$ com $a \neq \pi/2 + k\pi$, é necessário e suficiente que as extremidades dos arcos x e a coincidam ou que sejam simétricas em relação à origem. Temos então $x = a + k\pi$. Em outras palavras, as imagens de x e a no círculo unitário, dadas respectivamente por $P = E(a)$ e $Q = E(x)$, estão sobre a reta r que passa pela origem. Em resumo, a solução deste tipo de equação é dada por:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \Longleftrightarrow x = a + k\pi$$

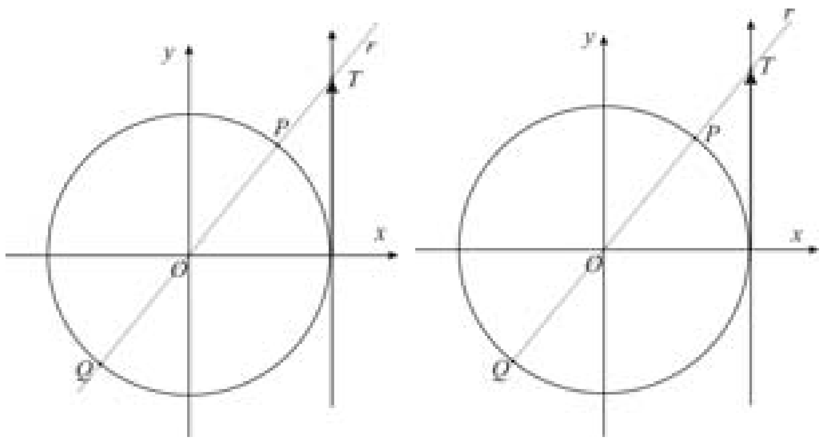

Figura 15.3: *Esquerda:* Solução da equação $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$. *Direita:* A função inversa $y = \operatorname{arctg}(m)$.

Exemplo 15.3. A função inversa da tangente, $\operatorname{arctg} m$, é definida para todo real m como o único y do intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\operatorname{tg} y = m$.

Portanto

$$y = \operatorname{arctg}(m) \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg} y = m \ \text{ e } \ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

15.2.4 A equação $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$

A equação $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$ pode ser resolvida por três processos. Mostramos, por um método que consiste em dividir a equação por $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, que é diferente de zero. A equação toma a forma

$$\frac{a}{r} \operatorname{sen} x + \frac{b}{r} \cos x = \frac{c}{r}.$$

Como $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$, existe um número real α tal que $\operatorname{sen} \alpha = a/r$ e $\cos \alpha = b/r$. Teremos então

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} x + \cos \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{r},$$

ou seja,

$$\cos(x - \alpha) = c/r,$$

a qual é de fácil resolução.

Exemplo 15.4. Considere a equação

$$\sqrt{3}\,\operatorname{sen} x - \cos x = 1,$$

onde neste caso particular $a = \sqrt{3}$, $b = -1$ e $c = 1$. Assim $r = \sqrt{3+1} = 2$. Dividindo por 2 a equação obtemos

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2},$$

Como $\cos \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2$, temos que a equação acima pode ser reescrita na forma

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \cdot \cos x = \frac{1}{2},$$

ou

$$\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Obtemos, como vimos anteriormente, que devemos ter $x - \pi/6 = \pi/6 + 2k\pi$ ou $x - \pi/6 = \pi/6 - \pi/6 + 2k\pi$, e as soluções de nossa equação, são portanto

$$x = \pi/3 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi + 2k\pi.$$

15.3 Inequações Trigonométricas

As inequações trigonométricas podem ser reduzidas a uma das inequações: $\operatorname{sen} x > m$, $\operatorname{sen} x < m$, $\cos x > m$, $\cos x < m$, $\operatorname{tg} x > m$ e $\operatorname{tg} x < m$, onde m é um número real dado. Tais inequações são chamadas *inequações fundamentais*.

15.3.1 Inequação do tipo $\operatorname{sen} x > m$

Seja $P = E(x)$ a imagem de x no círculo unitário e seja r a reta que passa por P e perpendicular ao eixo dos senos. Então as imagens dos reais tais que $\operatorname{sen} x > m$ estão na intersecção do círculo unitário com o semi-plano situado acima de r.

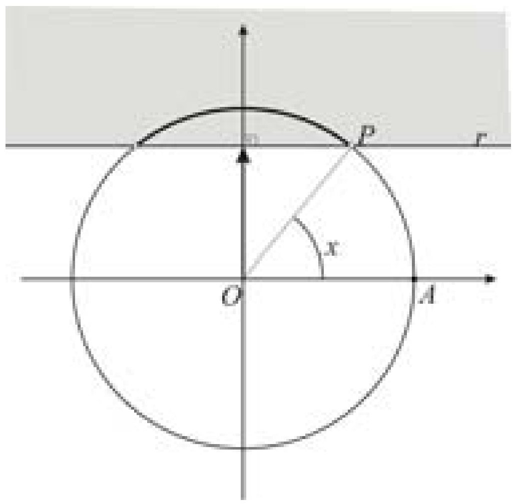

Figura 15.4: Esquema da solução da Inequação da forma $\operatorname{sen} x > m$.

Análogamente faz-se o estudo da inequação $\operatorname{sen} x < m$.

Exemplo 15.5. Resolva a inequação $0 \leq \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Observamos primeiramente que $\operatorname{sen} x = 0$ implica que $x = k\pi$. Então a solução da equação $0 \leq \operatorname{sen} x$, consiste em todos valores de x cuja imagem no círculo unitário está acima da reta s, que neste caso é o eixo do cossenos. Por outro lado, $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, implica que uma solução é $x = \pi/3 + 2k\pi$. Logo a solução da inequação $\operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ consiste em todos os valores de x cuja imagem no círculo unitário está abaixo da reta s_1 que é perpendicular ao eixo do senos e passa pelo ponto $P = E(\pi/3)$. Logo combinando estes dois resultados, obtemos

$$0 + 2k\pi \le x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x \le \pi + 2k\pi$$

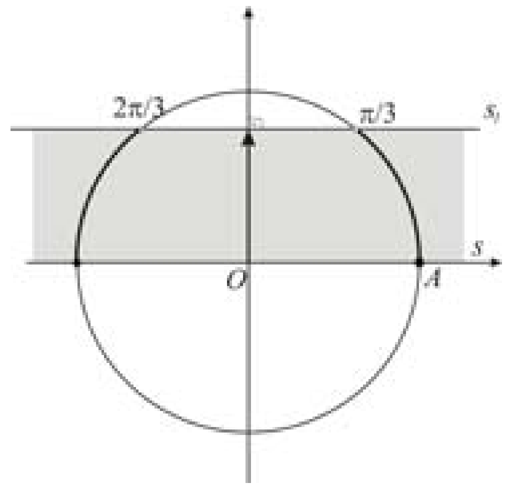

Figura 15.5: Esquema da solução da Inequação $0 \le \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

15.3.2 Inequação do tipo $\operatorname{tg} x > m$

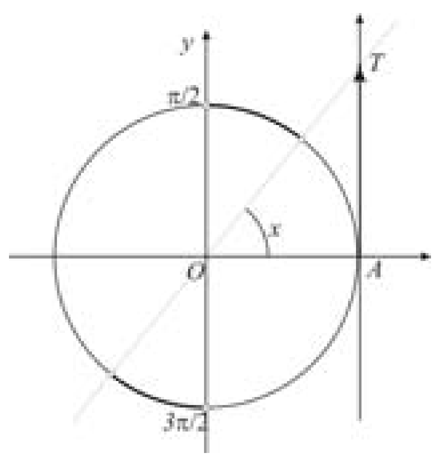

Figura 15.6: Esquema da solução da Inequação da forma $\operatorname{tg} x > m$.

Seja $P = E(x)$ a imagem de x no círculo unitário e marcamos no eixo das tangentes o ponto T tal que $AT = m$. Traçamos então a reta $r = \overrightarrow{OT}$. As imagens dos x tais que $\operatorname{tg} x > m$ estão na intersecção do círculo unitário com o ângulo $r\hat{O}y$.

Exemplo 15.6. Considere a inequação tg $< \sqrt{3}$. Sabemos que $\operatorname{tg} \pi/3 = \sqrt{3}$. Determinamos o ponto T no eixo das tangentes correspondente ao valor $\sqrt{3}$. Fica então determinada a reta r, que passa por T e a origem. Assim analisando a Figura 15.7, encontramos:

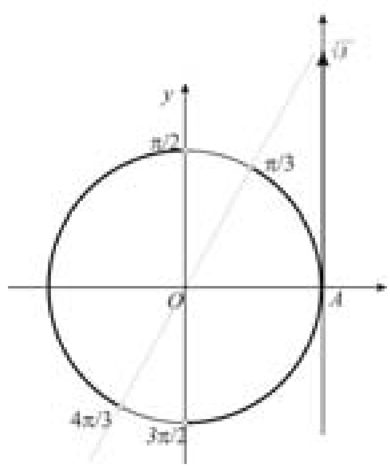

Figura 15.7: Esquema da solução da Inequação da forma $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

$$0 + 2k\pi \leq x < \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \tfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$$
$$\text{ou } \tfrac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi. \tag{15.44}$$

RESUMO

..

Vimos as seguintes equações trigonométricas:

(1)

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \iff x = a + 2k\pi \quad \text{ou } x = (\pi - a) + 2k\pi.$$

(2)

$$\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi \quad \text{ou } x = -a + 2k\pi.$$

(3)

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \iff x = a + k\pi.$$

(4) Consideremos a equação $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$. Defina $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e divida a equação $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$ por r, onde obtemos

$$\frac{a}{r} \operatorname{sen} x + \frac{b}{r} \cos x = \frac{c}{r}.$$

Como $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$, existe um número real α tal que $\operatorname{sen} \alpha = a/r$ e $\cos \alpha = b/r$. Teremos então

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} x + \cos \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{r},$$

ou seja,

$$\cos(x - \alpha) = c/r,$$

ATIVIDADES

Atividade. 15.1. Estudar a variação de sinal da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) - \operatorname{sen}(x)$.

Atividade. 15.2. Estudar a variação da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sen}(2x) + \cos(2x)$.

Atividade. 15.3. Resolva as equações trigonométricas:

(a) $2\cos^2(x) - 1 = \text{sen}(x)$.

(b) $\text{sen}(x - \pi/3) = \sqrt{3}/2$.

(c) $2\,\text{sen}(x) - cossec(x) = 1$.

(d) $\text{sen}(2x) = sen(x)$.

(e) $\cos(3x) - cos(x) = 0$

(f) $\text{sen}(x) - \sqrt{3}\cos(x) = 0$.

(g) $\text{tg}(x) + \text{cotg}(x) = 2$.

(h) $\sqrt{3}\cos(x) + \text{sen}(x) = 1$

Atividade. 15.4. Determinar os ângulos internos de um triângulo ABC sabendo-se que

$$cos(A + B) = 1/2, \qquad \text{sen}(B + C) = 1/2.$$

Atividade. 15.5. Resolva as inequações trigonométricas:

(a) $\text{sen}(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) $|\,\text{sen}(x)| \leq 1/2$.

(c) $2\,\text{sen}^2(x) \leq \text{sen}(x)$.

(d) $\cos(2x) + \cos(x) \leq -1$.

(e) $\cos(2x) \geq cos(x)$.

(f) $\frac{\cos(x)}{\cos(2x)} \leq 1$.

(g) $|\,\text{tg}(x)| \leq 1$.

Atividade. 15.6. Os lados de um triângulo são dados pelas expressões $a = x^2 + x + 1$, $b = 2x + 1$ e $c = x^2 - 1$. Demonstrar que um dos ângulos e 120^o.

Provar que num triângulo ABC retângulo em A, vale a relação $(a - b)^2 = c^2 - 4absen^2(\hat{C}/2)$.

Atividade. 15.7. Qual é a relação entre os lados a, b e c de um triângulo ABC para que se tenha:(Suponha que $a \geq b$ e $a \geq c$)

(a) ABC retângulo? (**R:**$a^2 = b^2 + c^2$)

(b) ABC acutângulo? (**R:**$a^2 < b^2 + c^2$)

(c) ABC obtusângulo? (**R:**$a^2 > b^2 + c^2$)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARMO, M.P., Trigonometria e Números Complexos, 1.ed., SBM, 1992.

IEZZI, Gelson., Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria, vol.3, 2.ed., Editora Atual, 1977.

Lima, E.L., A Matemática no Ensino Médio I, 5.ed., SMB, 2006.