Matemática para o Ensino Médio II

Mateus Alegri

CESAD
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA - UFS

São Cristóvão/SE
2011

Matematica para o Ensino Médio II

Elaboração de Conteúdo
Mateus Alegri

Capa
Hermeson Alves de Menezes

FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Alegri. Mateus
A3 66m Matemática para o Ensino Médio II / Mateus Alegri -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2011.

1. Matemática. Estudo e ensino. 2. Combinatório. Mtemática financeira. 4. Geometria. I. Título.

CDU 51:37.02

NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. “José Aloísio de Campos”
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

AULA 1

Progressões Aritméticas

1.1 Introdução

Prezado aluno, seja bem vindo ao curso Matemática para o Ensino Médio II. O objetivo principal deste curso é o de dar segurança em relação ao conteúdo do segundo ano do ensino médio para você, aluno, que posteriormente será professor abilitado a dar aulas no ensino fundamental e médio.

Nesta aula trabalharemos o conceito de progressões aritméticas, que você viu no início do segundo ano do ensino médio. Como você sabe, na vida real, são comuns, as grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempos iguais. Isto está intimamente ligado a sequências nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é constante.

Apresentaremos o conceito de progressões aritméticas enfatizando com exemplos e provaremos a fórmula da soma dos primeiros n termos de uma progressão aritmética. Mais adiante mostraremos como uma progressão aritmética pode ser "vista"como um polinômio, e forneceremos mais resultados associados a tais polinômios.

1.2 Progressões aritméticas-definições e exemplos

Definição 1.1. progressão aritmética: Uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r.

Exemplo 1.1. As sequências $(0, 4, 8, 12, 16, ...)$ e $(7, 5, 3, 1, -1, -3, ...)$ são progressões aritméticas cujas razões valem 4 e -2, respectivamente.

Em uma progressão aritmética $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, notemos que para sair de um termo para o seuinte necessitamos apenas somar a razão r. Neste caso $a_{n+1} = a_n + r$, onde $n \in \mathbb{N}$. A pergunta agora é: Se soubermos apenas a razão r e o primeiro termo a_0, temos como descobrir o valor de um termo qualquer a_n?

A resposta é sim, e por recursão, é fácil ver que, $a_n = a_0 + rn$. Em geral vale: $a_n = a_k + (n - k)r$ para $0 \leq k \leq n$

Exemplo 1.2. O preço de um carro novo é de R$10000,00 e diminui R$250,00 a cada ano. Qual será o preço deste carro passado 11 anos?

Solução:

Neste caso $a_0 = 10000$ e queremos calcular a_{11}. Como a desvalorização é constante, (a_n) é uma progressão aritmética Deste modo $r = -250$ e $a_{11} = 10000 - 250 \times 11 = 7250$

Exemplo 1.3. O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem foi em 1986. Quantas verzes ele visitou a Terra na era Cristã? Em que ano foi a sua primeira passagem nesta era?

Solução:

Se o último ano da passagem do cometa foi em 1986, então $a_1 = 1986$ e $r = -76$. Assim $a_n = 1986 - 76(n - 1) = 2062 - 76$, de modo que $a_n > 0$ desde que $n < 27, 13...$ Portanto, oos termos positivos dessa progressão são os 27 primeiros $a_1, a_2, ..., a_{27}$. Assim o cometa Halley visitou 27 vezes a Terra e a sua primeira passagem na era cristã foi em $a_{27} = 2062 - 76 \times 27 = 10$.

1.3 Fórmula da Soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

Nesta seção exibiremos a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, bem como algumas consequências disto.

Teorema 1.1. *A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética* $(a_1, a_2, ...)$ *é*

$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

Demonstração

Consideremos $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$, é verdade que $2S_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+...+(a_n+a_1)$. Observe que, no primeiro parênteses temos: $(a_1 + a_n) = a_1 + a_1 + (n-1)r$; e no segundo,

$(a_2+a_{n-1}) = a_2+a_1+(n-2)r = a_1+a_1+(n-1)r = (a_1+a_n)$, de forma análoga podemos concluir que todos os parênteses são iguais, de modo que temos n deles assim a soma S_n valerá:

$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

Exemplo 1.4. Qual é o valor da soma dos primeiros 12 termos da progressão aritmética:$(-2, 1, 4, 7, 10, ...)$?

Solução:

Como $a_{12} = -2 + 12 \times 3 = 34$, temos:

$S_{12} = (\frac{-2+34}{2})12 = 192$.

Exemplo 1.5. Mostre que a soma dos n primeiros números inteiros positivos é:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solução:

Considere a progressão aritmética:$(1, 2, 3, 4, ...)$, utilizando a fórmula para a soma dos primeiros termos para esta progressão, temos:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Proposição 1.1. *A soma dos primeiros termos de uma progressão aritmética é um polinômio de grau 2 sem termo livre.*

DemonstraçãoComo $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$, e $a_n = a_1 + (n-1)r$, substituindo a_n na fórmula de S_n, temos:

$S_n = \frac{r}{2}n^2 + (a_1 - \frac{r}{2})n.$

Definição 1.2. *Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência* (a_n) *na qual as diferenças* $\delta a_n = a_{n+1} - a_n$, *entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética não-estacionária. Em geral, uma progressão de ordem k, (k>2) é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão de ordem* $k-1$.

Exemplo 1.6. Seja $(a_n) = (0, 0, 6, 24, 60, 120, 210)$, $(\delta a_n) = (0, 6, 18, 36, 60, 90)$;

$(\delta^2 a_n) = (6, 12, 18, 24, 30)$; $(\delta^3 a_n) = (6, 6, 6, 6)$.

Como $(\delta^3 a_n)$ é constante, temos que $(\delta^2 a_n)$ é uma progressão aritmética.

Proposição 1.2. *Uma sequência* (a_n) *na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, do segundo grau, se, e somente se, a sequência* (a_n) *é uma progressão aritmética de segunda ordem.*

Demonstração

Se, $a_n = an^2 + bn + c$, com $a \neq 0$, tem-se:

$\delta a_n = a_{n+1} = a_n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c) = 2an + a + b,$

que é do primeiro grau em n. Assim (δa_n) é uma progressão aritmética não-estacionária.

Reciprocamente, se (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, (δa_n) é uma progressão aritmética com razão diferente de zero, e a soma dos primeiros n termos de (δa_n) é um polinômio do segundo grau em n, de maneira que (a_n) também é um polinômio de segundo grau em n.

Teorema 1.2. *Uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética de ordem p $(p \geq 2)$, se, e somente se, a_n é um polinômio de grau p em n.*

Demonstração

Vamos proceder por indução sobre p. Para $p = 2$ é válido pela proposição anterior.

Suponhamos que o teorema seja válido para p e provemos que a afirmação é válida para $p = s + 1$. Se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $s + 1$, $(\delta a_n) = a_{n+1} - a_n$ é uma progressão aritmética de ordem s, e por indução, (δa_n) é um polinômio de grau s em n. Logo a soma dos primeiros n termos de (δa_n) que vale $a_n - a_1$ é um polinômio de grau $s + 1$ em n, de modo que a_n é um polinômio de grau $s + 1$ em n. Reciprocamente, se a_n é um polinômio de grau $s + 1$ em n, (δa_n) é um polinômio de grau s em n. Por indução, (δa_n) é uma progressão de ordem s, ou seja, (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $s + 1$.

1.4 Conclusão

Na aula de hoje, apresentamos a definição de progressão aritmética e alguns resultados relacionados. O ponto principal acerca de progressões é que uma progressão aritmética de ordem p $(p \geq 2)$ é associada a um polinômio de grau p. De modo que você, prezado aluno e futuro professor deverá "ver"uma progressão aritmética de outra maneira: do ponto de vista polinomial.

1.5 RESUMO

Uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r, cuja fórmula geral é dada por: $a_n = a_0 + rn.$, onde r é a chamada de razão de uma progressão aritmética.

A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética $(a_1, a_2, ...)$ é:

$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

1.6 Proxima aula

Na próxima aula, daremos a definição de progressões geométricas, motivado por exemplos. Exibiremos também a fórmula que calcula o valor da soma dos primeiros n termos de uma progressão geométrica.

1.7 Atividades

ATIV. 1.1. Dada uma fita separada em intervalos horizontais por três cores: azul amarelo e branco, onde há repetição dessas cores. Se a primeira cor que vemos é amarelo, a segunda azul e a terceira branca, qual será a cor do intervalo de número 10^6?

ATIV. 1.2. Quantos números inteiros existem, de 1000 a 10000, que não são divisíveis nem por 5 nem por 7 ?

ATIV. 1.3. Ache a_0 numa P.A., sabendo que r=1/4 e a29=45.

ATIV. 1.4. Quanto vale o produto $a(aq)(aq^2)(aq^3)...(aq^n)$?

1.8 Leitura Complementar

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

Santos, J.P.O., Mello, M. P., Murari, I. T. C., Introdução à Análise Combinatória, 4 ed., Editora Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

Guelli, C.A., Iezzi, G., Dolce, O., Álgebra I - Sequencias - Progressões - Logarítmos, Editora Moderna, Rio de Janeiro, 2007.