

# Matemática para o Ensino Médio II

Mateus Alegri



São Cristóvão/SE  
2011

# Matemática para o Ensino Médio II

Elaboração de Conteúdo  
Mateus Alegri

---

**Capa**  
Hermeson Alves de Menezes

---

Copyright © 2011 , Universidade Federal de Sergipe / CESAD.  
Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização por escrito da UFS.

**FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Alegri. Mateus  
A3 66m Matemática para o Ensino Médio II / Mateus Alegri -- São  
Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2011.

1. Matemática. Estudo e ensino. 2. Combinatório.  
Matemática financeira. 4. Geometria. I. Título.

CDU 51:37.02

**Presidente da República**  
Luiz Inácio Lula da Silva

**Chefe de Gabinete**  
Ednalva Freire Caetano

**Ministro da Educação**  
Fernando Haddad

**Coordenador Geral da UAB/UFS**  
**Diretor do CESAD**  
Antônio Ponciano Bezerra

**Secretário de Educação a Distância**  
Carlos Eduardo Bielschowsky

**Vice-coordenador da UAB/UFS**  
**Vice-diretor do CESAD**  
Fábio Alves dos Santos

**Reitor**  
Josué Modesto dos Passos Subrinho

**Vice-Reitor**  
Angelo Roberto Antonioli

---

**Diretoria Pedagógica**  
Clotildes Farias de Sousa (Diretora)

**Núcleo de Serviços Gráficos e Audiovisuais**  
Giselda Barros

**Diretoria Administrativa e Financeira**  
Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)  
Sylvia Helena de Almeida Soares  
Valter Siqueira Alves

**Núcleo de Tecnologia da Informação**  
João Eduardo Batista de Deus Anselmo  
Marcel da Conceição Souza  
Raimundo Araujo de Almeida Júnior

**Coordenação de Cursos**  
Djalma Andrade (Coordenadora)

**Assessoria de Comunicação**  
Edvar Freire Caetano  
Guilherme Borba Gouy

**Núcleo de Formação Continuada**  
Rosemeire Marcedo Costa (Coordenadora)

**Núcleo de Avaliação**  
Hérica dos Santos Matos (Coordenadora)  
Carlos Alberto Vasconcelos

---

**Coordenadores de Curso**  
Denis Menezes (Letras Portugêses)  
Eduardo Farias (Administração)  
Haroldo Dorea (Química)  
Hassan Sherafat (Matemática)  
Hélio Mario Araújo (Geografia)  
Lourival Santana (História)  
Marcelo Macedo (Física)  
Silmara Pantaleão (Ciências Biológicas)

**Coordenadores de Tutoria**  
Edvan dos Santos Sousa (Física)  
Geraldo Ferreira Souza Júnior (Matemática)  
Janaína Couvo T. M. de Aguiar (Administração)  
Priscila Viana Cardozo (História)  
Rafael de Jesus Santana (Química)  
Ítala Santana Souza (Geografia)  
Trícia C. P. de Sant'ana (Ciências Biológicas)  
Vanessa Santos Góes (Letras Portugêses)  
Lívia Carvalho Santos (Presencial)

---

## NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO

Hermeson Menezes (Coordenador)  
Arthur Pinto R. S. Almeida  
Marcio Roberto de Oliveira Mendonça

Neverton Correia da Silva  
Nicolás Menezes Melo

---

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**  
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"  
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze  
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE  
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474



# Sumário

---

<b>Capítulo 1: Progressões Aritméticas</b>	<b>13</b>
1.1 Introdução . . . . .	13
1.2 Progressões aritméticas-definições e exemplos . . . . .	13
1.3 Fórmula da Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão aritmética . . . . .	15
1.4 Conclusão . . . . .	17
1.5 RESUMO . . . . .	18
1.6 Proxima aula . . . . .	18
1.7 Atividades . . . . .	18
1.8 Leitura Complementar . . . . .	19
<b>Capítulo 2: Progressões Geométricas</b>	<b>21</b>
2.0.1 Introdução . . . . .	21
2.1 Progressões geométricas-definição e exemplos . . . . .	22
2.1.1 Fórmula da soma dos $n$ primeiros termos de <i>uma progressão geométrica</i> . . . . .	23
2.2 Conclusão . . . . .	24
2.3 RESUMO . . . . .	24
2.4 Proxima aula . . . . .	25
2.5 Atividades . . . . .	25

2.6	Leitura Complementar . . . . .	26
<b>Capítulo 3: Introdução a Matemática Financeira</b>		<b>27</b>
3.1	Introdução . . . . .	27
3.2	Juros Simples . . . . .	28
3.3	Juros Compostos . . . . .	30
3.4	Capitalização e Amortização . . . . .	32
3.5	Conclusão . . . . .	35
	<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>36</b>
	<b>PRÓXIMA AULA</b> . . . . .	<b>37</b>
	<b>ATIVIDADES</b> . . . . .	<b>37</b>
	<b>LEITURA COMPLEMENTAR</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>Capítulo 4: Introdução a Combinatória, Parte I</b>		<b>39</b>
4.1	Introdução . . . . .	39
4.2	Princípio Aditivo e Multiplicativo . . . . .	39
4.3	Aplicações dos princípios Aditivo e Multiplicativo . . . . .	43
4.4	Permutações Simples . . . . .	44
	<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>45</b>
	<b>PRÓXIMA AULA</b> . . . . .	<b>46</b>
	<b>ATIVIDADES</b> . . . . .	<b>46</b>
	<b>LEITURA COMPLEMENTAR</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>Capítulo 5: Introdução a Combinatória, Parte II</b>		<b>49</b>
5.1	Introdução . . . . .	49
5.2	Arranjos simples . . . . .	49
5.3	Combinações simples . . . . .	52
5.4	Combinações Complementares . . . . .	54
5.5	Conclusão . . . . .	56
	<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>56</b>
	<b>PRÓXIMA AULA</b> . . . . .	<b>57</b>

<b>ATIVIDADES</b> . . . . .	57
<b>LEITURA COMPLEMENTAR</b> . . . . .	58
<b>Capítulo 6: Introdução a Combinatória-Aplicações,</b>	
<b>parte I</b>	<b>59</b>
6.1 Introdução . . . . .	59
6.2 Equações Lineares com coeficientes unitários . . . . .	59
6.3 Combinações com repetição . . . . .	62
6.4 Permutações com repetição . . . . .	64
<b>RESUMO</b> . . . . .	65
<b>PRÓXIMA AULA</b> . . . . .	66
<b>ATIVIDADES</b> . . . . .	66
<b>LEITURA COMPLEMENTAR</b> . . . . .	67
<b>Capítulo 7: Introdução a Combinatória-Aplicações,</b>	
<b>parte II</b>	<b>69</b>
7.1 Introdução . . . . .	69
7.2 Arranjos com repetição . . . . .	69
7.3 Permutações Circulares . . . . .	71
7.4 Coeficientes Binomiais . . . . .	73
7.5 Conclusão . . . . .	75
<b>RESUMO</b> . . . . .	76
<b>PRÓXIMA AULA</b> . . . . .	77
<b>ATIVIDADES</b> . . . . .	77
<b>LEITURA COMPLEMENTAR</b> . . . . .	78
<b>Capítulo 8: Introdução a teoria da Probabilidade</b>	<b>79</b>
8.1 Introdução . . . . .	79
8.2 Probabilidades . . . . .	80
8.3 Probabilidade Condicional e Independência . . . . .	83
<b>RESUMO</b> . . . . .	86

8.4 Conclusão . . . . .	87
<b>PRÓXIMA AULA . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>ATIVIDADES . . . . .</b>	<b>88</b>
<b>LEITURA COMPLEMENTAR . . . . .</b>	<b>89</b>

**Capítulo 9: Médias e o Princípio das Gavetas**

<b>de Dirichlet . . . . .</b>	<b>91</b>
9.1 Introdução . . . . .	91
9.2 Médias . . . . .	91
9.3 Desigualdade das médias . . . . .	93
9.4 Princípio das Gavetas de Dirichlet . . . . .	96
9.5 Conclusão . . . . .	97
<b>RESUMO . . . . .</b>	<b>97</b>
<b>PRÓXIMA AULA . . . . .</b>	<b>98</b>
<b>ATIVIDADES . . . . .</b>	<b>98</b>
<b>LEITURA COMPLEMENTAR . . . . .</b>	<b>99</b>

**Capítulo 10: Introdução a Geometria Espacial: Pontos,**

<b>Retas e Planos . . . . .</b>	<b>101</b>
10.1 Introdução . . . . .	101
10.2 Entes Primitivos e Axiomas da Geometria Euclidiana	102
10.3 Posições de retas . . . . .	104
10.4 Posição relativa entre retas e plano . . . . .	106
10.5 Posição Relativa entre dois planos . . . . .	107
10.6 Conclusão . . . . .	108
<b>RESUMO . . . . .</b>	<b>108</b>
<b>PRÓXIMA AULA . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>ATIVIDADES . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>LEITURA COMPLEMENTAR . . . . .</b>	<b>110</b>



<b>Capítulo 11: Paralelismo e perpendicularismo</b>	<b>111</b>
11.1 Introdução . . . . .	111
11.2 Retas e Planos perpendiculares . . . . .	111
11.3 Planos Paralelos e Proporcionalidade . . . . .	116
11.4 Conclusão . . . . .	117
<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>118</b>
<b>PRÓXIMA AULA</b> . . . . .	<b>118</b>
<b>ATIVIDADES</b> . . . . .	<b>118</b>
<b>LEITURA COMPLEMENTAR</b> . . . . .	<b>119</b>
<b>Capítulo 12: Noções de distâncias e ângulos</b>	<b>121</b>
12.1 Introdução . . . . .	121
12.2 Ângulos . . . . .	121
12.3 Distâncias . . . . .	125
12.4 Conclusão . . . . .	126
<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>127</b>
<b>PRÓXIMA AULA</b> . . . . .	<b>128</b>
<b>ATIVIDADES</b> . . . . .	<b>128</b>
<b>LEITURA COMPLEMENTAR</b> . . . . .	<b>129</b>
<b>Capítulo 13: Poliedros</b>	<b>131</b>
13.1 Introdução . . . . .	131
13.2 Definições . . . . .	131
13.3 A relação de Euler . . . . .	133
13.4 Conclusão . . . . .	136
<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>136</b>
<b>PRÓXIMA AULA</b> . . . . .	<b>137</b>
<b>ATIVIDADES</b> . . . . .	<b>137</b>
<b>LEITURA COMPLEMENTAR</b> . . . . .	<b>138</b>

<b>Capítulo 14: Volume e Área de</b>	
<b>Superfície, Parte I</b>	<b>139</b>
14.1 Introdução . . . . .	139
14.2 Volume do Paralelepípedo Retangular . . . . .	140
14.3 O Princípio de Cavalieri . . . . .	140
<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>144</b>
<b>PRÓXIMA AULA</b> . . . . .	<b>145</b>
<b>ATIVIDADES</b> . . . . .	<b>145</b>
<b>LEITURA COMPLEMENTAR</b> . . . . .	<b>146</b>

<b>Capítulo 15: Volume e Área de</b>	
<b>Superfície, Parte II</b>	<b>147</b>
15.1 Introdução . . . . .	147
15.2 A Esfera . . . . .	147
15.3 Área de Superfície . . . . .	149
15.4 Sólidos de revolução . . . . .	150
15.5 Conclusão . . . . .	152
<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>152</b>
<b>ATIVIDADES</b> . . . . .	<b>153</b>
<b>LEITURA COMPLEMENTAR</b> . . . . .	<b>153</b>

---

# Progressões Aritméticas

## 1.1 Introdução

Prezado aluno, seja bem vindo ao curso Matemática para o Ensino Médio II. O objetivo principal deste curso é o de dar segurança em relação ao conteúdo do segundo ano do ensino médio para você, aluno, que posteriormente será professor habilitado a dar aulas no ensino fundamental e médio.

Nesta aula trabalharemos o conceito de progressões aritméticas, que você viu no início do segundo ano do ensino médio. Como você sabe, na vida real, são comuns, as grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempos iguais. Isto está intimamente ligado a sequências nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é constante.

Apresentaremos o conceito de progressões aritméticas enfatizando com exemplos e provaremos a fórmula da soma dos primeiros  $n$  termos de uma progressão aritmética. Mais adiante mostraremos como uma progressão aritmética pode ser "vista" como um polinômio, e forneceremos mais resultados associados a tais polinômios.

## 1.2 Progressões aritméticas-definições e exemplos

**Definição 1.1. progressão aritmética:** Uma progressão arit-

## Progressões Aritméticas

métrica é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra  $r$ .

**Exemplo 1.1.** As sequências  $(0, 4, 8, 12, 16, \dots)$  e  $(7, 5, 3, 1, -1, -3, \dots)$  são progressões aritméticas cujas razões valem 4 e  $-2$ , respectivamente.

Em uma progressão aritmética  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ , notemos que para sair de um termo para o seguinte necessitamos apenas somar a razão  $r$ . Neste caso  $a_{n+1} = a_n + r$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ . A pergunta agora é: Se soubermos apenas a razão  $r$  e o primeiro termo  $a_0$ , temos como descobrir o valor de um termo qualquer  $a_n$ ?

A resposta é sim, e por recursão, é fácil ver que,  $a_n = a_0 + rn$ . Em geral vale:  $a_n = a_k + (n - k)r$  para  $0 \leq k \leq n$

**Exemplo 1.2.** O preço de um carro novo é de R\$10000,00 e diminui R\$250,00 a cada ano. Qual será o preço deste carro passado 11 anos?

### Solução:

Neste caso  $a_0 = 10000$  e queremos calcular  $a_{11}$ . Como a desvalorização é constante,  $(a_n)$  é uma progressão aritmética. Deste modo  $r = -250$  e  $a_{11} = 10000 - 250 \times 11 = 7250$

**Exemplo 1.3.** O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra na era Cristã? Em que ano foi a sua primeira passagem nesta era?

### Solução:

Se o último ano da passagem do cometa foi em 1986, então  $a_1 = 1986$  e  $r = -76$ . Assim  $a_n = 1986 - 76(n - 1) = 2062 - 76n$ , de modo que  $a_n > 0$  desde que  $n < 27,13\dots$ . Portanto, os termos positivos dessa progressão são os 27 primeiros  $a_1, a_2, \dots, a_{27}$ . Assim o cometa Halley visitou 27 vezes a Terra e a sua primeira passagem

na era cristã foi em  $a_{27} = 2062 - 76 \times 27 = 10$ .

### 1.3 Fórmula da Soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

Nesta seção exibiremos a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, bem como algumas consequências disto.

**Teorema 1.1.** *A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética  $(a_1, a_2, \dots)$  é*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração

Consideremos  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ , é verdade que  $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_n + a_1)$ . Observe que, no primeiro parênteses temos:  $(a_1 + a_n) = a_1 + a_1 + (n-1)r$ ; e no segundo,

$$(a_2 + a_{n-1}) = a_2 + a_1 + (n-2)r = a_1 + a_1 + (n-1)r = (a_1 + a_n),$$

de forma análoga podemos concluir que todos os parênteses são iguais, de modo que temos n deles assim a soma  $S_n$  valerá:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

**Exemplo 1.4.** Qual é o valor da soma dos primeiros 12 termos da progressão aritmética:  $(-2, 1, 4, 7, 10, \dots)$ ?

**Solução:**

Como  $a_{12} = -2 + 12 \times 3 = 34$ , temos:

$$S_{12} = \left(\frac{-2+34}{2}\right)12 = 192.$$

**Exemplo 1.5.** Mostre que a soma dos n primeiros números inteiros positivos é:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

## Progressões Aritméticas

### Solução:

Considere a progressão aritmética:  $(1, 2, 3, 4, \dots)$ , utilizando a fórmula para a soma dos primeiros termos para esta progressão, temos:

$$S_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Proposição 1.1.** *A soma dos primeiros termos de uma progressão aritmética é um polinômio de grau 2 sem termo livre.*

Demonstração Como  $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$ , e  $a_n = a_1 + (n-1)r$ , substituindo  $a_n$  na fórmula de  $S_n$ , temos:

$$S_n = \frac{r}{2}n^2 + (a_1 - \frac{r}{2})n.$$

**Definição 1.2.** *Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência  $(a_n)$  na qual as diferenças  $\delta a_n = a_{n+1} - a_n$ , entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética não-estacionária. Em geral, uma progressão de ordem  $k$ , ( $k > 2$ ) é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão de ordem  $k-1$ .*

**Exemplo 1.6.** Seja  $(a_n) = (0, 0, 6, 24, 60, 120, 210)$ ,  $(\delta a_n) = (0, 6, 18, 36, 60, 90)$ ;

$$(\delta^2 a_n) = (6, 12, 18, 24, 30); (\delta^3 a_n) = (6, 6, 6, 6).$$

Como  $(\delta^3 a_n)$  é constante, temos que  $(\delta^2 a_n)$  é uma progressão aritmética.

**Proposição 1.2.** *Uma sequência  $(a_n)$  na qual o termo de ordem  $n$  é um polinômio em  $n$ , do segundo grau, se, e somente se, a sequência  $(a_n)$  é uma progressão aritmética de segunda ordem.*

Demonstração

Se,  $a_n = an^2 + bn + c$ , com  $a \neq 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \delta a_n &= a_{n+1} - a_n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c) = \\ &= 2an + a + b, \end{aligned}$$

que é do primeiro grau em  $n$ . Assim  $(\delta a_n)$  é uma progressão aritmética não-estacionária.

Reciprocamente, se  $(a_n)$  é uma progressão aritmética de segunda ordem,  $(\delta a_n)$  é uma progressão aritmética com razão diferente de zero, e a soma dos primeiros  $n$  termos de  $(\delta a_n)$  é um polinômio do segundo grau em  $n$ , de maneira que  $(a_n)$  também é um polinômio de segundo grau em  $n$ .

**Teorema 1.2.** *Uma sequência  $(a_n)$  é uma progressão aritmética de ordem  $p$  ( $p \geq 2$ ), se, e somente se,  $a_n$  é um polinômio de grau  $p$  em  $n$ .*

Demonstração

Vamos proceder por indução sobre  $p$ . Para  $p = 2$  é válido pela proposição anterior.

Suponhamos que o teorema seja válido para  $p$  e provemos que a afirmação é válida para  $p = s + 1$ . Se  $(a_n)$  é uma progressão aritmética de ordem  $s + 1$ ,  $(\delta a_n) = a_{n+1} - a_n$  é uma progressão aritmética de ordem  $s$ , e por indução,  $(\delta a_n)$  é um polinômio de grau  $s$  em  $n$ . Logo a soma dos primeiros  $n$  termos de  $(\delta a_n)$  que vale  $a_n - a_1$  é um polinômio de grau  $s + 1$  em  $n$ , de modo que  $a_n$  é um polinômio de grau  $s + 1$  em  $n$ . Reciprocamente, se  $a_n$  é um polinômio de grau  $s + 1$  em  $n$ ,  $(\delta a_n)$  é um polinômio de grau  $s$  em  $n$ . Por indução,  $(\delta a_n)$  é uma progressão de ordem  $s$ , ou seja,  $(a_n)$  é uma progressão aritmética de ordem  $s + 1$ .

## 1.4 Conclusão

Na aula de hoje, apresentamos a definição de progressão aritmética e alguns resultados relacionados. O ponto principal acerca de progressões é que uma progressão aritmética de ordem  $p$  ( $p \geq 2$ ) é

## Progressões Aritméticas

associada a um polinômio de grau  $p$ . De modo que você, prezado aluno e futuro professor deverá "ver" uma progressão aritmética de outra maneira: do ponto de vista polinomial.



### 1.5 RESUMO

Uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra  $r$ , cuja fórmula geral é dada por:  $a_n = a_0 + rn$ , onde  $r$  é a chamada de razão de uma progressão aritmética.

A soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão aritmética  $(a_1, a_2, \dots)$  é:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$



### 1.6 Proxima aula

Na próxima aula, daremos a definição de progressões geométricas, motivado por exemplos. Exibiremos também a fórmula que calcula o valor da soma dos primeiros  $n$  termos de uma progressão geométrica.



### 1.7 Atividades

**ATIV. 1.1.** Dada uma fita separada em intervalos horizontais por três cores: azul amarelo e branco, onde há repetição dessas cores. Se a primeira cor que vemos é amarelo, a segunda azul e a terceira branca, qual será a cor do intervalo de número  $10^6$ ?



**ATIV. 1.2.** Quantos números inteiros existem, de 1000 a 10000, que não são divisíveis nem por 5 nem por 7 ?

**ATIV. 1.3.** Ache  $a_0$  numa P.A., sabendo que  $r=1/4$  e  $a_{29}=45$ .

**ATIV. 1.4.** Quanto vale o produto  $a(aq)(aq^2)(aq^3)\dots(aq^n)$ ?

## 1.8 Leitura Complementar

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

Santos, J.P.O., Mello, M. P., Murari, I. T. C., Introdução à Análise Combinatória, 4 ed., Editora Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

Guelli, C.A., Iezzi, G., Dolce, O., Álgebra I - Sequencias - Progressões - Logaritmos, Editora Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

