AULA

Progressões Geométricas

2

META:

Apresentar o conceito de progressões geométricas e propriedades.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Entender o conceito de progressões geométricas e saber relacioná-la com taxas de crescimento.

PRÉ-REQUISITOS

Multiplicação de números reais e limites de funções reais.

2.0.1 Introdução

Prezado aluno, nesta aula exibiremos o conceito progressões geométricas. Como vimos na aula passada, uma progressão aritmética é uma a sequência na qual o aumento de cada termo para o seguinte é constante, de modo análogo podemos pensar em sequências nas quais o quociente de um termo pelo seguinte é sempre constante. Isto é o que chamaremos de progressões geométricas e este conceito está intimamente ligado ao estudo de taxas equivalentes, e juros compostos.

2.1 Progressões geométricas-definição e exemplos

Definição 2.1. Uma *progressão geométrica é uma sequência na qual o quociente da divisão de cada termo pelo anterior é constante*

Exemplo 2.1. A sequência $(a_n) = (2, 4, 8, 16, 32, 64, ...)$ é uma progressão geométrica, pois $2 = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = ...$

Exemplo 2.2. A sequência $(b_n) = (0, 1, 2, 16, 22, 54, ...)$ não é uma progressão geométrica, pois um dos termos desta é nulo.

Exemplo 2.3. A população de um país hoje é igual a P_0 e cresce 2% ao ano. Qual será a população deste país daqui n anos?
Solução:
Se a população cresce 2% ao ano, a população é $102\% = 1,02$ da anterior, deste modo, daqui n anos a população é $P_n = 1,02^n P_0$.

Exemplo 2.4. O Flamengo tem um número k de torcedores. Sabendo que este número descresce 8% ao ano, qual será o número de torcedores do Flamengo daqui a 8 anos?
Solução:
Se o número de torcedores do Flamengo, hoje, é k, e decresce a uma taxa de $8\% = 0,08$ ao ano, então daqui a um ano, o número de torcedores será de $T_1 = 0,92k$. Deste modo, o número de torcedores do Flamengo daqui a 8 anos será de $T_8 = 0,92^8 k$, onde $0,92^8$ vale aproximadamente 0,5132. Portanto, o Flamengo terá uma redução de aproximadamente 49% na sua torcida em 8 anos.

Em uma progressão geométrica, cada termo é igual ao anterior multiplicando por um número q, onde $q = 1 + i$, sendo que i é a taxa de crescimento dos termos. Nota-se que i pode ser negativo, como no exemplo passado. Naquele caso $i = -0,08$.

Definição 2.2. Em uma progressão geométrica, o quociente da divisão de cada termo pelo anterior , é uma constante denotada por q, chamada de razão da progressão.

A razão q de uma progressão geométrica é simplesmente o valor de $1+i$, onde i é a taxa de crescimento constante de cada termo para o seguinte.

Exemplo 2.5. As sequências $(2,6,18,54,...)$ e $(128,32,8,2)$ são progressões geométricas cujas razões valem respectivamente $q_1 = 3$ e $q_2 = \frac{1}{4}$. Suas taxas de crescimento são respectivamente $i_1 = 2 = 200\%$ e $i_2 = -\frac{3}{4} = -75\%$, pois $q = 1+i$.

Em uma Progressão geométrica (a_n), para avançar de um termo para o seguinte basta multiplicar pela razão q, deste modo tem-se fórmula geral de uma progressão geométrica: $a_n = a_1 q^{n-1}$, pois ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n-1$ termos.

Exemplo 2.6. E uma progressão geométrica o quinto termo vale 5 e o oitavo vale 135. Quanto vale o sétimo termo dessa progressão?
Solução:
$a_8 = a_5 q^3$, pois para passarmos do quinto termo ao oitavo, avançamos 3 termos. Logo, $135 = 5q^3$ e $q = 3$. Analogamente, $a_7 = a_5 q^2 = 45$.

2.1.1 Fórmula da soma dos *n primeiros termos de uma progressão geométrica*

Teorema 2.1. *A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica* (a_n) *de razão* $|q| \neq 1$, *é*
$S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.
Como $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, *então* $qS_n = a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1}$, *pois* $a_{k+1} = qa_k$, $\forall k \in \{1, n\}$.

Subtraindo qS_n *de* S_n*, temos* $S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$*, isto é,* $S_n(1 - q) = a_1 - a_1q^n$*. Portanto,*
$S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Exemplo 2.7. Calcule a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica $(a_n) = (3, 6, 12, 24, 48, ...)$

Solução:

Como $q = 2$ e $a_1 = 3$, temos
$S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = 3\dfrac{1-2^n}{-1} = -3 + 3.2^n$.

Nas progressões geométricas em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \mapsto \infty$.

Teorema 2.2. *Seja* (a_n) *uma progressão geométrica de razão* $|q| < 1$*, o limite* S_n*, da soma dos primeiros* n *termos da progressão* (a_n) *converge, isto é:* $\lim_{n \mapsto \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

Basta notarmos que $\lim n \mapsto \infty q^n = 1$, para $|q| < 1$. Assim, $\lim_{n \mapsto \infty} S_n = a_1 \frac{1-0}{1-q} \frac{a_1}{1-q}$.

2.2 Conclusão

Nesta aula, apresentamos o conceito de progressão geométrica juntamente com a fórmula da soma dos n primeiros termos desta. Além disso provamos um importante resultado : desde que a razão de uma progressão geométrica $|q| < 1$, a soma S_n converge para $\dfrac{a_1}{1-q}$, quando n cresce.

2.3 RESUMO

Em uma progressão geométrica, o quociente da divisão de cada termo pelo anterior , é uma constante denotada por q, chamada de razão da progressão. A razão q de uma progressão geométrica é simplesmente o valor de $1+i$, onde i é a taxa de crescimento constante de cada termo para o seguinte.

A fórmula geral de uma progressão geométrica é $a_n = a_1 q^{n-1}$

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$, é
$S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Para $|q| < 1$, $\lim_{n\mapsto\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

2.4 Proxima aula

Na próxima aula Trabalharemos alguns conceitos de matemática financeira como juros simples e juros compostos. Na verdade, juros compostos é uma aplicação direta do conceito de progressões geométricas.

2.5 Atividades

ATIV. 2.1. Aumentos sucessivos de 5% e 10% equivalem a um aumento único de quanto?

ATIV. 2.2. Descontos sucessivos de 5% e 10% equivalem a um desconto único de quanto?

ATIV. 2.3. Qual é o quarto termo da progressão geométrica: $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{3}{2}}$, $2^{\frac{6}{2}}$,...?

ATIV. 2.4. Determine o valor da soma: $S = 0,3 + 0,33 + 0,333 +$ ....
Quanto vale $3S$?

ATIV. 2.5. Calcule o valor da soma:

a)$1 + 11 + 111 + 1111 + ...$

b)$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$, com $|x| < 1$.

2.6 Leitura Complementar

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

Santos, J.P.O., Mello, M. P., Murari, I. T. C., Introdução à Análise Combinatória, 4 ed., Editora Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

Guelli, C.A., Iezzi, G., Dolce, O., Álgebra I - Sequencias - Progressões - Logarítmos, Editora Moderna, Rio de Janeiro, 2007.