AULA 3

Introdução a Matemática Financeira

META:

Apresentar os conceitos de juros simples e compostos, e algumas propriedades .

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Entender o conceito de juros simples, juros compostos.

PRÉ-REQUISITOS

Multiplicação de números reais e limites de funções reais.

3.1 Introdução

Nesta aula, veremos alguns conceitos de matemática financeira. Aluno, você deve estar familiarizado com o conceito de progressões geométricas, a partir de agora veremos que uma das importantes aplicações de progressões geométricas é a matemática financeira.

A operação básica da matemática Financeira é a operação de empréstimo. Quando emprestamos um capital a uma pessoa (física ou jurídica), recebemos de volta a quantia emprestada mais uma quantia que denominamos de juros. Veremos logo a seguir duas modalidades de práticas de juros, que serão motivadas por exemplos e aplicações da vida cotidiana.

3.2 Juros Simples

Definição 3.1. Capital (principal ou valor presente) É a quantia aplicada ou emprestada por um período de tempo.
Prazo(ou tempo) É o período de aplicação do capital.

Definição 3.2. Chamamos de juros simples a remuneração de um capital (C) aplicado a uma taxa (i), por um período de tempo determinado (n).

A taxa de juro indica o valor do juro a ser pago numa unidade de tempo, e será expresso em porcentagem do capital. Exemplos: a) A taxa de juro de 15% a.d.; significa que o valor do juro é igual 15% do capital, por dia. b) A taxa de juro de 31% a.m.; significa que o valor do juro é igual a 31% do capital, por mês.

Exemplo 3.1. Rodogofredo tomou um empréstimo de $R\$100$. Dois meses após, pagou $R\$150$. Os juros pagos por Rodogofredo são de $R\$50$, e a taxa de juros é de $0,5 = 50\%$ ao bimestre. O capital é de $R\$100$ e o montante é de $R\$150$.

Teorema 3.1. *No regime de juros simples de taxa i, um capital de C, transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante de $M = C(1 + in)$.*

O juro total dos n períodos será: $J = Cin$. Logo o montante, após n meses será de $M = C + Cin = C(1 + in)$.

Exemplo 3.2. Calcular os juros produzidos por um capital de $R\$2.000,00$ colocado a taxa 1% a.m. durante 1 ano e 2 meses.
Solução:
J=C. i. n $C = R\$2000$, $i = 1\%$ a.m.
Como n é igual a 14 meses, temos $J = 280$.

Exemplo 3.3. Um capital de $R\$4.000$ rendeu em 1 mês a importância de $R\$1000$ de juros. Calcular a taxa i.

Solução:

Como $C = R\$4000$, e $n = 1$ (mês), e $J = C(in)$, temos:

$i = 0,25 = 25\%$ a.m.

Exemplo 3.4. Calcular o capital que, aplicado a taxa de 1% a.m., produz em 1 ano e 1 mês, juros de $R\$650$.

Solução:

Como $i = 1\%$ a.m., $n = 13$ e $J = R\$650$, temos:

$J = Cin$, então $C = R\$5000$.

Definição 3.3. Duas taxas são denominadas de proporcionais, quando seus valores formam uma proporção com os seus respectivos períodos de tempo, reduzidos numa mesma unidade. Assim, sendo teremos:

$$\frac{i_1}{n_1} = \frac{i_2}{n_2}$$

Exemplo 3.5. Qual a taxa mensal proporcional a taxa de 24% a.a.?

Solução:

Como $\frac{i_1}{n_1} = \frac{i_2}{n_2}$, temos:

$\frac{i_1}{1} = \frac{24}{12}$. Portanto:

$i_2 = 2\% a.a.$

Definição 3.4. Duas taxas são denominadas de equivalentes, quando aplicadas a um mesmo capital, num mesmo período de tempo, produzem juros iguais.

Exemplo 3.6. Calcular os juros produzidos pelo capital de $R\$1000$: a) a taxa de 2% a.m., durante 3 meses. b) a taxa de $1,5\%$ a.a., durante 4 anos.

Solução:

Como tanto em a) como em b), $J = 60$, podemos afirmar que 2% a.m. é uma taxa equivalente a $1,5\%$ a.a.

3.3 Juros Compostos

Definição 3.5. No regime de capitalização composta os juros de cada período são calculados, conforme é natural, sobre a dívida do início desse período.

Deste modo, é dito popularmente que os juros compostos são calculados da forma "juros sobre juros", ou seja de um período de tempo para o outro calcula-se os juros desde o período anterior. Para esta definição se tornar mais clara, vamos tomar alguns exemplos:

Exemplo 3.7. exemplo6 Jeribabel tomou um empréstimo de $R\$100$ a juros de taxa de 10% a.m.. Após um mês a dívida de Jeribabel será acrescida de $0,1 \times 100 = 10$ reais de juros (pois $J = iC$), passando a 110 reais. Se Jeribabel e seu credor concordarem em adiar a liquidação da dívida por mais um mês, mantida a mesma taxa de juros, o empréstimo será quitado, dois meses depois de contraído, por 121 reais, pois os juros relativos ao segundo mês serão de $0,10 \times 110 = 11$ reais. Esses juros assim calculados são chamados de juros compostos.

Pergunta:
Será que é possível generalizar essa idéia para um período de, no caso, n meses?
A resposta é sim, e esta pergunta é a motivação para o seguinte teorema:

Teorema 3.2. *No regime de juros compostos de taxa i, o capital C, transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante* $M = C(1 + i)^n$.

Basta observar que os valores do capital crescem a uma taxa constante i e, portanto, formam uma progressão geométrica de razão

$1 + i$.

Exemplo 3.8. Um capital de $R\$2000$, foi aplicado a uma taxa de 2% a.m. durante 8 meses. Calcular o montante.

Solução:

Temos:

$C = R\$2.000$, $i = 2\% = 0,02$ a.m. $n = 8$ (meses).

Como $M = C(1 + i)^n$, temos:

$M = 2000(1 + 0,02)8 = 2340$.

Exemplo 3.9. Durante quanto tempo se deve aplicar um capital de 3000 reais a uma taxa de 3% a.m., para produzir um montante de 6000 reais?

Solução:

Temos:

$C = 3000$, $i = 3\% = 0,03$ a.m., $M = 6000$ Como $M = C(1 + i)^n$, temos:

$6000 = 3000(1 + 0,03)^n$,

$6 = 3(1 + 0,03)^n$, deste modo:

$log6 = log[3 \times (1,03)^n] = log6 = log3 + log(1,03)^n = log6 - log3 = n \times log(1,03)$. Assim:

$n = \frac{log6 - log3}{log1,03} = 23,5$ meses(valor aproximado).

Como no exemplo passado, sempre que quisermos encontrar n, devemos lançar mão da função logarítmica. De fato, desde que o montante é calculado como: $M = C(1 + i)^n$, n vale:

$n = \frac{logM}{log[C(1+i)]}$, desde que $i \neq 1$ e $C \neq 0$.

Exemplo 3.10. Um capital de 2000 reais é aplicado a juros compostos durante 3 meses, obtendo-se o montante de 4500 reais. Calcule a taxa mensal de aplicação.

Solução:

Como $C = 2000$, $n = 3$, e $M = 4500$; Tem-se:

$4500 = 2000(1+i)^3$, de modo que

$1+i = (2,25)^{\frac{1}{3}}$, e portanto, $i = 0,31 = 31\%$ a. m.

Exemplo 3.11. Uma loja oferece duas opções de pagamento:

a) à vista com 30% de desconto.

b) Em duas prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira prestação sendo paga no ato da compra.

Qual a taxa mensal nos juros embutidos nas vendas a prazo?

Solução:

Vamos fixar o valor do bem em 100. Deste modo, temos duas opções:

Ou pagar 70, ou 50 e no mês seguinte mais uma prestação de 50. Logo na época 0, obtemos: $70 = 50 + \frac{50}{1+i}$, de modo que $i = 1,5 = 150\%$. Ou seja a loja cobra 150% ao mês nas vendas a prazo.

3.4 Capitalização e Amortização

Quando queremos constituir um capital, para aquisição de um bem qualquer, devemos depositar periodicamente uma quantia fixa, em uma instituição financeira. Este exemplo é de capitalização. Por amortização entendemos a ação de pagar uma dívida, em épocas distintas. A sucessão de pagamentos para constituir um capital ou para amortizar uma divida é denominada de renda. As rendas podem ser classificadas da seguinte forma:

a) quanto ao prazo:

As rendas são denominadas temporárias quando o número de termos

ou parcelas é finito e perpétuas quando o número de termos é infinito.

b) quanto a periodicidade:

As rendas são denominadas periódicas quando o intervalo de tempo entre dois pagamentos consecutivos são iguais e não periódicas quando esses intervalos são diferentes.

c) quanto ao valor dos termos:

As rendas são consideradas constantes quando todos os pagamentos são iguais. Em caso contrário, ou seja, quando os pagamentos são diferentes entre si, são chamadas de rendas variáveis.

Teorema 3.3. *O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento , é, sendo i a taxa de juros, igual a*
$A = P\dfrac{1-(1+i)^n}{i}$

O valor da série na época 0, é:
$A = \dfrac{P}{1+i} + \dfrac{P}{(1+i)^2} + \dfrac{P}{(1+i)^3} + ... + \dfrac{P}{(1+i)^n}$, que é a soma dos n termos de uma progressão geométrica, de modo que
$A = \dfrac{P}{1+i}\dfrac{1-(\frac{1}{1+i})^n}{1-(\frac{1}{1+i})} = P\dfrac{1-(1+i)^n}{i}$.
O corolário seguinte trata do valor de uma renda perpétua. Rendas perpétuas aparecem em locações. Com efeito, quando se aluga um bem, cede-se a posse do mesmo em troca de um aluguel, digamos, mensal. Então, o conjunto dos aluguéis constitui uma renda perpétua.

Corolário 3.1. *O valor de uma perpetuidade de termos iguais a P, com um tempo antes do primeiro pagamento,é , sendo i a taxa de juros, igual a* $\frac{P}{i}$.

Demonstração

Basta fazer n tender a infinito no teorema.

Exemplo 3.12. Um bem, cujo preço a vista é de 120 reais, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações.

Solução:

Igualando os valores na época 0, obtemos:

$120 = P\frac{1-(1+0{,}08)^{-8}}{0{,}08}$, de modo que $P = 20,88$ é o valor das prestações.

Quando um banco empresta dinheiro, o tomador do empréstimo emite uma promissória, que é um papel no qual o tomador se compromete a pagar ao banco, em uma data fixada, uma certa quantia, em uma certa data, chamada de promissória. O banco então desconta a promissória para o cliente, isto é, recebe a promissória de valor F e entrega ao cliente uma quantia A. A diferença $F - A$ é chamada de desconto.

Os bancos efetuam o desconto de acordo com a fórmula $A = F(1-dt)$, onde d é uma taxa fixada pelo banco, chamada de taxa de desconto bancário, e t é o prazo da operação.

Exemplo 3.13. Lucrécio desconta uma promissória de valor igual a 100 reais, com vencimento em 60 dias, cuja a taxa de desconto é de 12% a.m. Pergunta-se:

a) Quanto Lucrécio receberá?

b)Qual é a taxa mensal de juros que Lucrécio está pagando?

Solução:

a) $A = F(1 - dt) = 100(1 - 0,12 \times 2) = 76$.

Portanto Lucrécio receberá 76, para pagar 100 em 2 meses.

é o valor das prestações.

b) Seja i a taxa mensal de juros, deste modo temos: $100 = 76(i+1)^2$, portanto $i = 14,7\%$.

Quando se paga parceladamente um débito, cada pagamento tem uma dupla finalidade: uma parte do pagamento quita os juros e outra amortiza(abate) a dívida.

Os sistemas usuais de amortização são o sistema de amortização constante (SAC) e o sistema chamado de Tabela Price.
Denotamos por A_k, J_k e D_k a parcela de amortização, a parcela de juros, a prestação e o estado da dívida na época k, respectivamente.

Teorema 3.4. *No SAC, sendo n o número de pagamentose i a taxa de juros, tem-se:*
$A_k = \frac{D_0}{n}$, $D_k = \frac{D_0(n-k)}{n}$, $J - k = iD_{k-1}$, *e* $P_k = A_k + J_k$.

Demonstração
Se a dívida D_0 é amortizada em n quotas iguais, cada quota é igual a $A_k = \frac{D_0}{n}$. O estado da dívida após k amortizações, é:
$D_k = D_0 - k\frac{D_0}{n} = \frac{D_0(n-k)}{n}$.

Exemplo 3.14. Calcule o valor de uma dívida que pode ser amortizada em 6 prestações mensais de 120 reais cada uma, sendo1% a.m. a taxa de juros?
Solução:
$P = 120$, $D_0 = A_k n$, $i = 1\% a.m. = 0,01 a.m.$, $n = 6$
Logo $D_0 = 120 \times 5,79548 = 695,46$ (valor aproximado).

Exemplo 3.15. Qual o valor da prestação mensal para amortizar, com 6 prestações, um empréstimo de 3000 reais a juros de 2% a.m.?
Solução:
$D_0 = A_k n$, $i = 2\% a.m. = 0,02 a.m.$, $n = 6$, $D_0 = 3000$,assim,
$P = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 535,58$ (valor aproximado).

3.5 Conclusão

Nesta aula, apresentamos alguns conceitos de matemática financeira, dando ênfase a juros simples e compostos. Vimos que este último aparece de forma natural e deve ser visto como uma progressão geométrica. Trabalhamos alguns exercícios e conhecemos alguns resultados acerca de amortizações. Tendo este conhecimento, você, aluno será capaz de reconhecer estruturas aritméticas que envolvem problemas de capitalização do cotidiano, e estará apto a vir a ensinar sobre tal conteúdo no ensino médio e em cursos técnicos.

RESUMO

Chamamos de juros simples a remuneração de um capital (C) aplicado a uma taxa (i), por um período de tempo determinado (n). Neste caso $M = C(1 + in)$

Duas taxas são denominadas de proporcionais, quando seus valores formam uma proporção com os seus respectivos períodos de tempo, reduzidos numa mesma unidade. Assim, sendo teremos:

$$\frac{i_1}{n_1} = \frac{i_2}{n_2}$$

No regime de capitalização composta os juros de cada período são calculados, conforme é natural, sobre a dívida do início desse período.

O capital C, capitalizado no regime de juros compostos de taxa i transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $M = C(1 + i)^n$.

O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento , é, sendo i a taxa de juros, igual a

$$A = P\frac{1 - (1 + i)^n}{i}.$$

No SAC (sistema de amortização constante), sendo n o número de pagamentose i a taxa de juros, tem-se:

$A_k = \frac{D_0}{n}$, $D_k = \frac{D_0(n-k)}{n}$, $J - k = iD_{k-1}$, e $P_k = A_k + J_k$.

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula começaremos a estudar alguns conceitos em Matemática Discreta. O estudo de Matemática discreta está relacionado a problemas de contagem, em especial aquelas que envolvem repetições de objetos.

ATIVIDADES

..

ATIV. 3.1. Verifique graficamente o crescimento do montande de um capital sendo nele aplicado uma taxa de juros simples e compostos.

ATIV. 3.2. Um capital de 6000 aplicando durante 2 meses, a juros simples, rende 2000. Determinar a taxa de juros cobrada.

ATIV. 3.3. Calcular o juro e o montante de uma aplicação de 10.000 durante 1 ano, a taxa de juros simples de $0,5\%$a.m.

ATIV. 3.4. Em quanto tempo um capital colocado a $0,4\%$ a.m., rende $\frac{2}{5}$ do seu valor?

ATIV. 3.5. João colocou 10.000 em um banco, a juros compostos de 8% a.a., capitalizados anualmente. Ao final de 2 anos obteve juros no valor de?

ATIV. 3.6. Para um capital de $200,00$. Calcule o montante em cada caso: a) n = 15 meses e $i = 24\%$ a.a. b) n = 18 meses e $i = 72\%$ a.a.

ATIV. 3.7. Paguei 10 prestações de $R\$150$ num financiamento feito a base de 1% a.m. Qual o valor da dívida amortizada?

ATIV. 3.8. Comprei uma geladeira que à vista sairia por 1200 reais, pagando em 6 prestações mensais de 221,52 reais. Qual foi a taxa mensal de juros cobrada no financiamento?

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio 2, SBM, 5.ed,Rio de Janeiro, 2008.

Minello , R.C., Epprecht , C.E., Matemática Financeira e Comercial Autores, Editora CopyMarket.com, 2000.